2e PARTIE : QUELQUES MORCEAUX CHOISIS

I. EXEMPLES D'APPROXIMATIONS DE NOMBRES REELS PAR DES SUITES

par Annie MICHEL et Pierre TISON (IREM de Lille)

A. CALCUL DE RACINES CARREES ET CUBIQUES

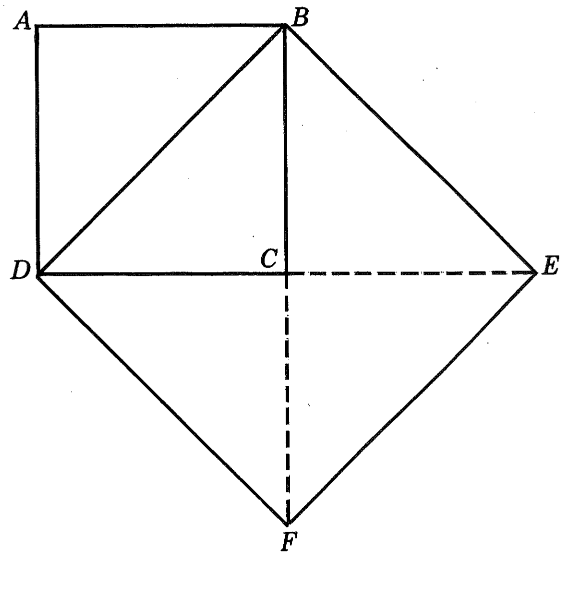
Cette première série d'exercices nécessite l'utilisation d'une calculatrice de poche "4 opérations", avec une mémoire si possible. Elle est destinée soit aux élèves de quatrième à qui l'on peut démontrer l'existence de $\sqrt{2}$, par exemple comme il est indiqué dans l'exercice 1, soit aux élèves de troisième ayant étudié le théorème de Pythagore.

Exercice 1 : *Construction géométrique de* $\sqrt{2}$

Soit un carré ABCD de côté 1 unité de longueur.

Construisons sur la diagonale BD le carré DBEF ; la mesure de la surface de ce carré est 4 fois celle du triangle BDC, donc 2 fois celle du carré ABCD, c'est-à-dire 2.

Si l'on note a la longueur de la diagonale, on en conclut que : $a^2 = 2$. Il existe donc bien un nombre dont le carré est 2 ; ce nombre sera noté $\sqrt{2}$.



Exercice 2 : $\sqrt{2}$ *n'est pas un nombre rationnel*

C'est un excellent exercice que de démontrer que $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ en raisonnant soit sur la parité de p et q soit sur la décomposition en facteurs premiers.

Conclusion

Le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel : il existe donc des nombres qui ne sont pas rationnels (a fortiori, de tels nombres ne sont pas des nombres décimaux).

Exercice 3 : *Encadrement de $\sqrt{2}$ par des nombres décimaux.*

Le but de cet exercice étant de construire en fait deux suites adjacentes convergeant vers $\sqrt{2}$ (ou plus exactement les premiers termes de ces suites), l'usage d'une calculatrice 4 opérations s'impose ; les suites considérées convergent d'ailleurs très rapidement : ce qui justifie leur choix. Il serait sans doute intéressant de faire précéder cet exercice par un autre, plus élémentaire mais donnant de moins bons résultats numériques, tel celui qui consiste à élever successivement au carré :

1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 ; 1,5

puis 1,41 ; 1,42, ensuite 1,411 ; 1,412 ; 1,413 ; 1,414 ; 1,415... ce qui permet d'écrire (en admettant, implicitement bien sûr, le prolongement de la relation d'ordre définie sur ces décimaux) :

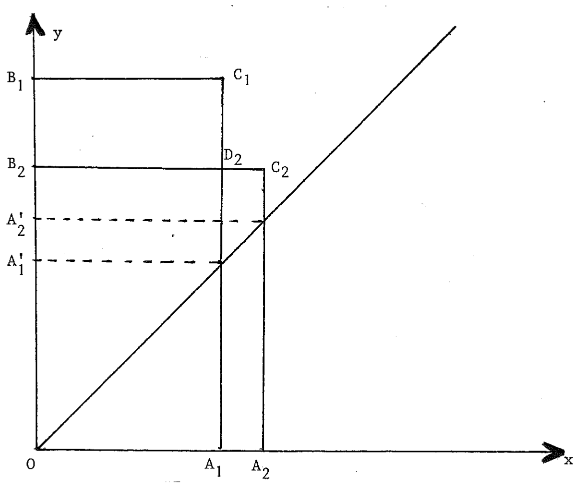
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

Ce qui suit permet alors d'améliorer rapidement cet encadrement.

Principe de l'exercice

Il s'agit d'encadrer le nombre $\sqrt{2}$ par des nombres décimaux ; le nombre $\sqrt{2}$ étant la mesure du côté d'un carré de surface 2, l'idée est de partir d'un rectangle "simple" de surface 2 — celui de longueur 2 et de largeur 1 — et de le transformer de façon que sa surface reste égale à 2 et qu'il "se rapproche" de plus en plus d'un carré ; nous obtiendrons ainsi, en considérant la longueur et la largeur de ces rectangles, un encadrement de plus en plus précis.

