N° XX

BULLETIN INTER IREM

Enseignement de l'Analyse

Directeur de la publication : J.M. BRAEMER
Secrétariat d'édition : Pascal Monsellier
Imprimerie Vaudrey — 74, avenue Jean-Jaurès — 69007 LYON

HUITIEME ANNEE — Décembre 1981
Edité par l'IREM de Lyon - Prix : 10 F

ISSN 0338 7 135
Bulletin Inter-IREM

GIL

SOMMAIRE

1^re PARTIE : INTRODUCTION

Pour une nouvelle approche de l'enseignement de l'analyse .... p. 3
Daniel LAZET (IREM de Bordeaux)
Jean-Louis OVAERT (IREM de Marseille)

2^e PARTIE : QUELQUES MORCEAUX CHOISIS

I. Exemples d'approximations de nombres réels par des suites .... p. 9
Annie MICHEL et Pierre TISON (IREM de Lille)

II. Approximation des nombres réels par des suites :
recherche de solutions approchées d'équations numériques .... p. 18
Jean-Louis OVAERT (IREM de Marseille)

III. Majorer - Minorer - Encadrer .... p. 30
Michel VIALLARD (IREM de Rennes)

IV. Calcul intégral et mesure des grandeurs .... p. 33
IREM de Lyon

V. Interpolation et approximation de fonctions .... p. 38
Daniel REISZ (IREM de Dijon)

3^e PARTIE : ACTIVITES ET PUBLICATIONS DES GROUPES DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

1. Activités des groupes IREM participant au groupe Inter-IREM d'analyse ..... p. 47
2. Publications des groupes Inter-IREM d'analyse .... p. 48
3. Quelques publications centrées sur l'usage des calculatrices .... p. 52

4^e PARTIE : BIBLIOGRAPHIE GENERALE .... p. 53

5^e PARTIE : BIBLIOGRAPHIE SECTORIELLE

A. Liste de quelques grands problèmes de l'analyse .... p. 58
Jean-Louis OVAERT et R. ROLLAND

B. Analyse détaillée des thèmes 1, 2 et 10 .... p. 61
Jean-Louis OVAERT et R. ROLLAND

C. Quelques livres .... p. 66

"Le dessin de la couverture est fait par Gilles THOMAS
d'après le frontispice du Leogarithmorum
Canonis descriptio de Neper (1614)."

1re PARTIE : INTRODUCTION

POUR UNE NOUVELLE APPROCHE DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

(Daniel LAZET, IREM de Bordeaux et Jean-Louis OVAERT, IREM de Marseille)

Enseignant les mathématiques, nous avons bien des raisons pour faire aujourd'hui notre auto-critique. Le constat des effets de notre enseignement n'est guère satisfaisant. Notre but n'est pas ici de dresser la liste des contraintes extérieures, des pesanteurs socio-culturelles, ou des "modes" qui nous ont abusés (de bon ou de mauvais gré). Mais de voir, dans le domaine de l'analyse, par où le système pèche, et de proposer une nouvelle approche des concepts et des problèmes d'analyse, en se rappelant toujours que, selon la définition de A. Krygowska, "l'éducation mathématique n'est rien d'autre que le développement de l'activité mathématique, et il n'y a pas d'activités sans problèmes".

*

* *

A) QUELQUES CONSTATATIONS

1. Il est couramment admis que le raisonnement mathématique a des effets bénéfiques dans la formation d'un jeune esprit. La plupart des secteurs scientifiques (et même de nombreux secteurs non scientifiques) font chaque jour davantage appel aux mathématiques. Et, dans cette action pluridisciplinaire des mathématiques, l'analyse joue un grand rôle. Il est donc souhaitable qu'au sortir du lycée nos élèves aient acquis en analyse les bases d'un savoir efficace (c'est-à-dire engendrant un savoir faire). En outre, les problèmes de l'analyse constituent un excellent terrain didactique pour l'activité mathématique des élèves et sont susceptibles d'intéresser l'ensemble des élèves. C'est pourquoi il convient d'accorder une place importante à l'enseignement de l'analyse tout au long du second cycle.

2. A cette fin les méthodes, encore plus que les contenus, sont à modifier. Il ne s'agit pas d'enseigner un vocabulaire, mais des idées — ou mieux, de créer autant que possible des conditions propices à l'appropriation progressive de ces idées par l'élève. Les défauts majeurs de la situation actuelle nous paraissent être :

— l'introduction des notions de base sans problématique sous-jacente, ou avec une problématique très élaborée mathématiquement mais trop éloignée de l'intérêt de l'élève et de ses possibilités de compréhension (cf. : la continuité ou la différentiabilité telles qu'elles sont présentées dans certains livres, ou encore l'intégration, les fonctions trigonométriques...).

— l'emploi dès l'abord d'un langage trop formalisé et souvent hermétique qui réduit l'activité mathématique à des acrobaties gratuites, voire factices, sur les symboles.

— un enseignement qui se ramène trop souvent à un discours du maître, bien au point, présentant les mathématiques comme un monde clos que, tel un objet d'art, on propose à l'admiration béate des élèves.

L'enseignant donne alors l'impression de trouver sa récompense quand l'élève parvient à reproduire — tel quel — ce discours ésotérique.

— une construction linéaire des concepts, bien hiérarchisée, n'amenant (et pas toujours) qu'en fin de construction des algorithmes et des méthodes opératoires. Les applications intéressantes arrivent trop tard, voire jamais, et les notions ne sont pas perçues dès l'abord comme étant efficaces pour la résolution des problèmes, les problèmes posés n'ayant en outre que trop rarement un caractère quantitatif.

— un intérêt parfois trop précoce pour le pathologique, alors que le normal et l'usuel ne sont pas assimilés ou suffisamment manipulés (la recherche d'un contre-exemple a une valeur didactique, mais sûrement pas le contre-exemple donné d'entrée de jeu et sans problématique).

*

* *

B) UNE LIGNE DIRECTRICE

Face à ces écueils une démarche sans doute plus fructueuse nous est suggérée par l'histoire même de la pensée mathématique. Bien peu de théories mathématiques ont été élaborées en partant des fondements et en allant vers les applications ou les procédures algorithmiques. La plupart des concepts ont mûri petit à petit, par des usages répétés dans des situations diverses. Une longue pratique est souvent nécessaire avant que les différents aspects d'un concept se clarifient.

— C'est pourquoi il nous faut organiser l'enseignement de l'analyse autour de quelques *grands problèmes* conduisant à des *situations riches* et *liées aux autres disciplines*. Par exemple :

- construction et interprétation de graphiques
- recherche d'approximations de nombres ou de fonctions
- recherche de maximums et de minimums issus de problèmes d'optimatisation simples
- résolution d'équations numériques (recherche de solutions exactes, de solutions approchées)
- étude du comportement de systèmes dynamiques discrets, c'est-à-dire de systèmes mathématiques, physiques, biologiques, économiques et sociaux dont l'évolution est décrite par une suite (u_n) de nombres (ou plus généralement par des suites de nombres).

— Pour contribuer efficacement à la formation scientifique, le choix des problèmes à étudier et des concepts qui leur sont liés, ainsi que celui des stratégies didactiques, doivent conduire à des activités mathématiques permettant notamment de développer les capacités suivantes : analyser une situation, en dégager des hypothèses théoriques, élaborer et mettre en œuvre des concepts propres à l'étudier, préciser les moyens expérimentaux propres à contrôler les hypothèses précédentes, analyser les résultats obtenus au regard des problèmes posés, et analyser la pertinence des moyens théoriques et expérimentaux ainsi construits.

— Dans ce but les dialectiques suivantes jouent un rôle essentiel :

- acquisition de connaissances et analyse de la pertinence de ces connaissances
- maîtrise de l'acquis (entraînement, mémorisation) et exploration de nouveaux problèmes ou concepts (débroussaillage, conjectures)
- approfondissement des exemples et approfondissement de la généralité
- conjectures et démonstrations
- stratégie de démonstration et rédaction de ces démonstrations
- construction d'objets complexes à partir d'objets simples et décomposition d'objets complexes en objets simples
- construction de méthodes variées d'attaque d'un problème ou d'un concept et analyse comparative de leurs performances.

— Les comparaisons entre problèmes voisins, les remarques sur plusieurs séries de résultats ou sur les qualités de certaines procédures permettent de créer des conditions favorables, sinon à la découverte d'une notion mathématique, du moins à une meilleure saisie de cette notion et de ses champs d'intervention. En outre, dans ce cheminement il ne faut conceptualiser que ce qui demande à l'être au fur et à mesure des besoins. L'étude des structures n'est pas une fin en soi, elle doit être au service d'une maîtrise plus efficace de problèmes compliqués.

A travers l'enseignement de l'analyse, on doit s'efforcer avant tout de mettre l'élève en état de "comprendre les idées essentielles préalablement à toute formalisation". Maîtriser un concept ce n'est pas seulement en connaître la définition formelle et les théorèmes qui l'accompagnent, c'est aussi être capable de le faire fonctionner, de le faire agir et réagir en liaison avec d'autres concepts dans la recherche de solutions à des problèmes issus de situations variées.

Bref, nous souhaitons que l'enseignement de l'analyse soit centré autour *d'activités significatives* de résolution de problèmes, et que dans cette démarche on situe théorisation et axiomatisation à leur juste place. Il faut amener l'élève à *agir*, à construire lui même son univers mathématique — certes en toute modestie — mais au contact des grands problèmes des sciences mathématiques.

*

* *

C) PROPOSITIONS

1) Objectif général :

L'essentiel de l'activité mathématique, comme de presque toutes les activités scientifiques, consiste à déceler, poser, résoudre des problèmes, et à repenser les termes de chaque problème à la lumière des outils forgés. L'approfondissement des problèmes et l'élargissement du champ théorique sont en rapport dialectique.

Au niveau de l'enseignement une insistance trop exclusive sur les théories (les résolutions de problèmes n'apparaissant que comme des sous-produits) ne correspond le plus souvent qu'à un discours du maître ; elle révèle une tendance dogmatique ou idéaliste. A l'opposé une étude peu structurée portant sur des problèmes épars, même chargés d'une certaine valeur esthétique ou ludique, ne permet pas à l'élève d'organiser une synthèse de ses connaissances ; il s'agit là d'une tendance empiriste.

On n'échappe pas à ce dilemme en oscillant d'une tendance à l'autre, ou même en pondérant convenablement les deux bras de la balance. Il convient plutôt d'analyser, pour chaque secteur, le type de fonctionnement entre problèmes et théories. De dresser, pour chaque niveau d'enseignement, la liste des *grands problèmes* d'analyse à étudier, des *théories* qui leur sont liées, et de suggérer une *problématique didactique* engageant les élèves de manière directe et favorisant la communication à l'intérieur de la classe.

2) La continuité dans le choix des activités

A tous les niveaux, l'activité mathématique doit se construire à partir des acquis et des non-acquis des classes précédentes. Ses caractéristiques principales sont :

a) ***Consolider et approfondir les acquis antérieurs.*** Il convient ici d'éviter deux pièges opposés : "la révision" sans approfondissement qui engendre l'ennui, et des sauts trop importants dans la complexité des problèmes étudiés qui engendrent l'incompréhension et le découragement.

On peut suggérer d'introduire des thèmes mathématiques ou interdisciplinaires nouveaux susceptibles d'intéresser les élèves. Par exemple, en classe de seconde, il est indispensable de consolider la pratique du calcul algébrique et des inégalités, mais, dans ce but, au lieu de multiplier en début d'année des exercices de style rébarbatif, on peut intégrer ces activités à l'étude de séries statistiques et de phénomènes décrits par des suites, puis à l'étude de fonctions.

On peut aussi utiliser à tous les niveaux, des thèmes fructueux tels que la recherche de solutions approchées d'équations, l'étude de lignes de niveau de diverses fonctions, les problèmes d'optimisation....

b) ***Elargir le champ des concepts et des problèmes étudiés.*** Ici encore il convient de partir de situations riches.

— à partir desquelles on dégage progressivement les concepts, à l'opposé de l'étude de structures pauvres imposées arbitrairement.

— dont on élargit petit à petit la complexité et la généralité, à l'opposé de l'étude a priori de notions très générales et abstraites (telles que suites, fonctions continues, fonctions dérivables, intégrales...)

A chaque niveau l'étude d'un champ donné peut s'accompagner :

— d'une délimitation d'un domaine explicite où certaines propriétés fonctionnent (ainsi la résolution d'équations numériques par approximations successives amène à s'intéresser au domaine des fonctions lipschitziennes contractantes, et plus particulièrement au sous-domaine des fonctions f de classe C^1 telles que $|f'| \leqslant k < 1$)

— d'une délimitation du champ étudié au sein d'un ou plusieurs champs plus vastes déjà précisés lors de l'étude d'autres questions.

— d'une exploration de quelques phénomènes simples mettant en défaut les propriétés étudiées, sans tomber dans l'étude systématique de pathologies complexes dépourvues d'impact sur le champ des problèmes posés.