Soient 2 axes orthogonaux Ox et Oy ; O est un sommet fixe des rectangles considérés.



mes OA'_1 = mes OA_1

mes OA'_2 = mes OA_2

On pose : mes $OA_1 = a_1 (= 1)$; mes $OA_2 = a_2$

mes $OB_1 = b_1 (= 2)$; mes $OB_2 = b_2$

on a : $a_2 b_2 = a_1 b_1 = 2$; on choisit

$$b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ d'où } a_2 = \frac{4}{3} ;$$

on peut écrire :

$$1 < \frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} < 2 ,$$

puisque le carré cherché a son côté plus grand que la largeur du rectangle considéré et plus petit que la longueur du même rectangle.

On continue :

$$b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 1{,}416666 ; \; a_3 = \frac{2}{b_3} = 1{,}411764 ;$$

$b_4 = 1{,}414215$, $a_4 = 1{,}414211$: on a déjà encadré $\sqrt{2}$ à $\frac{4}{10^6}$ près.

On pourra continuer ainsi en définissant les suites de terme général.

$$b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{b_n}$$

On *constate* que l'on a

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \sqrt{2} < b_4 < b_3 < b_2 < b_1$;

cherchons à démontrer ces inégalités.

On part de $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, donc de $a_1 < b_1$. Comme $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, on a $b_2 < \frac{b_1 + b_1}{2}$, c'est-à-dire : $b_2 < b_1$; d'où : $\frac{2}{b_2} > \frac{2}{b_1}$, c'est-à-dire : $a_2 > a_1$.

A-t-on $a_2 < b_2$? Cette inégalité s'écrit : $\frac{2}{b_2} < b_2$, ou $2 < (b_2)^2$, soit encore :

$$2 < \left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right)^2 \quad \text{ou } 8 < (a_1 + b_1)^2$$

Ce qui s'écrit

$$8 < (a_1 - b_1)^2 + 4a_1 b_1$$

et, comme $4 a_1 b_1 = 8$, on est finalement ramené à $0 < (a_1 - b_1)^2$, ce qui est vrai.

[Il serait bon, dans un exercice antérieur, de démontrer et d'utiliser l'égalité $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$].

On peut alors remarquer que $a_2 < b_2$ entraînera $b_3 < b_2$, d'où $a_3 > a_2$, et que l'inégalité $a_3 < b_3$ se ramènera à

$$0 < (a_2 - b_2)^2$$

Et l'on pourra continuer ainsi aussi longtemps que l'on voudra (*on n'aura jamais l'égalité de* a_n et b_n : *les inégalités ci-dessus sont strictes ; d'ailleurs* $a_n = b_n$

signifierait $a_n = \sqrt{2}$ *ce qui est impossible car* a_n *est rationnel, comme on le voit "de proche en proche"* ; bien évidemment, l'utilisation implicite du raisonnement par récurrence ne pose ici aucun problème : n'utilise-t-on pas, par exemple, les nombres 10^n ou 10^{-n}...)

On a bien démontré :

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \sqrt{2} < b_4 < b_3 < b_2 < b_1$$

On peut démontrer ce résultat géométriquement.

Exercice 4 : *Etude de la différence* $b_n - a_n$

De $a_1 < a_2$ résulte $-a_2 < -a_1$; d'où l'inégalité

$$b_2 - a_2 < \frac{a_1 + b_1}{2} - a_1, \text{ d'où } b_2 - a_2 < \frac{b_1 - a_1}{2}$$

On a de même : $b_{n+1} - a_{n+1} < \dfrac{b_n - a_n}{2}$: en effet, l'inégalité $a_n < a_{n+1}$ implique

$$b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{b_n + a_n}{2} - a_n.$$

On a donc :

$$b_3 - a_3 < \frac{b_2 - a_2}{2} < \frac{b_1 - a_1}{2^2},$$

$$\text{puis } b_4 - a_4 < \frac{b_3 - a_3}{2} < \frac{b_1 - a_1}{2^3}, \text{ etc...}$$

On "voit" qu'au rang n on aura $b_n - a_n < \dfrac{1}{2^n}$, puisqu'ici $b_1 - a_1 = 1$.

En fait, on a beaucoup mieux :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{4}{a_n + b_n}$$

$$= \frac{(a_n + b_n)^2 - 8}{2(a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)^2 + 4a_n b_n - 8}{2(a_n + b_n)}$$

$$= \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} < \frac{(a_n - b_n)^2}{4}$$

puisque $a_n + b_n > 2$.

Ceci montre que le nombre de décimales exactes est au moins doublé à chaque pas, dès que $b_n - a_n$ est plus petit que $\dfrac{1}{10}$.

On peut donc rendre la différence $b_n - a_n$ "aussi petite que l'on veut" ; on dira que la différence $b_n - a_n$ "tend vers 0".

Il s'agit d'introduire ici de façon intuitive les expressions "aussi petite que l'on veut", "tend vers 0". Cela nous semble souhaitable ; la définition générale qui pourra intervenir en première — dans le cas des suites — serait alors préparée.

Conclusion

Puisque l'on a

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \sqrt{2} < b_n < \ldots < b_2 < b_1$$

on a : (faire un dessin)

$$0 < b_n - \sqrt{2} < b_n - a_n$$

$$0 < \sqrt{2} - a_n < b_n - a_n$$

Or nous avons vu que la différence $b_n - a_n$ peut être rendue "aussi petite que l'on veut" ; on dira que b_n et a_n "approchent d'aussi près que l'on veut le nombre $\sqrt{2}$" (b_n par valeurs supérieures, a_n par valeurs inférieures), ou encore que "la suite des a_n converge vers $\sqrt{2}$", "la suite des b_n converge vers $\sqrt{2}$".

On dira aussi que "$\sqrt{2}$ est la limite de la suite des nombres a_n" (ou aussi bien que "$\sqrt{2}$ est la limite de la suite des nombres b_n").

Il est bon que $\sqrt{2}$ apparaisse déjà comme limite de deux suites distinctes ! Il serait dangereux de ne considérer qu'une seule suite.

Exercice 5 :

Généralisation au calcul de $\sqrt{p}$, p réel positif. On étudie de la même manière les suites :

$$b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad a_n = \frac{p}{b_n}.$$

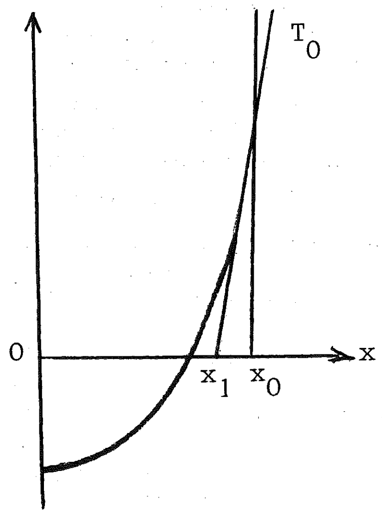
Remarque

La méthode d'approximation de Newton appliquée à la recherche des zéros de la fonction $f : x \mapsto x^2 - p$ aboutit au même algorithme. On obtient en effet (cf. figure ci-dessous) :

$$x_1 = \frac{1}{2x_0}(-x_0^2 + p) + x_0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{p}{x_0}\right);$$

La suite (x_n) ainsi définie de proche en proche n'est autre que la suite (b_n) ci-dessus.



Thème d'exercice : *Calcul de la racine cubique*

On interprète $\sqrt[3]{p}$ comme étant la longueur du côté d'un cube dont le volume est p.

Nous généralisons la méthode précédente en "transformant" un parallélépipède rectangle, à base carrée, en un cube.

Soit p un réel, qu'on supposera plus grand que 1 ; choisissons b_1 tel que $b_1^3 > p$.

On pose :

$$a_1 = \frac{p}{b_1^2}, \text{ puis}$$

$$b_2 = \frac{2b_1 + a_1}{3} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{p}{b_2^2} ;$$

de proche en proche on définit ainsi :

$$b_n = \frac{2\,b_{n-1} + a_{n-1}}{3} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{p}{b_n^2}.$$

On peut alors montrer que les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies vérifient les trois propriétés suivantes :

1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n < b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1 ;$$

2) $a_n^3 < p < b_n^3$;

3) $0 < b_n - a_n < \frac{2}{3}(b_{n-1} - a_{n-1})$

Il en résulte que l'on peut rendre "$b_n - a_n$ aussi petit que l'on veut" : on montre en effet que l'on a :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{n}.$$

On peut affiner ce résultat et démontrer ici encore que, à partir du moment où $b_n - a_n$ est inférieur à $\frac{1}{10}$, on double à chaque pas le nombre de décimales.

On admettra qu'il existe un réel unique x tel que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on ait : $a_n < x < b_n$; a_n et b_n sont donc des valeurs approchées (respectivement par défaut et par excès) de ce réel x.

Remarque

Il est clair qu'en classe l'exercice doit être traité avec une valeur numérique pour p.

Exemple : *Calcul de la racine cubique de* Π

INITIALISATION

2. STO 1

2.

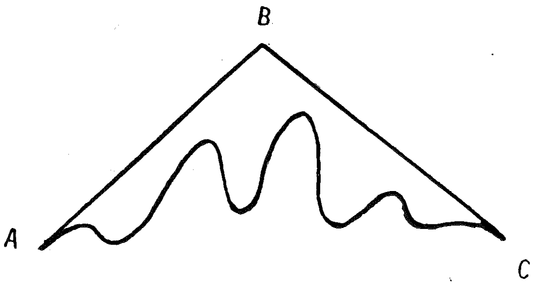
PROGRAMME sur TI 58 avec imprimante

						RESULTATS
000	33	X^2	010	01	01	.7853981634
001	35	1/X	011	95	=	1.595132721
002	65	x	012	55	÷	1.234685151
003	89	π	013	03	3	1.474983531
004	95	=	014	95	=	1.44402772
005	99	PRT	015	99	PRT	1.464664927
006	85	+	016	42	STO	1.464445819
007	02	2	017	01	01	1.464591891
008	65	x	018	81	RST	1.46459188
009	43	RCL				1.464591888

B. EXERCICES AYANT POUR OBJECTIF LE CALCUL APPROCHE DE Π

Ces exercices nécessitent l'utilisation d'une calculatrice de poche avec extraction de racine carrée. L'usage d'un rétroprojecteur peut être intéressant.