Exemple : Pour les suites et les fonctions, il est nécessaire que l'élève saisisse la généralité de ces concepts : les nombres, les suites, les fonctions ne sont pas forcément définis par des formules. Lors d'une première approche de la convergence des suites, il convient de donner des exemples variés de suites divergentes, et, parmi celles-ci, de délimiter la divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$. Des exemples simples de divergence par oscillation sont indispensables. En revanche la construction systématique de suites très chaotiques est prématurée à ce niveau. Parmi les suites convergeant vers zéro, on peut délimiter celles dont la convergence est géométrique (c'est-à-dire de type k^n) ou d'ordre 2 (c'est-à-dire du type k^{2^n})... De même l'étude du concept de continuité est indissociable de l'exploration de celui de discontinuité via quelques exemples simples, la notion de fonction continue par morceaux se révélant importante en particulier pour l'intégration. L'étude des fonctions réciproques amène à délimiter le champ des fonctions continues strictement monotones dans celui des fonctions continues.

L'étude suivie et reprise, tout au cours de la scolarité, de quelques grands problèmes doit jouer un rôle central dans l'élargissement du champ des concepts et la maîtrise de ceux-ci. Ces problèmes permettent la mise en place de stratégies didactiques graduelles qui s'imposent lorsque la construction des concepts présente des obstacles épistémologiques importants (limites, calcul différentiel ou intégral).

c) ***Les ruptures*** par rapport aux pratiques antérieures doivent être soigneusement motivées, et il faut évaluer les conséquences du nouveau point de vue adopté par rapport aux problèmes posés. Il peut s'agir de nouveaux modes d'approche des concepts ou de nouvelles méthodes d'attaque des problèmes.

Exemple : Des comparaisons de suites à quelques suites simples de référence permettent une étude solide de problèmes mettant en jeu le comportement asymptotique des suites, sans faire appel au concept délicat de convergence. Ultérieurement l'étude de questions *qualitatives* (existence de solutions d'équations, comportement asymptotique de systèmes dynamiques) nécessite la mise en place du concept de convergence. Elle permet de préciser la portée de ce concept et de le situer par rapport aux concepts *quantitatifs* de rapidité de convergence et de performance.

3) Le choix et l'organisation des activités

a) ***Critères de choix des contenus.***

Le choix des contenus à aborder doit être fonction de trois conditions :

- le thème est-il important pour la formation scientifique et la compréhension des faits sociaux, économiques et culturels ?
- le thème fournit-il un bon terrain pour l'approfondissement théorique ou expérimental ?
- le thème est-il susceptible au niveau considéré, d'intéresser l'ensemble des élèves et de fournir un champ pour l'activité mathématique des élèves ? (Et pas seulement pour un discours du professeur suivi de quelques exercices factices).

b) ***Le travail de la classe doit se modifier.***

Le professeur doit organiser son enseignement de telle sorte que les objectifs des différentes séquences et des activités de résolution de problèmes soient clairement perçus par les élèves. Cela suppose notamment :

— *une profonde mutation dans la façon d'aborder les concepts.* Leur construction devant s'appuyer sur une problématique basée sur l'étude de quelques grands problèmes. Un exposé des définitions et des résultats, précédé de vagues introductions, et suivi de quelques exercices d'entraînement, ne saurait tenir lieu d'une telle problématique.

— *une profonde mutation dans la façon de présenter les exercices et les problèmes.* Les objectifs et les idées gouvernant la stratégie de résolution doivent apparaître clairement dans l'énoncé, une grande latitude étant laissée à l'élève pour la mise en œuvre. Il s'agit, en particulier, d'éviter les énoncés "techniques" en n questions du type "montrer que..." où l'on cache presque délibérément les idées clefs.

c) *Le qualitatif et le quantitatif.*

Les grands problèmes et les concepts comportent à la fois un aspect qualitatif et un aspect quantitatif. L'approfondissement de ces deux aspects doit aller de pair. Les activités numériques, la recherche et l'exploitation d'algorithmes sont pédagogiquement très efficaces.

Dans cette perspective l'usage des *calculatrices* (et éventuellement des microordinateurs) sera précieux à plusieurs titres :

— psychologiquement : l'instrument aiguise l'intérêt de l'élève, introduit du concret, de l'expérimental.

— techniquement : pour avoir une série de résultats propice à des remarques judicieuses, des calculs longs et fastidieux sont souvent nécessaires. La machine détruit cet aspect rebutant.

— pédagogiquement : en analyse le qualitatif ne peut en général être bien compris qu'à travers une pratique suffisante du quantitatif.

— culturellement : le futur citoyen sera moins impuissant devant l'invasion des ordinateurs, ces objets ne lui étant plus mystérieux.

d) *Les références culturelles et historiques.*

Chaque fois qu'il est possible on doit s'attacher à situer l'étude d'un concept ou d'un grand problème dans un *contexte culturel,* à introduire dans l'enseignement *une perspective historique* (ce qui ne signifie pas bien sûr que l'enseignement d'un concept reproduise obligatoirement les étapes historiques de sa construction), et à donner des *références bibliographiques* (et même biographiques).

e) Le rôle des concepts dans l'activité en analyse.

— *fonctionnement et statut des concepts :*

Le fonctionnement des concepts recouvre à la fois les modes d'organisation des concepts du secteur considéré, les modes d'interaction de ces concepts avec les concepts d'un autre secteur scientifique.

Le statut théorique des concepts recouvre les diverses méthodes d'intégration de ces concepts au savoir mathématique déjà constitué. Un des *écueils* majeurs à éviter est que les questions de statut soient considérées comme des *préalables* obligatoires à toute activité concernant un concept donné. *Par exemple* : on peut proposer en classe de seconde des travaux autour de la notion de suite, sans qu'une théorie générale des suites ait été faite. Il en est de même pour les fonctions trigonométriques. Ou encore, en classe de première, pour les intégrales, les polynômes, les fractions rationnelles.

— *priorité aux concepts "dynamiques" :*

Il est souhaitable de privilégier autant que possible les processus "dynamiques" plutôt que les définitions "statiques", en général inefficaces pour la résolution de problèmes.

Exemples : simplification d'un problème d'analyse par l'emploi de *transformations*

comment *classer* et *organiser* des données numériques

comment *rendre* injective, surjective, bijective une fonction ($x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sin x$)

interprétations *cinématiques* (dérivées, accroissements finis)

comment *optimiser* une quantité (maximums, minimums, améliorations d'inégalités)

étude du *comportement asymptotique* de systèmes discrets ou continus.

— *Marquer des étapes dans l'acquisition d'un concept :*

Pour chaque concept on peut distinguer une étape initiale de *débroussaillage* (compréhension *intuitive* des problèmes en jeu et des idées propres à les résoudre), une étape d'étude solide *d'exemples* variés et significatifs, et enfin une étape de *synthèse* comportant un exposé théorique structuré du professeur.

Il se peut qu'à un niveau donné on se borne aux deux premières étapes, voire à la première. De toute façon, à tous les niveaux, la part des exposés synthétiques ne doit pas être dominante, l'essentiel demeurant les activités de résolution de problèmes.

Exemple : En seconde, la convergence des suites, le comportement global ou local des fonctions iront jusqu'à la deuxième étape. En première on étudie de façon synthétique la convergence de suites, la dérivation...

f) *Quelques aspects fondamentaux de l'activité en analyse.*

L'objectif principal étant de faire comprendre à l'élève un certain nombre de concepts et de le rendre capable de les utiliser efficacement dans des situations variées, les activités proposées aux élèves doivent être de plusieurs types tous aussi importants, on ne doit pas en privilégier certains au détriment des autres.

— *activités d'entraînement :* il s'agit de l'étude d'exemples simples mettant en jeu des méthodes générales ou des algorithmes (résolutions d'équations du deuxième degré, de systèmes linéaires, étude de fonctions simples...).

— *activités d'éclaircissement :* il s'agit par l'étude d'exemples et de contre-exemples de bien situer un concept dans son contexte. Cela permet en particulier de :

- motiver une étude, situer un concept lors d'une étape de débroussaillage.
- éviter de trébucher sur l'emploi d'énoncés, ou de formuler trop hâtivement des conclusions (il ne suffit pas d'examiner les 10 premiers termes d'une suite pour établir sa monotonie).
- saisir les limites d'un point de vue ou d'un concept, et en entreprendre une refonte motivée par la résolution

de problèmes et non par la recherche a priori d'une généralité maximale pour les énoncés. *Exemple* : il est commode d'aborder l'étude des suites ou des fonctions par des méthodes *quantitatives* (comparaisons par majorations à des suites ou fonctions de référence pour l'étude des limites, inégalités lipschitziennes pour la continuité, inégalités de la forme $| f(x_0 + h) - f(x_0) - ah | \leqslant k h^2$ pour la dérivabilité). Il convient de dégager l'efficacité de ces méthodes par de nombreuses activités. Puis, dans un deuxième temps, des problèmes, sortant du champ d'application de ces méthodes, permettent de comprendre l'intérêt d'un passage du quantitatif au *qualitatif*. Ce passage ne signifiant évidemment pas l'abandon de tout point de vue quantitatif.

— *activités à caractère intersectoriel ou interdisciplinaire :* il convient de revaloriser, à tous les stades, et à propos des principaux thèmes abordés, les interventions des concepts étudiés et des résultats obtenus dans d'autres secteurs mathématiques et d'autres disciplines scientifiques. Il s'agit bien entendu *d'intégrer* les activités prévues à cet effet à l'enseignement de l'analyse, et non pas d'en faire des applications (respectivement des introductions) placées en fin (respectivement en début) de chapitre.

Par l'aspect intersectoriel et interdisciplinaire de l'activité on peut :

- stimuler l'intérêt de l'élève pour une question purement mathématique et en retour mettre en évidence l'efficacité des résultats mathématiques pour la résolution de problèmes posés ailleurs.
  Exemple : associer l'étude du comportement asymptotique de systèmes discrets à celle des suites (évolution du coût de la vie, problèmes de démographie...)
- aider l'élève à organiser une synthèse de ses connaissances et à réinvestir celles-ci dans des domaines variés. *Exemples* : les suites géométriques interviennent en arithmétique (numération), en analyse (suites de référence pour l'étude des ordres de grandeur, méthodes de dichotomie), en géométrie (calculs de longueurs, calculs d'aires), et dans de nombreux problèmes de physique, chimie, biologie, économie...

— *activités de recherche de plusieurs méthodes de résolution et de comparaison de leur performance :* ce type d'activité a notamment trois qualités : développer l'autonomie de l'élève (capacité à réinvestir ses connaissances de manière pertinente dans des contextes variés), son imagination (découverte de méthodes), et ses capacités d'analyse critique (comparaison des performances des méthodes).
Exemple : choix et comparaison de méthodes variées de résolution d'équations numériques (dichotomie, trichotomie, interpolation...)

— *activités d'approfondissement d'un concept :* il s'agit aussi bien d'approfondissement *théorique* que d'approfondissement *expérimental*, d'un travail sur un *exemple* plus complexe ou sur une *extension* du domaine des interventions du concept étudié.

Exemple : dans la recherche d'approximations de nombres tels que $\sqrt{2}$ ou π on peut faire des conjectures guidées par les résultats des procédés expérimentaux utilisés et tester ces conjectures avec la calculatrice, on peut aussi chercher des majorations, des comparaisons à des suites de référence, dégager les facteurs régissant la rapidité de convergence et construire des algorithmes plus performants.

— *interactions des exemples et des énoncés généraux* : il existe un rapport dialectique entre théories générales et champs d'intervention. Pour accéder au fonctionnement d'un concept dans un cadre général il faut une maîtrise préalable suffisante de son intervention dans des exemples dont on a une bonne expérience. Dans un deuxième temps, le fonctionnement général acquis, on peut maîtriser des exemples où son rôle est plus caché.

Exemple : partant d'un matériel simple suffisamment varié concernant les suites où les fonctions, on peut dégager des classes générales de suites ou fonctions, dont l'étude peut être réinvestie dans des exemples complexes.

— *activités transversales :* on entend par là une activité visant un objectif très important, mais ne pouvant faire l'objet d'une étude théorique et spécifique prolongée. Cette activité, bien que centrée sur un autre thème, visera donc entre autres cet objectif.

Exemple : les techniques de majorations, encadrements, comparaisons à des suites ou des fonctions de référence sont mises en jeu dans la plupart des problèmes d'analyse, l'élève doit y être entraîné par le biais de ces problèmes, et non par des exercices formels peu stimulants (''exercices de style'').

— *étude de quelques grands problèmes* : il ne s'agit plus ici d'activités *isolées* de résolution d'exercices et de problèmes, mais d'une *étude suivie*, et *reprise* à divers niveaux d'approfondissement, de quelques grands thèmes jouant un rôle important dans le secteur considéré et choisis en fonction d'objectifs généraux de formation. Ces activités fournissent des *problématiques* pour l'approfondissement des concepts et sont, en retour, le terrain privilégié de *mise à l'épreuve* des outils théoriques élaborés.

Exemple : la résolution des équations numériques

Au point de départ, en Seconde, on peut étudier plusieurs méthodes d'approximations de $\sqrt{2}$, comparer expérimentalement leur performance (dichotomie, trichotomie, méthode de Héron, interpolation linéaire...). Par des majorations on parvient assez facilement à contrôler de manière théorique la rapidité de convergence. Ce contrôle met en jeu des développements d'ordre 1 ou 2. D'autres exemples (racines carrées, $\sqrt[3]{2}$, exemples simples d'équations algébriques...) permettront d'apprécier la portée des méthodes précédentes et d'effectuer pour un problème donné un choix pertinent d'algorithmes.