Les deux premiers exercices donnent un encadrement de π considéré soit comme l'aire d'un disque de rayon 1 (exercice 1), soit comme le périmètre d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ (exercice 2). Ces encadrements s'obtiennent en construisant dans les deux cas des suites de polygones convexes réguliers inscrits et circonscrits au cercle considéré ; le premier polygone sera par exemple un triangle équilatéral, ou un carré, et les suivants sont obtenus en doublant à chaque fois le nombre de côtés. Nous préférons commencer par calculer des valeurs approchées de l'aire du disque plutôt que des valeurs approchées du périmètre, car il est plus convaincant de considérer les surfaces polygonales : si D désigne le disque, P une surface polygonale inscrite et P′ une surface polygonale circonscrite, on a $P \subset D \subset P'$, d'où bien évidemment mes.P ⩽ mes.D ⩽ mes.P′ ; par contre, s'il est évident que le périmètre de toute ligne polygonale convexe inscrite est inférieur au périmètre du cercle, il n'est pas trivial que le périmètre d'une ligne polygonale convexe circonscrite est supérieur au périmètre du cercle : on sait bien que ce résultat est lié à la convexité du cercle.



Cependant, la méthode des aires est mal adaptée au calcul : on va démontrer, en effet, que si s_n désigne l'aire du $n^{ième}$ polygone inscrit, on a :

$$s_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{1-a_n^2}$$

(a_n : apothème du $n^{ième}$ polygone) ; or $u_n = \sqrt{1-a_n^2}$ tend rapidement vers 0, et la calculatrice l'arrondit à partir d'un certain rang, selon la marque, à 0 ou à 10^{-12} par exemple, et comme l'on multiplie u_n par 2^{n+1}, on obtient donc dans le premier cas une suite nulle à partir d'un certain rang, et dans le second une suite géométrique de raison 2. C'est pourquoi, l'exercice 2 reprend le calcul de π en utilisant, cette fois, les périmètres des polygones.

L'exercice 3 ne consiste plus à "approcher" un cercle fixe par des polygones inscrits et circonscrits de périmètre variable mais à considérer une suite de polygones convexes réguliers de périmètre fixe obtenus en doublant à chaque fois le nombre de côtés; à la "limite" on obtient la longueur du cercle.

EXERCICE I

CALCUL DE Π PAR LES AIRES DES POLYGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS

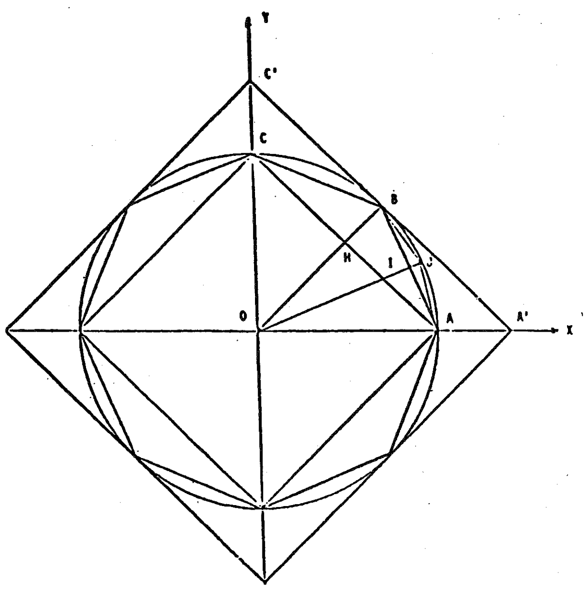
Nous utilisons la méthode classique des polygones réguliers convexes inscrits et circonscrits : nous commençons ici par des carrés inscrits et circonscrits, on peut demander aux élèves de reprendre l'exercice en commençant par des triangles équilatéraux.

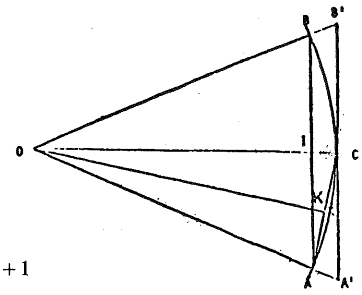
Le polygone circonscrit sera obtenu en construisant les tangentes parallèles aux côtés du polygone inscrit correspondant.