En chemin on aura fait fonctionner ou motivé l'introduction de concepts de l'analyse très importants : majorations, développements de fonctions à l'ordre 1, différence entre le local et le global, suites de référence, emploi de représentations graphiques....

En Première l'étude d'exemples de convergences peu rapides, ou très rapides incite à rechercher les facteurs qui gouvernent cette rapidité : pente des sécantes, pente des tangentes. L'étude de ces facteurs met en jeu, sur des exemples, des inégalités lipschitziennes ou tayloriennes. En outre on peut enrichir les suites de référence utilisées, définir la notion de limite d'une suite (passage du quantitatif au qualitatif). Puis ces concepts, joints à l'étude des développements à l'ordre 0 ou 1, permettent d'aborder le concept de limite d'une fonction et celui de dérivée. Inversement l'étude des dérivées est investie dans celle des suites (monotonie, rapidité de convergence...). Et ainsi de suite à tous les niveaux.

*

* *

D) CONCLUSION

Au travers de ces documents le groupe inter-IREM d'analyse ne prétend pas apporter des réponses parfaites ou définitives aux questions que pose l'enseignement de l'analyse. Il souhaite simplement qu'on y trouve quelques éléments aptes à contribuer à une réflexion générale et approfondie sur l'enseignement des mathématiques, à la mise en place d'une problématique nouvelle, notamment pour l'analyse. D'ailleurs ces suggestions, visant un "enseignement en spirale" (selon le mot de G. Glaeser - Bulletin A.P.M.E.P. n° 302), ne vont-elles pas dans le sens d'une circulaire ministérielle de février 1973 : "Il convient de consacrer suffisamment de temps à l'introduction d'une notion nouvelle, souvent par des approches successives, dont certaines peuvent se référer à des points distincts des programmes... On se gardera le plus souvent d'épuiser un sujet au moment où on le rencontre pour la première fois" ?

Certes, si un accord voit le jour quant aux modalités d'une nouvelle approche de l'analyse dans l'enseignement, il restera encore à établir des programmes propices à cette approche, aptes à nourrir dans toutes les classes des activités d'analyse suffisamment riches et significatives. Cela bien sûr nécessitera que l'on effectue un rééquilibrage des grands chapitres du programme de mathématiques (ce qui ne veut pas dire un retour en arrière faisant fi des progrès de cette science), que l'on conçoive différemment le travail de la classe, les rapports maîtres-élèves ou élèves-élèves, que l'on fonde la mission formatrice, non sur la répétition, mais sur des activités réelles où l'élève se sentira partie prenante. Pour l'efficacité de notre enseignement cet effort est indispensable.

2e PARTIE : QUELQUES MORCEAUX CHOISIS

I. EXEMPLES D'APPROXIMATIONS DE NOMBRES REELS PAR DES SUITES

par Annie MICHEL et Pierre TISON (IREM de Lille)

A. CALCUL DE RACINES CARREES ET CUBIQUES

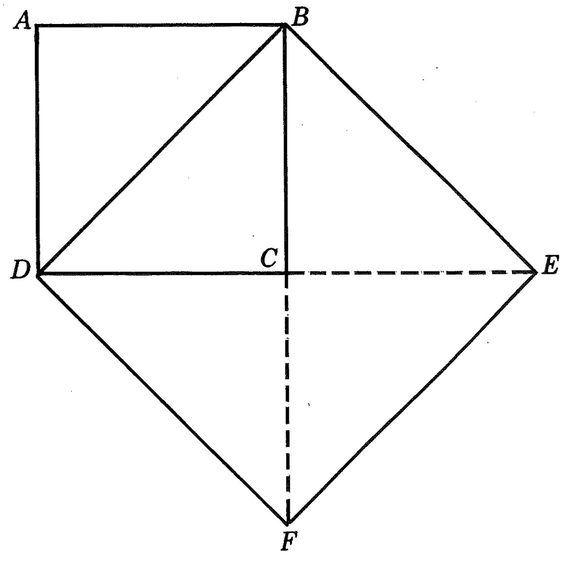
Cette première série d'exercices nécessite l'utilisation d'une calculatrice de poche "4 opérations", avec une mémoire si possible. Elle est destinée soit aux élèves de quatrième à qui l'on peut démontrer l'existence de $\sqrt{2}$, par exemple comme il est indiqué dans l'exercice 1, soit aux élèves de troisième ayant étudié le théorème de Pythagore.

Exercice 1 : *Construction géométrique de $\sqrt{2}$*

Soit un carré ABCD de côté 1 unité de longueur.

Construisons sur la diagonale BD le carré DBEF ; la mesure de la surface de ce carré est 4 fois celle du triangle BDC, donc 2 fois celle du carré ABCD, c'est-à-dire 2.

Si l'on note a la longueur de la diagonale, on en conclut que : $a^2 = 2$. Il existe donc bien un nombre dont le carré est 2 ; ce nombre sera noté $\sqrt{2}$.



Exercice 2 : *$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel*

C'est un excellent exercice que de démontrer que $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ en raisonnant soit sur la parité de p et q soit sur la décomposition en facteurs premiers.

Conclusion

Le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel : il existe donc des nombres qui ne sont pas rationnels (a fortiori, de tels nombres ne sont pas des nombres décimaux).

Exercice 3 : *Encadrement de $\sqrt{2}$ par des nombres décimaux.*

Le but de cet exercice étant de construire en fait deux suites adjacentes convergeant vers $\sqrt{2}$ (ou plus exactement les premiers termes de ces suites), l'usage d'une calculatrice 4 opérations s'impose ; les suites considérées convergent d'ailleurs très rapidement : ce qui justifie leur choix. Il serait sans doute intéressant de faire précéder cet exercice par un autre, plus élémentaire mais donnant de moins bons résultats numériques, tel celui qui consiste à élever successivement au carré :

1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 ; 1,5

puis 1,41 ; 1,42, ensuite 1,411 ; 1,412 ; 1,413 ; 1,414 ; 1,415... ce qui permet d'écrire (en admettant, implicitement bien sûr, le prolongement de la relation d'ordre définie sur ces décimaux) :

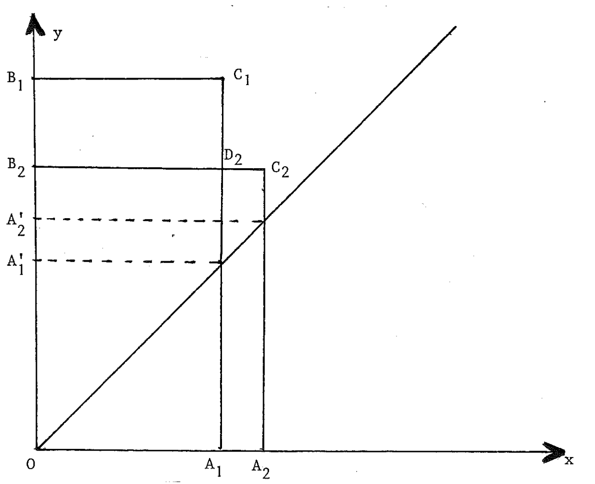
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

Ce qui suit permet alors d'améliorer rapidement cet encadrement.

Principe de l'exercice

Il s'agit d'encadrer le nombre $\sqrt{2}$ par des nombres décimaux ; le nombre $\sqrt{2}$ étant la mesure du côté d'un carré de surface 2, l'idée est de partir d'un rectangle "simple" de surface 2 — celui de longueur 2 et de largeur 1 — et de le transformer de façon que sa surface reste égale à 2 et qu'il "se rapproche" de plus en plus d'un carré ; nous obtiendrons ainsi, en considérant la longueur et la largeur de ces rectangles, un encadrement de plus en plus précis.

Soient 2 axes orthogonaux Ox et Oy ; O est un sommet fixe des rectangles considérés.



mes OA'_1 = mes OA_1

mes OA'_2 = mes OA_2

On pose : mes $OA_1 = a_1(=1)$; mes $OA_2 = a_2$

mes $OB_1 = b_1(=2)$; mes $OB_2 = b_2$

on a : $a_2 b_2 = a_1 b_1 = 2$; on choisit

$$b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ d'où } a_2 = \frac{4}{3} ;$$

on peut écrire :

$$1 < \frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} < 2 ,$$

puisque le carré cherché a son côté plus grand que la largeur du rectangle considéré et plus petit que la longueur du même rectangle.

On continue :

$$b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 1{,}416666 \ ; \ a_3 = \frac{2}{b_3} = 1{,}411764 \ ;$$

$b_4 = 1{,}414215$, $a_4 = 1{,}414211$: on a déjà encadré $\sqrt{2}$ à $\frac{4}{10^6}$ près.

On pourra continuer ainsi en définissant les suites de terme général.

$$b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{b_n}$$

On *constate* que l'on a

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \sqrt{2} < b_4 < b_3 < b_2 < b_1$;

cherchons à démontrer ces inégalités.

On part de $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, donc de $a_1 < b_1$. Comme $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, on a $b_2 < \frac{b_1 + b_1}{2}$, c'est-à-dire : $b_2 < b_1$; d'où : $\frac{2}{b_2} > \frac{2}{b_1}$, c'est-à-dire : $a_2 > a_1$.

A-t-on $a_2 < b_2$? Cette inégalité s'écrit : $\frac{2}{b_2} < b_2$, ou $2 < (b_2)^2$, soit encore :

$$2 < \left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right)^2 \quad \text{ou } 8 < (a_1 + b_1)^2$$

Ce qui s'écrit

$$8 < (a_1 - b_1)^2 + 4a_1 b_1$$

et, comme $4\, a_1 b_1 = 8$, on est finalement ramené à $0 < (a_1 - b_1)^2$, ce qui est vrai.

[Il serait bon, dans un exercice antérieur, de démontrer et d'utiliser l'égalité $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4\,ab$].

On peut alors remarquer que $a_2 < b_2$ entraînera $b_3 < b_2$, d'où $a_3 > a_2$, et que l'inégalité $a_3 < b_3$ se ramènera à

$$0 < (a_2 - b_2)^2$$

Et l'on pourra continuer ainsi aussi longtemps que l'on voudra (*on n'aura jamais l'égalité de* a_n et b_n : *les inégalités ci-dessus sont strictes ; d'ailleurs* $a_n = b_n$

signifierait $a_n = \sqrt{2}$ *ce qui est impossible car* a_n *est rationnel, comme on le voit "de proche en proche"* ; bien évidemment, l'utilisation implicite du raisonnement par récurrence ne pose ici aucun problème : n'utilise-t-on pas, par exemple, les nombres 10^n ou 10^{-n}...)

On a bien démontré :

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \sqrt{2} < b_4 < b_3 < b_2 < b_1$$

On peut démontrer ce résultat géométriquement.

Exercice 4 : *Etude de la différence* $b_n - a_n$

De $a_1 < a_2$ résulte $-a_2 < -a_1$; d'où l'inégalité

$b_2 - a_2 < \dfrac{a_1 + b_1}{2} - a_1$, d'où $b_2 - a_2 < \dfrac{b_1 - a_1}{2}$

On a de même : $b_{n+1} - a_{n+1} < \dfrac{b_n - a_n}{2}$: en effet, l'inégalité $a_n < a_{n+1}$ implique

$$b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{b_n + a_n}{2} - a_n.$$

On a donc :

$$b_3 - a_3 < \frac{b_2 - a_2}{2} < \frac{b_1 - a_1}{2^2},$$

$$\text{puis } b_4 - a_4 < \frac{b_3 - a_3}{2} < \frac{b_1 - a_1}{2^3}, \text{ etc...}$$

On "voit" qu'au rang n on aura $b_n - a_n < \dfrac{1}{2^n}$, puisqu'ici $b_1 - a_1 = 1$.

En fait, on a beaucoup mieux :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{4}{a_n + b_n}$$

$$= \frac{(a_n + b_n)^2 - 8}{2(a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)^2 + 4a_nb_n - 8}{2(a_n + b_n)}$$

$$= \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} < \frac{(a_n - b_n)^2}{4}$$

puisque $a_n + b_n > 2$.

Ceci montre que le nombre de décimales exactes est au moins doublé à chaque pas, dès que $b_n - a_n$ est plus petit que $\dfrac{1}{10}$.

On peut donc rendre la différence $b_n - a_n$ "aussi petite que l'on veut" ; on dira que la différence $b_n - a_n$ "tend vers 0".

Il s'agit d'introduire ici de façon intuitive les expressions "aussi petite que l'on veut", "tend vers 0". Cela nous semble souhaitable ; la définition générale qui pourra intervenir en première — dans le cas des suites — serait alors préparée.

Conclusion

Puisque l'on a

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \sqrt{2} < b_n < \ldots < b_2 < b_1$$

on a : (faire un dessin)

$$0 < b_n - \sqrt{2} < b_n - a_n$$
$$0 < \sqrt{2} - a_n < b_n - a_n$$

Or nous avons vu que la différence $b_n - a_n$ peut être rendue "aussi petite que l'on veut" ; on dira que b_n et a_n "approchent d'aussi près que l'on veut le nombre $\sqrt{2}$" (b_n par valeurs supérieures, a_n par valeurs inférieures), ou encore que "la suite des a_n converge vers $\sqrt{2}$", "la suite des b_n converge vers $\sqrt{2}$".

On dira aussi que "$\sqrt{2}$ est la limite de la suite des nombres a_n" (ou aussi bien que "$\sqrt{2}$ est la limite de la suite des nombres b_n").

Il est bon que $\sqrt{2}$ apparaisse déjà comme limite de deux suites distinctes ! Il serait dangereux de ne considérer qu'une seule suite.

Exercice 5 :

Généralisation au calcul de $\sqrt{p}$, p réel positif. On étudie de la même manière les suites :

$$b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad a_n = \frac{p}{b_n}.$$

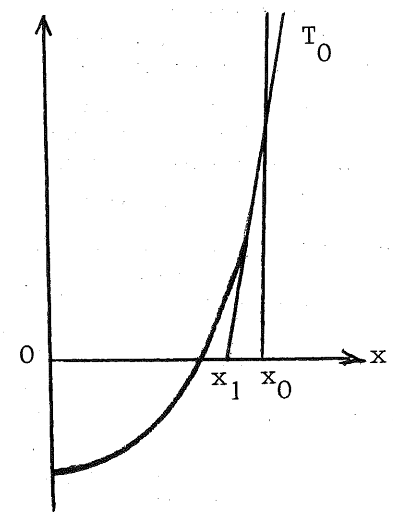
Remarque

La méthode d'approximation de Newton appliquée à la recherche des zéros de la fonction $f : x \mapsto x^2 - p$ aboutit au même algorithme. On obtient en effet (cf. figure ci-dessous) :

$$x_1 = \frac{1}{2x_0}(-x_0^2 + p) + x_0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{p}{x_0}\right);$$

La suite (x_n) ainsi définie de proche en proche n'est autre que la suite (b_n) ci-dessus.



Thème d'exercice : *Calcul de la racine cubique*

On interprète $\sqrt[3]{p}$ comme étant la longueur du côté d'un cube dont le volume est p.

Nous généralisons la méthode précédente en "transformant" un parallélépipède rectangle, à base carrée, en un cube.

Soit p un réel, qu'on supposera plus grand que 1 ; choisissons b_1 tel que $b_1^3 > p$.

On pose :

$a_1 = \frac{p}{b_1^2}$, puis

$b_2 = \frac{2b_1 + a_1}{3}$ et $a_2 = \frac{p}{b_2^2}$;

de proche en proche on définit ainsi :

$b_n = \frac{2\, b_{n-1} + a_{n-1}}{3}$ et $a_n = \frac{p}{b_n^2}$.

On peut alors montrer que les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies vérifient les trois propriétés suivantes :

1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n < b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1 ;$$

2) $a_n^3 < p < b_n^3$;

3) $0 < b_n - a_n < \frac{2}{3}(b_{n-1} - a_{n-1})$

Il en résulte que l'on peut rendre "$b_n - a_n$ aussi petit que l'on veut" : on montre en effet que l'on a :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{n} .$$

On peut affiner ce résultat et démontrer ici encore que, à partir du moment où $b_n - a_n$ est inférieur à $\frac{1}{10}$, on double à chaque pas le nombre de décimales.

On admettra qu'il existe un réel unique x tel que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on ait : $a_n < x < b_n$; a_n et b_n sont donc des valeurs approchées (respectivement par défaut et par excès) de ce réel x.

Remarque

Il est clair qu'en classe l'exercice doit être traité avec une valeur numérique pour p.

Exemple : *Calcul de la racine cubique de* Π

INITIALISATION

2. STO 1

2.

PROGRAMME sur TI 58 avec imprimante

000	33	X²	010	01	01
001	35	1/X	011	95	=
002	65	x	012	55	÷
003	89	π	013	03	3
004	95	=	014	95	=
005	99	PRT	015	99	PRT
006	85	+	016	42	STO
007	02	2	017	01	01
008	65	x	018	81	RST
009	43	RCL			

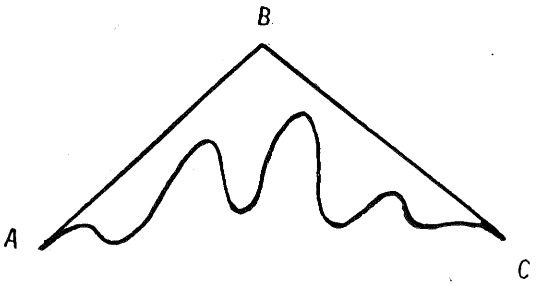
RESULTATS

.7853981634
1.595132721
1.234685151
1.474983531
1.44402772
1.464664927
1.464445819
1.464591891
1.46459188
1.464591888

B. EXERCICES AYANT POUR OBJECTIF LE CALCUL APPROCHE DE Π

Ces exercices nécessitent l'utilisation d'une calculatrice de poche avec extraction de racine carrée. L'usage d'un rétroprojecteur peut être intéressant.

Les deux premiers exercices donnent un encadrement de π considéré soit comme l'aire d'un disque de rayon 1 (exercice 1), soit comme le périmètre d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ (exercice 2). Ces encadrements s'obtiennent en construisant dans les deux cas des suites de polygones convexes réguliers inscrits et circonscrits au cercle considéré ; le premier polygone sera par exemple un triangle équilatéral, ou un carré, et les suivants sont obtenus en doublant à chaque fois le nombre de côtés. Nous préférons commencer par calculer des valeurs approchées de l'aire du disque plutôt que des valeurs approchées du périmètre, car il est plus convaincant de considérer les surfaces polygonales : si D désigne le disque, P une surface polygonale inscrite et P′ une surface polygonale circonscrite, on a $P \subset D \subset P'$, d'où bien évidemment mes.P ⩽ mes.D ⩽ mes.P′ ; par contre, s'il est évident que le périmètre de toute ligne polygonale convexe inscrite est inférieur au périmètre du cercle, il n'est pas trivial que le périmètre d'une ligne polygonale convexe circonscrite est supérieur au périmètre du cercle : on sait bien que ce résultat est lié à la convexité du cercle.



Cependant, la méthode des aires est mal adaptée au calcul : on va démontrer, en effet, que si s_n désigne l'aire du $n^{ième}$ polygone inscrit, on a :

$$s_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{1-a_n^2}$$

(a_n : apothème du $n^{ième}$ polygone) ; or $u_n = \sqrt{1-a_n^2}$ tend rapidement vers 0, et la calculatrice l'arrondit à partir d'un certain rang, selon la marque, à 0 ou à 10^{-12} par exemple, et comme l'on multiplie u_n par 2^{n+1}, on obtient donc dans le premier cas une suite nulle à partir d'un certain rang, et dans le second une suite géométrique de raison 2. C'est pourquoi, l'exercice 2 reprend le calcul de π en utilisant, cette fois, les périmètres des polygones.

L'exercice 3 ne consiste plus à "approcher" un cercle fixe par des polygones inscrits et circonscrits de périmètre variable mais à considérer une suite de polygones convexes réguliers de périmètre fixe obtenus en doublant à chaque fois le nombre de côtés; à la "limite" on obtient la longueur du cercle.

EXERCICE I

CALCUL DE Π PAR LES AIRES DES POLYGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS

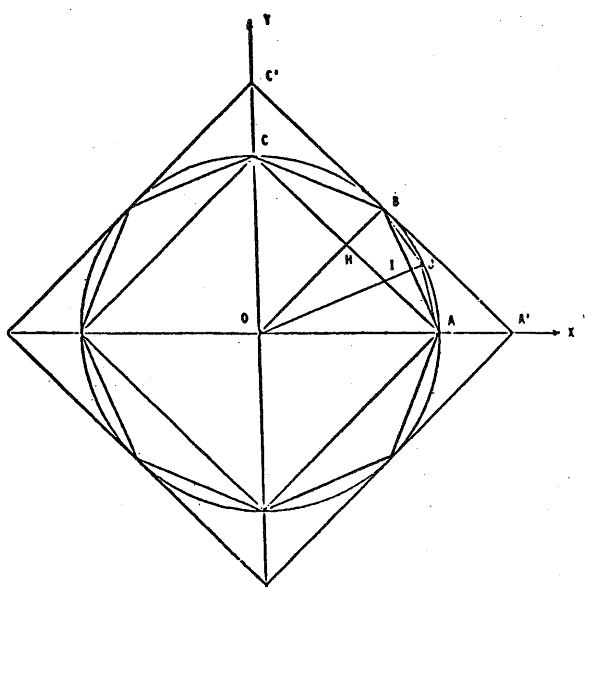
Nous utilisons la méthode classique des polygones réguliers convexes inscrits et circonscrits : nous commençons ici par des carrés inscrits et circonscrits, on peut demander aux élèves de reprendre l'exercice en commençant par des triangles équilatéraux.

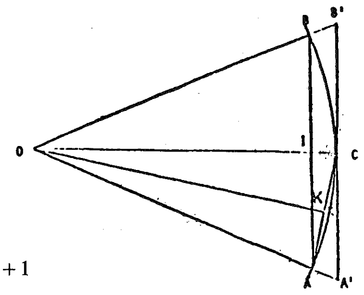
Le polygone circonscrit sera obtenu en construisant les tangentes parallèles aux côtés du polygone inscrit correspondant.

NOTATIONS

— Pour le $n^{ième}$ polygone inscrit :
mesure du côté : c_n
mesure de l'apothème : a_n
aire du polygone : s_n

— Pour le $n^{ième}$ polygone circonscrit :
mesure du côté : c'_n
mesure de l'apothème : 1
aire du polygone : S_n





mes $OI = a_n$
mes $OK = a_{n+1}$

On démontre aisément que :

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$$

$$s_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{1-a_n^2}$$

$$S_{n+1} = \frac{s_{n+1}}{a_{n+1}^2} = \frac{2s_{n+1}}{1+a_n}$$

Géométriquement, on voit que la suite des s_n croît : lorsque l'on passe de s_n à s_{n+1}, on remplace $2^{n+1}\times$(aire du triangle OAB) par $2^{n+2}\times$(aire du triangle OAJ), et $2\times$(aire du triangle OAJ) est manifestement plus grand que l'aire du triangle OAB. On peut également montrer géométriquement que la suite des S_n est décroissante, bien que ce soit moins facile ; on peut alors écrire :

$$s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_n < \pi < S_n \ldots S_3 < S_2 < S_1$$

PROGRAMME

000	43 RCL	Calcul de a_{n+1}
001	00 00	
002	85 +	
003	01 1	
004	95 =	
005	55 ÷	
006	02 2	
007	95 =	
008	34 [X	
009	42 STO	Calcul de s_{n+2}
010	00 00	
011	33 X^2	
012	94 +/-	
013	85 +	
014	01 1	
015	95 =	
016	34 $\sqrt{X}$	
017	65 x	
018	02 2	
019	45 Y^X	
020	43 RCL	
021	01 01	
022	95 =	
023	99 PRT	Calcul de S_{n+2}
024	65 x	
025	02 2	
026	95 =	
027	55 ÷	
028	53 (	
029	01 1	
030	85 +	
031	43 RCL	
032	00 00	
033	54)	
034	95 =	
035	99 PRT	$n+3$
036	01 1	
037	44 SUM	
038	01 0	
039	81 RST	

INITIALISATION

Ce programme consiste en partant de a_n qui a été placé dans la mémoire 00 à calculer a_{n+1} (qui est stocké en 00 à la place de a_n), puis s_{n+2}, aire du polygone inscrit à 2^{n+2} côtés ($n+2$ est stocké dans la mémoire 01). Au départ, on doit mettre $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, apothème du carré inscrit initial, dans la mémoire 00, et $n+2=1+2=3$ dans la mémoire 01.

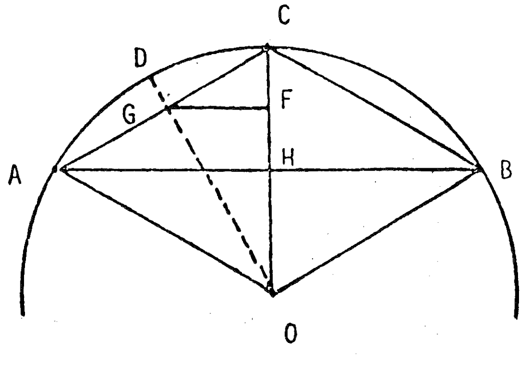
RESULTATS

	(suite)
3.06146746	3.14572800
3.18259788	3.14572800
3.12144515	3.16749800
3.15172491	3.16749800
3.13654849	3.23192829
3.14411839	3.23192829
3.14033116	3.31588846
3.14222363	3.31588846
3.14127725	4.19430400
3.14175037	4.19430400
3.14151381	5.93164160
3.14163209	5.93164160
3.14157301	11.86328320
3.14160258	11.86328320
3.14158794	23.72656641
3.14159533	23.72656641
3.14159262	47.45310281
3.14159446	47.45313281
3.14159729	94.90626562
3.14159775	94.90626562
3.14160797	189.8125312
3.14160808	189.8125312
3.14162933	379.6250625
3.14162936	379.6250625
3.14197109	759.2501250
3.14197110	759.2501250
3.14299615	1518.500250
3.14299615	1518.500250

EXERCICE II

CALCUL DE Π PAR LES PÉRIMÈTRES DES POLYGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS

Le périmètre d'un cercle de rayon r étant $2\pi r$, pour encadrer π on va donc encadrer le périmètre d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$.