NOTATIONS

— Pour le $n^{ième}$ polygone inscrit :
mesure du côté : c_n
mesure de l'apothème : a_n
aire du polygone : s_n

— Pour le $n^{ième}$ polygone circonscrit :
mesure du côté : c'_n
mesure de l'apothème : 1
aire du polygone : S_n





mes $OI = a_n$
mes $OK = a_{n+1}$

On démontre aisément que :

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$$

$$s_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{1-a_n^2}$$

$$S_{n+1} = \frac{s_{n+1}}{a_{n+1}^2} = \frac{2s_{n+1}}{1+a_n}$$

Géométriquement, on voit que la suite des s_n croît : lorsque l'on passe de s_n à s_{n+1}, on remplace $2^{n+1}\times$(aire du triangle OAB) par $2^{n+2}\times$(aire du triangle OAJ), et $2\times$(aire du triangle OAJ) est manifestement plus grand que l'aire du triangle OAB. On peut également montrer géométriquement que la suite des S_n est décroissante, bien que ce soit moins facile ; on peut alors écrire :

$$s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_n < \pi < S_n \ldots S_3 < S_2 < S_1$$

PROGRAMME

000	43 RCL	Calcul de a_{n+1}
001	00 00	
002	85 +	
003	01 1	
004	95 =	
005	55 ÷	
006	02 2	
007	95 =	
008	34 $\sqrt{X}$	
009	42 STO	Calcul de s_{n+2}
010	00 00	
011	33 X^2	
012	94 +/-	
013	85 +	
014	01 1	
015	95 =	
016	34 $\sqrt{X}$	
017	65 x	
018	02 2	
019	45 Y^X	
020	43 RCL	
021	01 01	
022	95 =	
023	99 PRT	Calcul de S_{n+2}
024	65 x	
025	02 2	
026	95 =	
027	55 ÷	
028	53 (	
029	01 1	
030	85 +	
031	43 RCL	
032	00 00	
033	54)	
034	95 =	
035	99 PRT	n + 3
036	01 1	
037	44 SUM	
038	01 0	
039	81 RST	

INITIALISATION

Ce programme consiste en partant de a_n qui a été placé dans la mémoire 00 à calculer a_{n+1} (qui est stocké en 00 à la place de a_n), puis s_{n+2}, aire du polygone inscrit à 2^{n+2} côtés (n + 2 est stocké dans la mémoire 01). Au départ, on doit mettre $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, apothème du carré inscrit initial, dans la mémoire 00, et $n+2=1+2=3$ dans la mémoire 01.

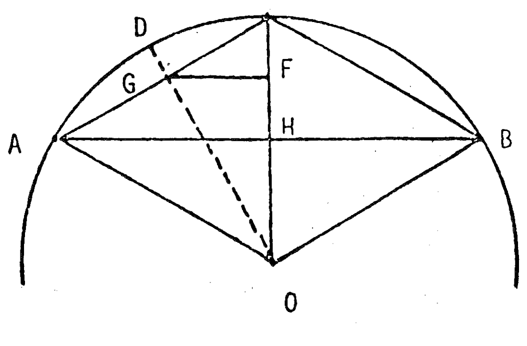
RESULTATS

	(suite)
3.06146746	3.14572800
3.18259788	3.14572800
3.12144515	3.16749800
3.15172491	3.16749800
3.13654849	3.23192829
3.14411839	3.23192829
3.14033116	3.31588846
3.14222363	3.31588846
3.14127725	4.19430400
3.14175037	4.19430400
3.14151381	5.93164160
3.14163209	5.93164160
3.14157301	11.86328320
3.14160258	11.86328320
3.14158794	23.72656641
3.14159533	23.72656641
3.14159262	47.45310281
3.14159446	47.45313281
3.14159729	94.90626562
3.14159775	94.90626562
3.14160797	189.8125312
3.14160808	189.8125312
3.14162933	379.6250625
3.14162936	379.6250625
3.14197109	759.2501250
3.14197110	759.2501250
3.14299615	1518.500250
3.14299615	1518.500250

EXERCICE II

CALCUL DE Π PAR LES PÉRIMÈTRES DES POLYGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS

Le périmètre d'un cercle de rayon r étant $2\pi r$, pour encadrer π on va donc encadrer le périmètre d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$.



Notons :

a_n = mes. OH (OH : apothème du $n^{\text{ième}}$ polygone inscrit) ;

a_{n+1} = mes. OG (OG : apothème du $(n+1)^{\text{ème}}$ polygone inscrit) ;

r = le rayon du cercle ;

p_n (resp. p'_n) = le périmètre du $n^{\text{ième}}$ polygone inscrit (resp. circonscrit).

Les polygones circonscrits se déduisent des polygones inscrits par homothétie de centre 0 et de rapport :

— au rang n : $\frac{r}{a_n}$ d'où $\frac{p_n}{p'_n} = \frac{a_n}{r}$ (1) ;

— au rang n + 1 : $\frac{r}{a_{n+1}}$ d'où $\frac{p_{n+1}}{p'_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{r}$ (2).

Les angles $\widehat{GOC}$ et $\widehat{HAC}$ sont égaux : en effet, on a : mes. $\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}$ mes. $\overset{\frown}{BC}$; d'où $\cos \widehat{GOC} = \cos \widehat{HAC}$

ou $\frac{\text{mes. OG}}{\text{mes. OC}} = \frac{\text{mes. AH}}{\text{mes. AC}}$,

c'est-à-dire : $\frac{a_{n+1}}{r} = \frac{\frac{1}{2}c_n}{c_{n+1}}$

ou encore $\frac{a_{n+1}}{r} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$

puisque le $(n+1)^{\text{ème}}$ polygone a deux fois plus de côtés que le $n^{\text{ième}}$.

Or $\frac{a_{n+1}}{r} = \frac{p_{n+1}}{p'_{n+1}}$ d'après (2),

d'où $\frac{p_{n+1}}{p'_{n+1}} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$ et finalement

$$\boxed{p^2_{n+1} = p_n\, p'_{n+1}} \qquad (3)$$

Considérons le triangle OGC :

$$(\text{mes. OG})^2 = (\text{mes. OF})(\text{mes. OC}) = \frac{\text{mes. OH} + \text{mes. OC}}{2} \,.\, \text{mes. OC}$$

c'est-à-dire $a^2_{n+1} = \frac{a_n + r}{2} . r$;

d'après (1) et (2) :

$$r^2 \left(\frac{p_{n+1}}{p'_{n+1}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{rp_n}{p'_n} + r\right) r = \frac{p_n + p'_n}{2p'_n} r^2$$

$$p'_{n+1}{}^2 = \frac{2p'_n}{p_n + p'_n} \,.\, p^2_{n+1} \qquad \text{d'où d'après (3) :}$$

$$p'_{n+1}{}^2 = \frac{2p'_n}{p_n + p'_n} \,.\, p_n \,.\, p'_{n+1}$$

donc $$\boxed{p'_{n+1} = \frac{2p_n p'_n}{p_n + p'_n}}$$

On constate que ces relations sont indépendantes du rayon du cercle. Il suffira d'étudier sur la T.I. 58 la suite (u_n) définie comme suit

$$\frac{2}{u_{2n}} = \frac{1}{u_{2n-2}} + \frac{1}{u_{2n-1}} \text{ et } u_{2n+1} = \sqrt{u_{2n-1}\, u_{2n}}$$

PROGRAMME SUR T.I. 58

```
000   43 RCL
001   00 00
002   35 1/X
003   85 +
004   43 RCL
005   01 01
006   35 1/X
007   95 =
008   35 1/X
009   65 x
010   02 2
011   95 =
012   99 PRT
013   42 STO
014   00 00
015   65 x
016   43 RCL
017   01 01
018   95 =
019   34 √X
020   99 PRT
021   42 STO
022   01 01
023   81 RST
```

RESULTATS

3.31370850
3.06146746
3.18259788
3.12144515
3.15172491
3.13654849
3.14411839
3.14033116
3.14222363
3.14127725
3.14175037
3.14151380
3.14163208
3.14157294
3.14160251
3.14158773
3.14159512
3.14159142
3.14159237
3.14159235
3.14159281
3.14159258
3.14159269
3.14159263
3.14159266
3.14159265
3.14159266
3.14159265 stabilisation
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265

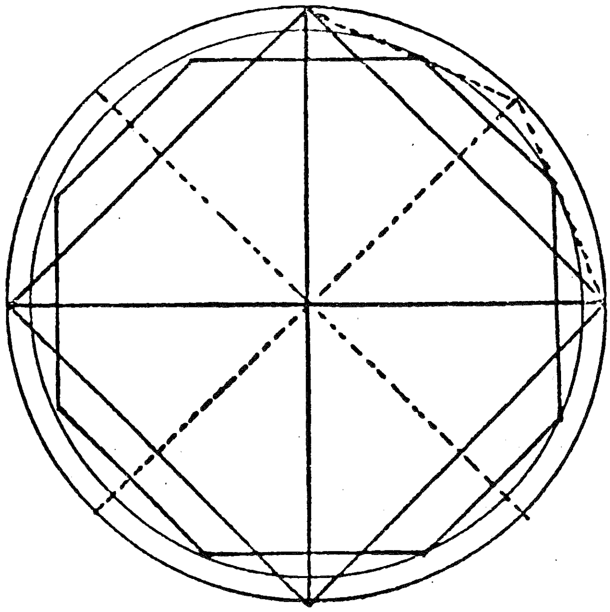
INITIALISATION

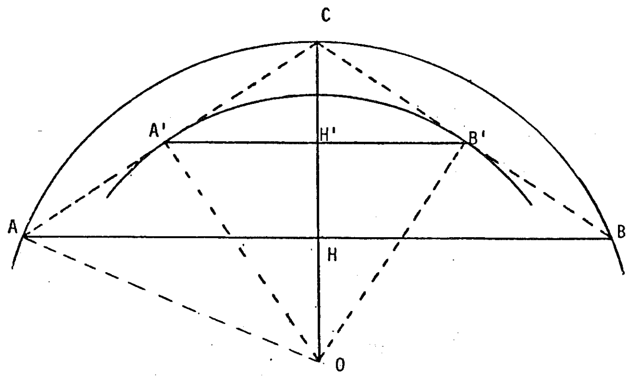
On met p'_n dans la mémoire 00
p_n dans la mémoire 01

Au rang 0 on a : $p'_0 = 4$; $p_0 = 2\sqrt{2}$ (4 est le périmètre du carré circonscrit au cercle de rayon $\frac{1}{2}$, $2\sqrt{2}$ est le périmètre du carré inscrit).