Notons :
$a_n = \text{mes. } OH$ (OH : apothème du $n^{\text{ième}}$ polygone inscrit) ;
$a_{n+1} = \text{mes. } OG$ (OG : apothème du $(n+1)^{\text{ème}}$ polygone inscrit) ;
r = le rayon du cercle ;
p_n (resp. p'_n) = le périmètre du $n^{\text{ième}}$ polygone inscrit (resp. circonscrit).

Les polygones circonscrits se déduisent des polygones inscrits par homothétie de centre 0 et de rapport :

— au rang n : $\frac{r}{a_n}$ d'où $\frac{p_n}{p'_n} = \frac{a_n}{r}$ (1) ;

— au rang $n+1$: $\frac{r}{a_{n+1}}$ d'où $\frac{p_{n+1}}{p'_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{r}$ (2).

Les angles $\widehat{GOC}$ et $\widehat{HAC}$ sont égaux : en effet, on a : mes. $\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}$ mes. $\overset{\frown}{BC}$; d'où $\cos \widehat{GOC} = \cos \widehat{HAC}$

ou $\frac{\text{mes. } OG}{\text{mes. } OC} = \frac{\text{mes. } AH}{\text{mes. } AC}$,

c'est-à-dire : $\frac{a_{n+1}}{r} = \frac{\frac{1}{2}c_n}{c_{n+1}}$

ou encore $\frac{a_{n+1}}{r} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$

puisque le $(n+1)^{\text{ème}}$ polygone a deux fois plus de côtés que le $n^{\text{ième}}$.

Or $\frac{a_{n+1}}{r} = \frac{p_{n+1}}{p'_{n+1}}$ d'après (2),

d'où $\frac{p_{n+1}}{p'_{n+1}} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$ et finalement

$$\boxed{p^2_{n+1} = p_n\, p'_{n+1}} \qquad (3)$$

Considérons le triangle OGC :

$$(\text{mes. } OG)^2 = (\text{mes. } OF)(\text{mes. } OC) = \frac{\text{mes. } OH + \text{mes. } OC}{2} \cdot \text{mes. } OC$$

c'est-à-dire $a^2_{n+1} = \frac{a_n + r}{2} \cdot r$;

d'après (1) et (2) :

$$r^2 \left(\frac{p_{n+1}}{p'_{n+1}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{rp_n}{p'_n} + r\right) r = \frac{p_n + p'_n}{2p'_n}\, r^2$$

$$p'_{n+1}{}^2 = \frac{2p'_n}{p_n + p'_n} \cdot p^2_{n+1} \qquad \text{d'où d'après (3) :}$$

$$p'_{n+1}{}^2 = \frac{2p'_n}{p_n + p'_n} \cdot p_n \cdot p'_{n+1}$$

donc $$\boxed{p'_{n+1} = \frac{2p_n p'_n}{p_n + p'_n}}$$

On constate que ces relations sont indépendantes du rayon du cercle. Il suffira d'étudier sur la T.I. 58 la suite (u_n) définie comme suit

$$\frac{2}{u_{2n}} = \frac{1}{u_{2n-2}} + \frac{1}{u_{2n-1}} \text{ et } u_{2n+1} = \sqrt{u_{2n-1}\, u_{2n}}$$

PROGRAMME SUR T.I. 58

```
000   43 RCL
001   00 00
002   35 1/X
003   85 +
004   43 RCL
005   01 01
006   35 1/X
007   95 =
008   35 1/X
009   65 x
010   02 2
011   95 =
012   99 PRT
013   42 STO
014   00 00
015   65 x
016   43 RCL
017   01 01
018   95 =
019   34 √X
020   99 PRT
021   42 STO
022   01 01
023   81 RST
```

RESULTATS

3.31370850
3.06146746
3.18259788
3.12144515
3.15172491
3.13654849
3.14411839
3.14033116
3.14222363
3.14127725
3.14175037
3.14151380
3.14163208
3.14157294
3.14160251
3.14158773
3.14159512
3.14159142
3.14159237
3.14159235
3.14159281
3.14159258
3.14159269
3.14159263
3.14159266
3.14159265
3.14159266
3.14159265 stabilisation
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265
3.14159265

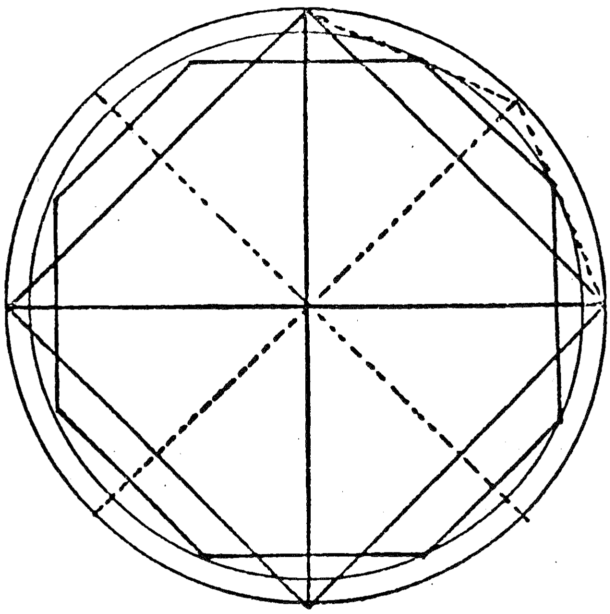
INITIALISATION

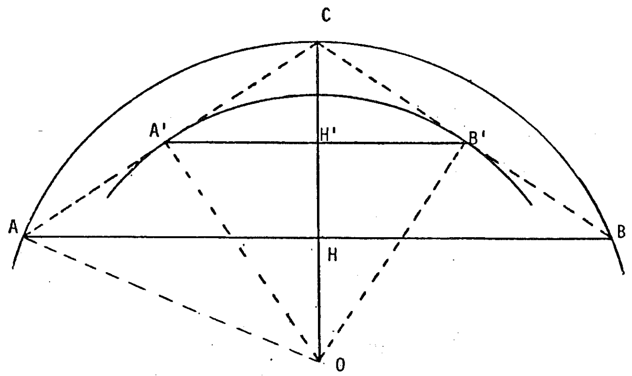
On met p'_n dans la mémoire 00
p_n dans la mémoire 01

Au rang 0 on a : $p'_0 = 4$; $p_0 = 2\sqrt{2}$ (4 est le périmètre du carré circonscrit au cercle de rayon $\frac{1}{2}$, $2\sqrt{2}$ est le périmètre du carré inscrit).

EXERCICE III
METHODE DES ISOPERIMETRES
(suite de Nicolas de Cusa)

Cette suite permet d'encadrer $\frac{2}{\pi}$ donc π. A partir d'un polygone régulier convexe à n côtés, on construit un polygone à 2n côtés de même périmètre (voir figure). Si le polygone de départ est un carré de côté 1, donc de périmètre 4, on aboutit à la limite en réitérant la construction précédente à un cercle de même périmètre 4 et donc de rayon $\frac{2}{\pi}$.





mes. AB $= c_n$ mes. A'B' $= c_{n+1}$
mes. OH $= a_n$ mes. OH' $= a_{n+1}$
mes. OA $= r_n$ mes. OA' $= r_{n+1}$

Soit a_n la mesure de l'apothème, c_n la mesure du côté et r_n le rayon du cercle circonscrit au $n^{ième}$ polygone construit ; ce polygone, si celui de départ est un carré, a donc 2^{n+1} côtés.

AB étant le côté du $n^{ième}$ polygone et O son centre, la droite perpendiculaire à la droite AB issue de O coupe la droite AB en H et l'arc AB en C :

$$\text{mes. } OH = a_n \text{ et mes. } OC = r_n$$

Soit A' et B' les milieux respectifs des cordes AC et BC , A'B' est parallèle à AB et

$$\text{mes. } A'B' = \frac{1}{2} \text{ mes. } AB,$$

de plus : mes $\widehat{A'OB'} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$, donc A'B' est un côté du $(n+1)^{ème}$ polygone, le point O est également le centre de ce polygone.

H' est le milieu de CH d'où :

$$\text{mes. } OH' = \frac{1}{2} (\text{mes. } OH + \text{mes. } OC)$$

soit : $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + r_n)$;

enfin le triangle OA'C étant rectangle :

$$(\text{mes. } OA')^2 = \text{mes. } OH' . \text{ mes. } OC$$

c'est-à-dire : $r^2_{n+1} = r_n a_{n+1}$

Il est alors aisé de démontrer que les suites a_n et r_n sont adjacentes. En effet $a_n < r_n$ implique :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + r_n}{2} > \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

donc (a_n) est croissante;

de même : $a_{n+1} = \frac{a_n + r_n}{2} < \frac{r_n + r_n}{2} = r_n$, d'où

$$r^2_{n+1} = a_{n+1} . r_n < r^2_n$$

donc (r_n) est décroissante.

On peut de plus majorer $r_n - a_n$, dans le triangle OHA on a :

$$\text{mes. } OA - \text{mes.} OH < \text{mes. } AH$$

c'est-à-dire $r_n - a_n < \frac{c_n}{2}$

comme le $n^{ième}$ polygone a 2^{n+1} côtés (si le 1er est un carré) et que son périmètre est 2 :

$$c_n = \frac{2}{2^{n+1}} \text{ , donc :}$$

$$r_n - a_n < \frac{1}{2^{n+1}}$$

On a donc bien démontré que les suites (a_n) et (r_n) convergent vers une même limite qu'elles encadrent. Or le cercle de rayon r_n est un cercle circonscrit au $n^{ème}$ polygone, son périmètre est donc plus grand que celui du polygone, soit 4 :

$$2\pi r_n > 4 ;$$

le cercle de rayon a_n est inscrit dans ce même polygone d'où

$$2\pi a_n < 4 .$$

$$\text{donc : } \quad 2\pi a_n < 4 < 2\pi r_n ,$$

$$a_n < \frac{4}{2\pi} < r_n .$$

La limite commune des suites (a_n) et (r_n) est donc : $\frac{2}{\pi}$.

PROGRAMME sur TI 58			RESULTATS	
000	43	RCL	3.31370850	
001	00	00	3.06146746	
002	85	+	3.18259788	
003	43	RCL	3.12144515	
004	01	01	3.15172491	
005	95	=	3.13654849	
006	55	÷	3.14411839	
007	02	2	3.14033116	
008	95	=	3.14222363	
009	42	STO	3.14127725	
010	00	00	3.14175037	
011	35	1/X	3.14151380	
012	65	x	3.14163208	
013	02	2	3.14157294	
014	95	=	3.14160251	
015	99	PRT	3.14158773	
016	43	RCL	3.14159512	
017	00	00	3.14159142	
018	65	x	3.14159327	
019	43	RCL	3.14159235	
020	01	01	3.14159281	
021	95	=	3.14159258	
022	34	$\sqrt{X}$	3.14159269	
023	42	STO	3.14159263	
024	01	01	3.14159266	
025	35	1/X	3.14159265	
026	65	x	3.14159266	
027	02	2	3.14159265	stabilisation
028	95	=	3.14159265	
029	99	PRT	3.14159265	
030	81	RST	3.14159265	
			3.14159265	
			3.14159265	
			3.14159265	
			3.14159265	
			3.14159265	
			3.14159265	
			3.14159265	
			3.14159265	
			3.14159265	
			3.14159265	

VALEUR DE Π AFFICHEE PAR LA MACHINE

3.14159265

INITIALISATION

On met a_n dans la mémoire 00
r_n dans la mémoire 01

si l'on part du carré de côté 1 on a $a_0 = 0,5$ et $r_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

on met donc 0,5 dans la mémoire 00 et $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dans la mémoire 01.

Les arrondis de la machine "s'arrangent bien" et l'on trouve la valeur π utilisée par la machine.

On peut constater que les résultats obtenus par la méthode des isopérimètres sont identiques à ceux obtenus par la méthode des périmètres des polygones inscrits et circonscrits au cercle de rayon $\frac{1}{2}$. Ce résultat était prévisible. En effet, si l'on part dans les 2 cas d'un carré, les $n^{\text{ième}}$ polygones construits ont tous deux 2^{n+1} côtés, et sont donc semblables. Les termes de rang impair correspondent dans le cas des périmètres au périmètre p'_n du polygone circonscrit et dans le cas des isopérimètres à $\frac{2}{a_n}$, a_n désignant l'apothème du $n^{\text{ième}}$ polygone ; le rapport de leur périmètres est égal au rapport de leurs apothèmes :

$$\frac{p'_n}{2} = \frac{1}{a_n}, \text{ d'où } p'_n = \frac{2}{a_n}.$$

Les termes d'indices impairs sont donc égaux.

De même, en écrivant pour les termes de rang pair le rapport des périmètres et le rapport des rayons, on obtient :

$$\frac{p_n}{2} = \frac{1}{r_n}, \text{ d'où } p_n = \frac{2}{r_n} :$$

les termes d'indices pairs sont égaux aussi.

On pourra également étudier en classe de première ou terminale d'autres suites convergeant vers π, mais donnant de mauvais résultats. L'étude de telles suites est très utile pour faire sentir la nécessité d'une formalisation de la notion de convergence.

Parmi les nombreux exemples possibles (cf. : Mathematical Analysis, par L.A. Lyusternik et A.R. Yanpol'skii - Pergamon Press - P 305), citons entre autres :

La suite de Viète

$\pi = \lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n-1} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$ en partant du fait que $\sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$

(avec n chiffres 2)

On pourra faire la démonstration de la convergence et montrer avec une calculatrice que cette suite ne donne pas une bonne approximation de π. (Suivant le type de calculatrice, on obtient à partir d'un certain rang, soit une suite constamment nulle, soit une suite géométrique divergente ; en effet

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} = 0$)

Le calcul de π par le développement de Arctg 1

$\Pi = 4 \text{ Arctg } 1$

$\text{Arctg } 1 = 1 - \frac{1}{3} + \ldots \frac{(-1)^n}{2_{n+1}} + \ldots$

Cette suite donne également de très mauvais résultats.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A la poursuite des réels, par Annie Michel et Pierre Tison, Publication de l'IREM de Lille (1979-1980)

[2] Numéro Spécial Π, supplément au Petit Archimède n° 64-65 ADCS 61 rue St Fuscien 80000 Amiens (Mai 1980)

[3] Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique, par A. Engel, adapté par D. Reisz (Cedic, 1979)

[4] Quelques applications des mathématiques par N. Vilenkine, G. Chilov, V. Ouspenski, J. Lioubitch et L. Chor, Editions de Moscou, 1975 (Collection "Initiation aux mathématiques")

[5] Même Collection que [4] : trois textes : A. Kurosh, Equations algébriques de degré quelconque ; G. Chilov, Analyse mathématique dans la classe des fonctions rationnelles et V. Boltienski, Qu'est-ce que la dérivation ? (Editions de Moscou, 1974).

[6] Même Collection que [4] : Quatre cours de Mathématiques, par A. Markouchévitch (Editions de Moscou, 1973)

[7] Même Collection que [4] : Caractères de divisibilité, suite de Fibonacci, par N. Norobiev (Editions de Moscou, 1973)

[8] Activités en Analyse : majorer, minorer, encadrer, par M. Viallard, IREM de Rennes (1980)

[9] The Historical Development of the Calculus, par C.H. Edwards, Springer-Verlag (1979)

[10] A first Course in Calculus, par S. Lang, Addison-Wesley Pub. Comp, 4e édition (1979)

[11] Fundamental Concepts of Mathematics, par R.L. Goodstein, Pergamon Press, seconde édition (1964)

[12] Mathematical Analysis, par L.A. Lyusternik et A.R. Yanpol'skii, Pergamon Press (1965).

II - APPROXIMATION DES NOMBRES REELS PAR DES SUITES : RECHERCHE DE SOLUTIONS APPROCHEES D'EQUATIONS NUMERIQUES.

Jean-Louis OVAERT (IREM de Marseille)

A - Analyse du problème et objectifs mathématiques

1) Représentation des nombres réels.

Un des moyens les plus puissants d'étude des nombres réels consiste, étant donné un nombre défini par un certain processus (solution d'une équation, somme d'une série, limite d'une suite, valeur d'une fonction, valeur d'une intégrale...), à *représenter* ce nombre par un autre processus mieux adapté au problème posé.

Le nombre d'Archimède π est à cet égard exemplaire. Nous nous bornons ici à une esquisse très brève, renvoyant pour plus de détail au numéro spécial du petit Archimède [23]. De sa définition à partir de la longueur du cercle ou de l'aire du disque, on peut passer à une représentation comme limite de longueurs ou d'aires de polygones réguliers inscrits ou exinscrits, ce qui permet d'en obtenir des valeurs approchées [2] [4]. L'utilisation des fonctions trigonométriques directes et réciproques permet d'obtenir d'autres représentations de π comme limite de suites ou somme de séries conduisant à des processus d'approximation plus efficaces [4] [31]. Des représentations de π utilisant des intégrales et des fractions continues permettent d'établir son irrationnalité et sa transcendance [14] [18]. Inversement, le nombre π permet d'exprimer des résultats très importants. Ainsi, la représentation de π par les intégrales de Wallis permet d'expliquer son intervention dans la formule de Stirling [4]. De même π permet d'évaluer des intégrales et des séries très remarquables. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ et } \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ces relations sont peu adaptées au calcul de valeurs approchées de π. Elles sont néanmoins utiles en analyse numérique, pour tester *expérimentalement* la performance des procédés d'accélérations de convergence des séries et des méthodes de calcul de valeurs approchées des intégrales [4] [5] [6].

En conclusion, l'étude du nombre π met en jeu de nombreuses théories, offrant sur les problèmes posés des éclairages complémentaires. Il en est de même pour la plupart des grands problèmes mathématiques, et, en particulier, pour la résolution des équations numériques dont nous allons maintenant traiter.

2) Résolution des équations numériques.

a) Cette question comporte un aspect purement *algébrique* : étudier l'appartenance des solutions à certains domaines numériques donnés (corps des rationnels, extensions algébriques) et évaluer les solutions en fonction d'éléments convenablement choisis dans ces domaines (radicaux, résolvantes,...). A cet égard, les travaux de Lagrange, Gauss et Galois ont ouvert des voies très intéressantes [18] [42] [39] [38]. *L'aspect arithmétique* (résolution des équations diophantiennes) met en jeu une extraordinaire variété de secteurs mathématiques, et, dans bien des cas, a constitué le moteur même du développement de ces secteurs [14] [30].

Ces aspects algébriques et arithmétiques ne seront pas développés dans cet article, mais il ne faut pas les perdre de vue, même à un niveau très élémentaire.

b) Dans le cas où le domaine de nombres considéré est **R** ou **C**, on peut attaquer cette question par les méthodes de l'analyse, et on est conduit aux problèmes suivants :

Problème 1. Etudier l'existence et l'unicité des solutions ; localiser et séparer les différentes racines.

Ce problème est de type qualitatif ; il met en jeu des méthodes topologiques (théorème des valeurs intermédiaires, calcul d'indices, théorèmes de point fixe,...) [4] [16].

Problème 2. Lorsque l'équation comporte des paramètres, évaluer la *dépendance des solutions en fonction de ces paramètres* [4] [6]. Outre son intérêt purement mathématique, ce problème est essentiel pour l'analyse numérique (effet sur les solutions de *perturbations* des cœfficients, fortuites ou provoquées, évaluation de l'*influence d'un paramètre*). Il peut comporter des aspects qualitatifs (continuité des solutions) et quantitatifs (comportement asymptotique, majorations,...).

Problème 3. Etant donné une solution α de l'équation, *construire* des algorithmes d'approximation de α par une suite numérique (u_n), étudier la *convergence* de ces algorithmes et la *stabilité* de cette convergence, comparer leur *rapidité de convergence* et leur *performance*.

Au niveau élémentaire où nous nous plaçons, on pourra apprécier la rapidité de convergence en évaluant, pour tout entier p assez grand, le nombre de pas qu'il faut effectuer pour "gagner" la $p^{\text{ième}}$ décimale, c'est-à-dire passer de la précision 10^{-p+1} à la précision 10^{-p}. De même on pourra apprécier la performance en évaluant le temps total de calcul nécessaire pour obtenir la précision 10^{-p} sur un matériel de calcul donné. Nous préciserons ces points sur les exemples étudiés au B.

Les algorithmes d'approximation des racines d'une équation relèvent de principes très variés. Nous nous bornerons à étudier les suivants, selon le schéma proposé par les problèmes énoncés plus haut :
— Dichotomie et variantes (B1).
— Utilisation d'un système discret (B2).
— Utilisation d'une équation à point fixe (B3).

On trouvera d'autres types d'algorithmes dans [6] et [8].

B - Esquisse de quelques méthodes d'approximation et de leur utilisation pour l'enseignement de l'analyse à divers niveaux

I - DICHOTOMIE ET VARIANTES

1) Rappelons brièvement cette méthode :

On suppose donnée une fonction numérique f continue et strictement monotone sur un intervalle $[a,b]$ telle que $f(a)f(b)<0$. Il existe alors un point α et un seul de $]a,b[$ tel que $f(\alpha)=0$. Pour obtenir un algorithme d'approximation de α, on construit par dichotomie une suite $[a_n,b_n]$ d'intervalles emboîtés de la façon suivante : on pose $a_o=a, b_o=b$ et $c_o=\dfrac{a_o+b_o}{2}$. Deux cas peuvent se présenter : si $f(a_o)f(c_o)<0$, on prend $a_1=a$, $b_1=c_o$; sinon, on prend $a_1=c_o$, $b_1=b_o$. Supposant avoir construit a_n et b_n, on pose $c_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$.

Si $f(a_n)f(c_n)<0$, on prend $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=c_n$; sinon, on prend $a_{n+1}=c_n$, $b_{n+1}=b_n$. Dans ces conditions, la suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) est décroissante, et, pour tout entier n, $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$ et $b_n-a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

La convergence est géométrique de raison 1/2.

2) Commentaires :

a) Sur des exemples simples (racines carrées, racines cubiques, équations algébriques) cette méthode peut être mise en œuvre bien avant la classe de première. Dans ces exemples, le nombre α est donné ; on cherche à approcher α et non à démontrer son existence.

b) On peut aussi couper à chaque pas l'intervalle en trois (trichotomie) ou en dix (décachotomie). La convergence est alors géométrique de raison 1/3 ou 1/10 suivant le cas. Il ne faut cependant pas en conclure que la décachotomie est plus performante que la dichotomie, car le nombre de "tris" à effectuer à chaque étape est en moyenne plus élevé. En fait, quelques expérimentations, sur $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ par exemple, permettront de se convaincre que, sur une calculatrice non programmable, la dichotomie est nettement plus performante que la décachotomie ou la trichotomie, dès que l'on désire une précision de 10^{-2}, et a fortiori si l'on veut obtenir la précision 10^{-4} ou 10^{-6}. De toute façon, ces méthodes sont fastidieuses dès que l'on recherche une grande précision.

3) Objectifs

De telles activités peuvent répondre à plusieurs objectifs mathématiques, selon le niveau considéré :

a) — Familiarisation avec les suites et leur convergence.
— Exploration des ordres de grandeurs des suites géométriques.
— Construction et mise en œuvre d'un algorithme de tri.
— Pratique du calcul numérique et algébrique. Obtention de majorations et d'encadrements.
— Mise en évidence de la différence entre rapidité de convergence et performance.

b) — Familiarisation avec la méthode de dichotomie et mise en évidence sur quelques exemples de son *importance théorique* en analyse. A partir de la convergence des suites croissantes majorées, cette méthode permet de démontrer de façon simple quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions, dont l'énoncé figure au programme des Lycées :
— Existence des racines carrées, et des racines $n^{\text{èmes}}$.
Existence des fonctions réciproques des fonctions continues strictement monotones.
— Théorème des valeurs intermédiaires (la monotonie de f n'est pas utile pour prouver l'existence de α par dichotomie). C'est la méthode utilisée par Cauchy (cf. [35], note 3).
— Toute fonction continue sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$ (Raisonner par l'absurde, et effectuer une dichotomie). On peut en déduire, par une méthode due à Weierstrass, que, dans ces conditions, f atteint ses bornes supérieure M et inférieure m. (Raisonner par l'absurde et introduire les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{M-f(x)} \text{ et } x \mapsto \frac{1}{f(x)-m}).$$

— Principe de Lagrange : Si f est dérivable sur $[a,b]$ et si $f'\geqslant 0$, alors f est croissante sur $[a,b]$. (Sinon il existe des points c et d de $[a,b]$ tels que $c<d$ et $f(d)-f(c)<0$. On construit alors une suite dichotomique $[c_n,d_n]$ telle que pour tout entier n,

$$\frac{f(d_n)-f(c_n)}{d_n-c_n} \leqslant \frac{f(d)-f(c)}{d-c}.$$

Les suites (c_n) et (d_n) convergent vers un élément α de $[a,b]$, et on montre que

$$\frac{f(d_n)-f(c_n)}{d_n-c_n} \to f'(\alpha).$$

L'inégalité $f'(\alpha) \leq \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$ contredit l'hypothèse $f'(\alpha) \geq 0$).

c) Ces exemples montrent que les *activités numériques* peuvent fort bien mettre en jeu des méthodes très efficaces pour *l'approfondissement théorique* des concepts de l'analyse, qui en retour, permet de *contrôler les algorithmes utilisés* (existence et séparation des racines).

La méthode de dichotomie permet en effet de séparer les zéros d'une fonction de classe C^2 sur un intervalle compact $[a,b]$. Eliminons provisoirement le cas où f admet au moins un zéro multiple.