EXERCICE III
METHODE DES ISOPERIMETRES
(suite de Nicolas de Cusa)

Cette suite permet d'encadrer $\frac{2}{\pi}$ donc π. A partir d'un polygone régulier convexe à n côtés, on construit un polygone à 2n côtés de même périmètre (voir figure). Si le polygone de départ est un carré de côté 1, donc de périmètre 4, on aboutit à la limite en réitérant la construction précédente à un cercle de même périmètre 4 et donc de rayon $\frac{2}{\pi}$.





mes. AB $= c_n$ mes. A'B' $= c_{n+1}$
mes. OH $= a_n$ mes. OH' $= a_{n+1}$
mes. OA $= r_n$ mes. OA' $= r_{n+1}$

Soit a_n la mesure de l'apothème, c_n la mesure du côté et r_n le rayon du cercle circonscrit au $n^{\text{ième}}$ polygone construit ; ce polygone, si celui de départ est un carré, a donc 2^{n+1} côtés.

AB étant le côté du $n^{ième}$ polygone et O son centre, la droite perpendiculaire à la droite AB issue de O coupe la droite AB en H et l'arc AB en C :

$$\text{mes. } OH = a_n \text{ et mes. } OC = r_n$$

Soit A' et B' les milieux respectifs des cordes AC et BC , A'B' est parallèle à AB et

$$\text{mes. } A'B' = \frac{1}{2} \text{ mes. } AB,$$

de plus : mes $\widehat{A'OB'} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$, donc A'B' est un côté du $(n+1)^{ème}$ polygone, le point O est également le centre de ce polygone.

H' est le milieu de CH d'où :

$$\text{mes. } OH' = \frac{1}{2} (\text{mes. } OH + \text{mes. } OC)$$

soit : $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + r_n)$;

enfin le triangle OA'C étant rectangle :

$$(\text{mes. } OA')^2 = \text{mes. } OH' . \text{ mes. } OC$$

c'est-à-dire : $r^2_{n+1} = r_n a_{n+1}$

Il est alors aisé de démontrer que les suites a_n et r_n sont adjacentes. En effet $a_n < r_n$ implique :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + r_n}{2} > \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

donc (a_n) est croissante;

de même : $a_{n+1} = \frac{a_n + r_n}{2} < \frac{r_n + r_n}{2} = r_n$, d'où

$$r^2_{n+1} = a_{n+1} . r_n < r^2_n$$

donc (r_n) est décroissante.

On peut de plus majorer $r_n - a_n$, dans le triangle OHA on a :

$$\text{mes. } OA - \text{mes.} OH < \text{mes. } AH$$

c'est-à-dire $r_n - a_n < \frac{c_n}{2}$

comme le $n^{ième}$ polygone a 2^{n+1} côtés (si le 1er est un carré) et que son périmètre est 2 :

$$c_n = \frac{2}{2^{n+1}} \text{ , donc :}$$

$$r_n - a_n < \frac{1}{2^{n+1}}$$

On a donc bien démontré que les suites (a_n) et (r_n) convergent vers une même limite qu'elles encadrent. Or le cercle de rayon r_n est un cercle circonscrit au $n^{ème}$ polygone, son périmètre est donc plus grand que celui du polygone, soit 4 :

$$2\pi r_n > 4 \text{ ;}$$

le cercle de rayon a_n est inscrit dans ce même polygone d'où

$$2\pi a_n < 4 \text{ .}$$

$$\text{donc : } \quad 2\pi a_n < 4 < 2\pi r_n \text{ ,}$$

$$a_n < \frac{4}{2\pi} < r_n \text{ .}$$

La limite commune des suites (a_n) et (r_n) est donc : $\frac{2}{\pi}$.

PROGRAMME sur TI 58		RESULTATS	
000	43 RCL	3.31370850	
001	00 00	3.06146746	
002	85 +	3.18259788	
003	43 RCL	3.12144515	
004	01 01	3.15172491	
005	95 =	3.13654849	
006	55 ÷	3.14411839	
007	02 2	3.14033116	
008	95 =	3.14222363	
009	42 STO	3.14127725	
010	00 00	3.14175037	
011	35 1/X	3.14151380	
012	65 x	3.14163208	
013	02 2	3.14157294	
014	95 =	3.14160251	
015	99 PRT	3.14158773	
016	43 RCL	3.14159512	
017	00 00	3.14159142	
018	65 x	3.14159327	
019	43 RCL	3.14159235	
020	01 01	3.14159281	
021	95 =	3.14159258	
022	34 $\sqrt{X}$	3.14159269	
023	42 STO	3.14159263	
024	01 01	3.14159266	
025	35 1/X	3.14159265	
026	65 x	3.14159266	
027	02 2	3.14159265	stabilisation
028	95 =	3.14159265	
029	99 PRT	3.14159265	
030	81 RST	3.14159265	
		3.14159265	
		3.14159265	
		3.14159265	
		3.14159265	
		3.14159265	
		3.14159265	
		3.14159265	
		3.14159265	
		3.14159265	
		3.14159265	

VALEUR DE Π AFFICHEE PAR LA MACHINE

3.14159265

INITIALISATION

On met a_n dans la mémoire 00
r_n dans la mémoire 01

si l'on part du carré de côté 1 on a $a_0 = 0,5$ et $r_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

on met donc 0,5 dans la mémoire 00 et $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dans la mémoire 01.

Les arrondis de la machine "s'arrangent bien" et l'on trouve la valeur π utilisée par la machine.

On peut constater que les résultats obtenus par la méthode des isopérimètres sont identiques à ceux obtenus par la méthode des périmètres des polygones inscrits et circonscrits au cercle de rayon $\frac{1}{2}$. Ce résultat était prévisible. En effet, si l'on part dans les 2 cas d'un carré, les $n^{\text{ième}}$ polygones construits ont tous deux 2^{n+1} côtés, et sont donc semblables. Les termes de rang impair correspondent dans le cas des périmètres au périmètre p'_n du polygone circonscrit et dans le cas des isopérimètres à $\frac{2}{a_n}$, a_n désignant l'apothème du $n^{\text{ième}}$ polygone ; le rapport de leur périmètres est égal au rapport de leurs apothèmes :

$$\frac{p'_n}{2} = \frac{1}{a_n}, \text{ d'où } p'_n = \frac{2}{a_n}.$$

Les termes d'indices impairs sont donc égaux.

De même, en écrivant pour les termes de rang pair le rapport des périmètres et le rapport des rayons, on obtient :

$$\frac{p_n}{2} = \frac{1}{r_n}, \text{ d'où } p_n = \frac{2}{r_n} :$$

les termes d'indices pairs sont égaux aussi.

On pourra également étudier en classe de première ou terminale d'autres suites convergeant vers π, mais donnant de mauvais résultats. L'étude de telles suites est très utile pour faire sentir la nécessité d'une formalisation de la notion de convergence.

Parmi les nombreux exemples possibles (cf. : Mathematical Analysis, par L.A. Lyusternik et A.R. Yanpol'skii - Pergamon Press - P 305), citons entre autres :

La suite de Viète

$\pi = \lim_{n \to +\infty} 2^{n-1} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$ en partant du fait que $\sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$

(avec n chiffres 2)

On pourra faire la démonstration de la convergence et montrer avec une calculatrice que cette suite ne donne pas une bonne approximation de π. (Suivant le type de calculatrice, on obtient à partir d'un certain rang, soit une suite constamment nulle, soit une suite géométrique divergente; en effet

$\lim_{n \to +\infty} 2^{n-1} = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} = 0$)

Le calcul de π par le développement de Arctg 1

$\Pi = 4 \text{ Arctg } 1$

$\text{Arctg } 1 = 1 - \frac{1}{3} + \ldots \frac{(-1)^n}{2_{n+1}} + \ldots$

Cette suite donne également de très mauvais résultats.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A la poursuite des réels, par Annie Michel et Pierre Tison, Publication de l'IREM de Lille (1979-1980)

[2] Numéro Spécial Π, supplément au Petit Archimède n° 64-65 ADCS 61 rue St Fuscien 80000 Amiens (Mai 1980)

[3] Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique, par A. Engel, adapté par D. Reisz (Cedic, 1979)

[4] Quelques applications des mathématiques par N. Vilenkine, G. Chilov, V. Ouspenski, J. Lioubitch et L. Chor, Editions de Moscou, 1975 (Collection "Initiation aux mathématiques")

[5] Même Collection que [4] : trois textes : A. Kurosh, Equations algébriques de degré quelconque ; G. Chilov, Analyse mathématique dans la classe des fonctions rationnelles et V. Boltienski, Qu'est-ce que la dérivation ? (Editions de Moscou, 1974).

[6] Même Collection que [4] : Quatre cours de Mathématiques, par A. Markouchévitch (Editions de Moscou, 1973)

[7] Même Collection que [4] : Caractères de divisibilité, suite de Fibonacci, par N. Norobiev (Editions de Moscou, 1973)

[8] Activités en Analyse : majorer, minorer, encadrer, par M. Viallard, IREM de Rennes (1980)

[9] The Historical Development of the Calculus, par C.H. Edwards, Springer-Verlag (1979)

[10] A first Course in Calculus, par S. Lang, Addison-Wesley Pub. Comp, 4e édition (1979)

[11] Fundamental Concepts of Mathematics, par R.L. Goodstein, Pergamon Press, seconde édition (1964)

[12] Mathematical Analysis, par L.A. Lyusternik et A.R. Yanpol'skii, Pergamon Press (1965).