L'idée est d'effectuer une subdivision de $[a,b]$ par dichotomie en intervalles $[c_k,c_{k+1}]$ de longueur $\frac{b-a}{2^n}$ et d'effectuer un test selon le signe de $f(c_k)\ f(c_{k+1})$. Une difficulté théorique non négligeable surgit : si $f(c_k)\ f(c_{k+1})<0$, on est sûr que f admet au moins un zéro sur $]c_k,c_{k+1}[$, mais l'unicité n'est pas assurée. De même, si $f(c_k)f(c_{k+1})>0$, il pourrait arriver qu'il y ait par exemple deux zéros, même si $\frac{b-a}{2^n}$ est très petit. A cette difficulté théorique s'ajoute une difficulté liée à la précision du calcul : si on calcule $f(c_k)f(c_{k+1})$ à la précision 10^{-p}, on ne pourra conclure que si $|f(c_k)f(c_{k+1})|$ est, par exemple, supérieur à 2.10^{-p}. On peut cependant surmonter la difficulté théorique, en observant que si $|f(c_k)|$ est grand, $f(x)$ reste de signe constant sur $[c_k,c_{k+1}]$ si n est assez grand. Au contraire si $|f(c_k)|$ est petit, $f'(x)$ reste de signe constant sur $[c_k,c_{k+1}]$ ce qui garantit la monotonie de f sur cet intervalle, auquel cas le test permet de conclure.

De façon précise, on est amené à déterminer des majorants

β et γ de $M_1(f)=\sup\limits_{t\in[a,b]}|f'(t)|$ et $M_2(f)=\sup\limits_{t\in[a,b]}|f''(t)|$.

Alors il existe un entier p tel que, pour tout entier $n\geq p$, et pour tout point x de $[a,b]$, l'une au moins des conditions suivantes soit satisfaite :

a) $|f(x)|>\beta\frac{b-a}{2^{n-1}}$;

b) $|f'(x)|>\gamma\frac{b-a}{2^{n-1}}$.

On considère alors la subdivision de pas constant $\frac{b-a}{2^p}$.

— Si $f(c_{k-1})f(c_{k+1})>0$, f n'admet pas de zéro sur $[c_{k-1},c_{k+1}]$.

— Si $f(c_k)f(c_{k+1})\leq 0$, f admet un zéro et un seul sur $[c_{k-1},c_{k+1}]$.

(Il suffit de distinguer deux cas suivant que $|f(c_k)|$ satisfait ou non à la condition a), et on conclut à l'aide de l'inégalité des accroissements finis).

Enfin, le cas ambigu où $f(c_k)$ est très petit peut être étudié à l'aide d'une étude locale de f au voisinage de c_k.

Commentaire

On obtient ainsi un algorithme permettant de séparer les zéros de f. On prend d'abord $n=1$. Lorsque $c_1=\frac{a+b}{2}$ satisfait à l'une des relations a) et b), le signe de $f(a)f(b)$ détermine le nombre de zéros de f dans l'intervalle $[a,b]$. Lorsque c_1 ne satisfait à aucune de ces relations, on subdivise $[c_0,c_1]$ et $[c_1,c_2]$ en deux intervalles. On continue ce processus, et les résultats précédents montrent qu'on aboutit au bout d'un nombre fini de pas. En pratique, on a intérêt à visualiser les résultats en construisant le graphique de f point par point.

Bien entendu, cette méthode échoue en pratique lorsque les zéros de f sont très mal séparés. Néanmoins, elle permet alors de détecter un tel phénomène.

Pour un exposé plus détaillé et un choix d'exemples numériques, on pourra se reporter à[4] et [6].

4) Note historique

L'usage de la dichotomie pour séparer les racines d'une équation est fréquent au dix-huitième siècle, notamment chez L. Euler et J.L. Lagrange [36]. La première intervention théorique de la dichotomie apparaît dans le mémoire de Bolzano de 1817 sur le théorème des valeurs intermédiaires [34]. A.L. Cauchy utilise une variante de la dichotomie pour ce même théorème dans son cours d'analyse algébrique à l'école polytechnique de 1821, dont la note III est toute entière consacrée à la résolution numérique des équations. Dans ses cours d'analyse, à partir de 1860, K. Weierstrass systématise l'emploi de la dichotomie pour démontrer les théorèmes fondamentaux sur les suites de nombres réels et sur les fonctions continues ainsi que des résultats de base concernant les fonctions d'une variable complexe [29]. Dès lors, via le théorème de Bolzano-Weierstrass, la dichotomie figure parmi les procédés les plus puissants pour prouver des théorèmes d'existence, et son champ d'intervention est progressivement élargi dans deux directions importantes [12] :

— la propriété des segments emboîtés se généralise aux espaces métriques complets ;

— la propriété de subdivision en petits morceaux conduit au concept de précompacité.

Le procédé de Bolzano-Weierstrass est alors généralisé aux espaces métriques précompacts et complets, ce qui permet de l'appliquer à des problèmes très variés d'analyse fonctionnelle (équations différentielles et intégrales, théorie spectrale,...).

II. UTILISATION D'UN SYSTEME DYNAMIQUE DISCRET : METHODE DE BERNOULLI

1) Description de la méthode de Bernoulli :

a) Supposons donné un système dynamique discret dont le comportement est décrit par une suite $n \mapsto u(n)$ satisfaisant à la relation de récurrence suivante

(1) $$u(n+p) = \alpha_{p-1}u(n+p-1) + \alpha_{p-2}u(n+p-2) + \ldots + \alpha_1 u(n+1) + \alpha_0 u(n),$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_p$ sont des nombres réels donnés, et aux conditions initiales

(2) $u(0) = \beta_0,\ u(1) = \beta_1, \ldots,\ u(p-1) = \beta_{p-1}$,

où $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1})$ sont des nombres réels donnés.

Il est immédiat que l'application

$$u \overset{\varphi}{\mapsto} (u(0), u(1), \ldots, u(p-2))$$

est un isomorphisme de l'espace vectoriel E des solutions de (1) sur l'espace vectoriel $\mathbf{R}^p$. En particulier, dim E = p.

b) Parmi les solutions de (1), l'une d'elle joue un rôle privilégié. Il s'agit de la *solution fondamentale f* satisfaisant aux conditions initiales

(2′) $f(0) = 0\ ,\ f(1) = 0\ , \ldots,\ f(p-2) = 0\ ,\ f(p-1) = 1.$

Introduisons l'opérateur de translation T défini par la relation $(Tu)(n) = u(n+1)$. Il est immédiat que si $u \in E$, $Tu \in E$. En particulier, $f_1 = f$, $f_2 = Tf, \ldots, f_p = T^{p-1}f$ appartiennent à E. Il est alors facile de voir, en utilisant l'isomorphisme φ que $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une base de E.

Ainsi, la solution fondamentale f suffit pour engendrer, par translations successives, l'espace de toutes les solutions de (1). En outre la résolution explicite du problème de Cauchy (1) et (2) est alors très facile : on décompose la solution u dans la base $(f_1, \ldots, f_p)$. Le calcul des composantes de u se ramène à la résolution d'un système *triangulaire*.

c) L'équation (1) s'écrit encore $P(T)(u) = 0$, où $P = X^p - \alpha_{p-1} X^{p-1} \ldots - \alpha_1 X - \alpha_0$.

Ce polynôme s'appelle polynôme caractéristique de l'équation (1). Bornons-nous, pour simplifier, au cas où toutes les racines de P sont simples, et écrivons P sous la forme $P = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)$, où, pour tout $j \in [1,p], \lambda_j \in \mathbf{C}$.

L'étude du cas particulier $P = X - \lambda$, i.e. $u(n+1) = \lambda u(n)$, conduit à introduire la suite géométrique $e_\lambda : n \mapsto \lambda^n$.

On prouve alors que $(e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \ldots, e_{\lambda_p})$ est une base de l'espace vectoriel E.

d) Supposons maintenant que l'on veuille étudier le comportement asymptotique de la solution de (1), satisfaisant aux conditions initiales (2). On évalue f dans la base précédente. Pour tout entier n,

(3) $u(n) = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + \ldots + a_p\lambda_p^n.$

Plaçons nous dans le cas simple où il existe une racine réelle de P, soit λ_1, telle que, pour tout $j \in [2,p]$, $|\lambda_j| < |\lambda_1|$. Alors, si $a_1 \neq o$,

(4) $u(n) \sim a_1\lambda_1^n$.

Le comportement symptotique de u est donc gouverné par la racine de plus grand module du polynôme caractéristique P.

e) Un exemple célèbre est celui de la suite de Fibonacci

(1) $u(n+2) = u(n+1) + u(n)$

(2) $u(0) = 0 \quad u(1) = 1$

étudiée en 1202 par Léonard de Pise (alias Fibonacci) à propos de la croissance d'une population de lapins.

Ici $P = X^2 - X - 1$, $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\mu = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Donc $|\lambda| > 1$ et $|\mu| < 1$.

D'autre part $u(n) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} [\lambda^n - \mu^n]$;

Donc $u(n) \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

On peut vérifier cette évaluation expérimentalement, à la main ou sur calculatrice.

Remarque. Ici le coefficient de λ^n n'est pas nul. Il est intéressant de considérer la solution $u = e_\mu$ de (1), qui satisfait aux conditions initiales

$$e_\mu(o) = 1\ ,\quad e_\mu(1) = \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Comme $|\mu| < 1$, $e_\mu(n) = \mu^n \to 0$. Cependant si on calcule les valeurs successives de u en utilisant (1) et (2), on aboutit au résultat paradoxal que $|u(n)|$ après une période de décroissance vers 0, se met à croître indéfiniment ! Ce paradoxe s'explique notamment par le fait que la calculatrice fait une erreur d'arrondi sur $u(1) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; le calcul effectué n'est pas celui de e_μ mais d'une solution dont la composante suivante λ est *non nulle*, bien que très petite (de l'ordre de 10^{-8}, ou 10^{-10}, suivant la calculatrice utilisée). Au début du calcul, c'est le terme en μ^n qui est prépondérant, et $|u(n)|$ décroît vers 0, mais à partir d'un certain rang, le terme en λ^n prend le pas sur l'autre, si bien que $|u(n)| \to +\infty$.

f) Cet inconvénient n'apparaît jamais lorsque l'on considère la solution fondamentale f. En effet, aucune des composantes de f dans la base $(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_p})$ n'est nulle (sinon, les translatées de f appartiendraient à un sous espace vectoriel strict de E, ce qui contredit le fait que $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une base de E).

Considérons donc la solution fondamentale f de (1) et plaçons-nous dans le cas, décrit au d), où $|\lambda_j| < |\lambda_1|$.

Alors, d'après f), $a_1 \neq 0$. Donc $f(n) \sim a_1\lambda_1^n$, et, par suite, à partir d'un certain rang $f(n) \neq 0$, et

(5) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \lambda_1.$$

g) L'idée de D. Bernoulli est de *renverser toute la situation précédente*. Cette fois, on se donne un polynôme P dont toutes les racines sont simples, (mais inconnues). On suppose que, $\forall j \in [2,p], |\lambda_j| < |\lambda_1|$. Pour trouver des valeurs approchées de λ_1, on associe à ce polynôme P le système dynamique défini par les conditions

$$f(n+p)=\alpha_{p-1}f(n+p-1)+\ldots+\alpha_1 f(n+1)+\alpha_0 f(n)$$
$$f(0)=0,\ f(1)=0,\ \ldots,\ f(p-2)=0,\ f(p-1)=1.$$

Alors $\lambda_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n+1)}{f(n)}$.

On peut facilement évaluer la rapidité de convergence de cette suite :

soit $k = \dfrac{\sup\limits_{j\neq 1}|\lambda_j|}{|\lambda_1|}$; alors $\dfrac{f(n+1)}{f(n)} - \lambda_1$ est dominé par une suite géométrique de raison k. En particulier, la rapidité de convergence est d'autant plus grande que $|\lambda_1|$ est mieux séparé des autres valeurs $|\lambda_j|$.

h) *Quelques exemples numériques* permettant une analyse de la pertinence de la méthode précédente.

α) P = X^3-2X^2-X+1	Trois racines réelles λ,μ,ν ;
$\lambda\in]2,3[$	Appliquer directement l'algorithme de Bernoulli.
$\mu\in]1/2,1[$	Translation $X\mapsto X-1$, et passage à l'équation aux inverses.
$\nu\in]-1,-1/2[$	Translation $X\mapsto X+1$, et passage à l'équation aux inverses.
β) P = X^2-X-1	(ce n'est pas une plaisanterie !)
γ) P = X^3-X^2-2X+1	(analogue à α)
δ) P = X^3-2X-5	Il y a une seule racine réelle λ, et $\lambda\in]2,3[$. Les racines complexes μ et $\bar{\mu}$ satisfont à $|\mu|^2\lambda = 5$, donc $|\mu|<\lambda$, et la méthode de Bernoulli s'applique.
ε) P = X^3-7X+7	Trois racines réelles λ,μ,ν ; $\lambda\in]-4,-3[$ et $\mu,\nu,\in]1,2[$.

On trouvera d'autres exemples numériques dans le texte très remarquable de L. Euler [37] constituant le chapitre 17 de l'introduction à l'analyse des infiniments petits. Voir aussi [8], chapitre 7.

Remarque. Bien entendu, le rôle de ces exemples n'est pas de fournir une illustration numérique de la théorie esquissée ci-dessus. C'est à travers leur étude que l'on pourra aborder les différents facteurs mis en jeu, et mettre à l'épreuve son domaine de fonctionnement.

2) Commentaires.

Cette méthode permet de déterminer des valeurs approchées de toutes les racines réelles d'un polynôme P scindé sur **R** dont toutes les racines sont simples. On commence par séparer les racines de P. Pour calculer une valeur approchée de l'une de ces racines, notée λ, on effectue une translation de telle sorte que λ soit la racine de plus petit module. (Il suffit de placer l'origine au milieu d'un intervalle ne contenant que la racine λ.) On forme alors l'équation aux inverses, pour laquelle l'hypothèse de la méthode de Bernoulli est satisfaite, ce qui fournit un algorithme d'approximation de λ.

Remarque. Ayant déjà déterminé la plus grande racine λ_1, on pourrait essayer d'obtenir la racine suivante en introduisant la suite $f(n+1) - \lambda_1 f(n)$, et en prenant la limite du quotient de termes consécutifs. Cette méthode est d'une précision numérique désastreuse, car $f(n+1)$ et $\lambda_1 f(n)$ sont équivalents, et l'erreur commise sur λ_1 devient rapidement prépondérante lorsque n augmente. La méthode de Bernoulli peut s'étendre au cas où P admet des racines complexes, mais la technicité requise est nettement plus forte ; on pourra se reporter à [4], [6] et [8].

3) Objectifs.

a) La méthode de Bernoulli constitue un excellent terrain combinant *approfondissement expérimental* et *approfondissement théorique* :

— C'est bien entendu sur des exemples numériques que l'on peut aborder cette méthode, très simple à mettre en œuvre sur le plan expérimental.
— Les facteurs gouvernant la rapidité de convergence peuvent être mis facilement en évidence ; des transformations algébriques simples permettent d'agir sur ces facteurs.
— C'est encore sur des exemples très simples que l'on peut cerner le domaine de fonctionnement de la méthode (racines complexes, racines multiples ou mal séparées), de préciser les cas de stabilité ou d'instabilité et d'agir sur cette stabilité.
— Ce dernier point est à relier à la pertinence des moyens de calculs utilisés, notamment en ce qui concerne l'influence des erreurs d'arrondi.

Remarque 1. A un niveau d'approfondissement plus élevé, on peut comparer la performance de cette méthode à celle de variantes (calcul des sommes de Newton des racines, méthode de Graeffe ; voir [8] chap. 7 et [6] chapitre 7, § 3).

Remarque 2. Le texte de L. Euler cité plus haut met en valeur les aspects précédents d'une façon magistrale. Des extraits de ce texte peuvent être directement utilisés par les élèves.

b) La méthode de Bernoulli met en évidence l'importance du travail *intersectoriel* en mathématiques.

— D'une part la connaissance des racines du polynôme caractéristique (qui relève d'un problème *algébrique*) détermine le comportement asymptotique d'un système dynamique discret (problème *d'analyse*) lui-même pouvant être relié à des secteurs scientifiques très variés (croissance de populations, évolution de systèmes économiques et biologiques, problèmes combinatoires,...)
— Réciproquement, ce comportement asymptotique fournit une méthode de recherche de valeurs approchées des racines d'un polynôme. Il s'agit ici d'un exemple très intéressant de *simulation* d'une équation

algébrique par un *système dynamique discret* gouverné par cette équation, qui offre prise aux moyens de *calcul arithmétique*. Cette idée a une grande portée : on peut par exemple l'employer pour la recherche des *valeurs propres* et des *vecteurs propres* des matrices. (Voir par exemple [17], chap. 7, [8] tome II, chap. 11, et [6] chap. 8, § 7).

— Une méthode en tous points analogue permet de relier une équation algébrique au comportement d'un *système dynamique continu*, décrit pour des équations différentielles linéaires à coefficients constants, dont l'étude est reliée à celle de systèmes variés (mécaniques, électrique, biologiques,...) voir [11] et [15], ce qui permet des moyens de *calcul analogique*.

— Enfin, les concepts de *l'algèbre et de l'analyse linéaire* jouent un rôle central dans les démarches précédentes.

4) Note historique.

L'utilisation des équations algébriques pour l'étude de récurrences linéaires trouve son origine dans l'exemple célèbre de la suite de Fibonacci, qui figure dans le Liber Abacci de Léonard de Pise (1202) ; on remarquera que cette suite est associée à un système dynamique (croissance d'une population de lapins). Principalement en vue d'étudier le calcul des différences finies, l'emploi des méthodes algébriques s'impose progressivement à travers les travaux de Briggs, Wallis et Newton. Les travaux de Newton et des frères Jean et Jacques Bernoulli mettent en lumière l'importance du rôle des développements en série entière des fractions rationnelles. Ces travaux fonctionnent dans le sens : équations algébriques → équations récurrentes et différentielles. En 1728, Daniel Bernoulli [31] met en évidence l'intérêt de la démarche inverse. En 1748, Léonard Euler, dans le chapitre 17 de l'introduction à l'analyse des infiniments petits [37], effectue une étude systématique de la méthode; l'emploi des développements en série entière, la convergence est envisagée sous un angle quantitatif, et ne fait l'objet d'aucune étude théorique. En 1759, Lagrange introduit le concept général d'équation caractéristique, et développe une théorie systématique des équations aux différences finies [43][44]. Enfin Laplace systématise l'emploi des séries génératrices d'une suite numérique [45]. Les extensions de la méthode de Bernoulli à la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres des matrices ont été introduites à partir de 1930 et connaissent maintenant un développement important lié à l'apparition de moyens de calcul très performants. Pour cette extension, on pourra se reporter à [6], [8], [17].

III. UTILISATION D'UNE EQUATION A POINT FIXE

1) Introduction

On considère une équation numérique de la forme $F(x) = 0$, où F est de classe C^1 sur I, et admet un zéro a et un seul dans I. (On peut se ramener à ce cas, après séparation des racines de l'équation $F(x) = 0$).

Parmi les équations de ce type, figurent les *équations à point fixe*, du type $f(x) = x$, pour lesquelles on dispose, sous des hypothèses convenables, d'un algorithme de recherche de solutions approchées très efficace, consistant à utiliser la suite récurrente $u_n = f(u_n)$. (*Méthode des approximations successives*).

Dès lors la stratégie est claire : d'une part, étudier la méthode du point fixe et les facteurs qui gouvernent la performance de cette méthode ; d'autre part, construire des procédés permettant de ramener l'équation donnée $F(x) = 0$ à une équation à point fixe pour laquelle la méthode des approximations successives est performante.

2) Enoncé des problèmes

Nous allons préciser la démarche esquissée ci-dessus :

Considérons une fonction de classe C^1 sur un intervalle I de **R**, telle que $f(I) \subset I$. On se pose les quatre problèmes suivants :

Problème 1.

Existe-t-il un point a de I tel que $f(a) = a$? Ce point est-il unique ?

Problème 2.

Soit alors c un élément de I. La suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = c$, converge-t-elle vers a ?

Problème 3.

Si oui, étudier la rapidité de convergence de (u_n) vers a, et la stabilité de cette convergence. Déterminer les facteurs qui gouvernent cette rapidité de convergence.

Les problèmes 1 et 2 sont d'ordre qualitatif ; le problème 3 est d'ordre quantitatif. Nous verrons que c'est la pente des sécantes, ou des tangentes, du graphe de f qui joue un rôle essentiel.
D'où le problème suivant.

Problème 4

Soit F une fonction de classe C^1 sur I admettant un zéro a et un seul sur I. Déterminer une fonction g de classe C^1 sur un intervalle J contenant a et contenu dans I satisfaisant aux deux conditions suivantes :

a) L'équation $F(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$ lorsque $x \in J$.

b) La valeur de $|g'(a)|$ est très petite, et, si possible, nulle.

La recherche de telles fonctions g procède de méthodes très diverses. Il s'agit alors de comparer la performance de ces différentes méthodes.

Dans ce qui suit, nous nous bornerons à étudier quelques points clefs, renvoyant pour plus de détail à la brochure *Analyse I* publiée par l'IREM de Marseille [5], partie 4, où l'on trouvera une bibliographie détaillée.

3) Etude de l'existence et unicité d'une solution et de sa stabilité. (Résolution des problèmes 1 et 2).

On dispose de plusieurs types d'énoncés. Le premier est de type *topologique* et s'appuie sur la notion de *connexité* :

Théorème 1. Soit f une application continue d'un intervalle compact $[\alpha,\beta]$ dans lui-même. Alors f admet au moins un point fixe.

(Il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x \mapsto f(x)-x$).

On notera que ce théorème ne s'étend pas au cas d'un intervalle I non compact, même si I est fermé ; ainsi, lorsque $I=\mathbf{R}$, la fonction $f : x \mapsto x+1$ n'admet aucun point fixe.

D'autre part, ces points fixes ne s'obtiennent pas nécessairement par itération : c'est le cas lorsque

$$I = [-1, +1] \quad \text{et} \quad f(x) = -x.$$

On peut cependant décrire des algorithmes permettant d'approcher un point fixe, par exemple en utilisant une barycentration. (Voir Analyse I [5]).

L'énoncé le plus classique est de type *métrique* et se fonde sur la notion de *complétion*.

Théorème 2. Soient I un intervalle fermé de **R**, et f une application de I dans lui-même lipschitzienne dans un rapport $k < 1$. (On dit que f est k-contractante).

1. Il existe un élément a de I et un seul tel que $f(a) = a$.
2. Pour tout élément c de I, la suite définie par les relations $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = c$ converge vers a.
3. Pour tout entier n,

$$(1) \qquad |u_n - a| \leqslant \frac{k^n}{1-k} |u_1-u_0|$$

Idée de la démonstration. Pour obtenir *l'existence du point fixe, et la convergence de* (u_n) *vers a,* on montre que la suite (u_n) est de Cauchy en utilisant la majoration

$$|u_q-u_p| \leqslant |u_{p+1}-u_p| + |u_{p+2}-u_{p+1}| + \dots + |u_q-u_{q-1}| \leqslant |u_1-u_0| (k^p+k^{p+1} \dots\dots +k^{q-1})$$

un passage à la limite dans cette relation fournit alors la relation (1).

Remarque 1. L'assertion 3 fournit une première indication sur la rapidité de convergence : elle est au moins d'ordre géométrique, et gouvernée par la valeur de k. Elle assure aussi la *stabilité* de l'algorithme utilisé.

Remarque 2. Lorsque f est continûment dérivable sur I, à dérivée bornée, le théorème des accroissements finis montre que f est lipschitzienne dans le rapport $k = \sup |f'(t)|$. *C'est donc la pente des tangentes qui gouverne la rapidité de convergence ;* plus précisément, comme $u_n \to a$, *c'est la valeur de* $f'(a)$ *qui gouverne la rapidité asymptotique de convergence.* Nous préciserons ce point au d.)

Remarque 3. Il suffit pas que, pour tout couple (x,y) d'éléments distincts de I, $|f(x) - f(y)| < |x-y|$. Ainsi, lorsque $I = [1,+\infty[$ et que $f(x) = x+\frac{1}{x}$, cette condition est réalisée, mais f n'a aucun point fixe. "Moralement", le point fixe est rejeté à l'infini. Pour empêcher l'apparition de ce phénomène, on peut supposer que I est *compact.*

Théorème 3. Soient $I = [\alpha,\beta]$ un intervalle compact de **R** et f une application de I dans lui-même telle que, pour tout couple (x,y) de points distincts de I,

$$|f(x) - f(y)| < |x-y| .$$

Alors

1. L'application f admet un point fixe a et un seul.
2. Pour tout élément c de I, la suite définie par les relations $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = c$ converge vers a.

Pour obtenir l'existence de a, on observe que la fonction continue $x \mapsto |f(x) - x|$ atteint sa borne inférieure sur l'intervalle compact $[\alpha,\beta]$ en au moins un point a. Alors $f(a) = a$. La démonstration de l'assertion 2 est plus délicate ; elle s'appuie sur la notion de valeur d'adhérence d'une suite ; on la trouvera esquissée dans Analyse 1 [5], et dans [4].

Contrairement au précédent, cet énoncé ne fournit plus aucune indication sur la rapidité de convergence, qui peut d'ailleurs être arbitrairement lente.

Notons finalement que l'existence d'une limite pour la suite (u_n) peut aussi être obtenue par *monotonie.* Plus précisément :

Théorème 4. Soient $I = [\alpha,\beta]$ un intervalle compact de **R**, f une application continue de I dans lui-même, c un point de I et (u_n) la suite définie par les relations $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = c$. Soit enfin F l'ensemble des points fixes de f (qui est fermé et non vide d'après le théorème 1).

1. On suppose que f est croissante sur I.

— Si $u_1 \geqslant u_0$ la suite (u_n) est croissante et converge vers le plus petit élément a de $F \cap [u_0, +\infty[$.

— Si $u_1 \leqslant u_0$ la suite (u_n) est décroissante et converge vers le plus grand élément b de $]-\infty, u_0] \cap F$.

Dans les deux cas, on dit que l'itération est "en escalier" (voir figures 1 et 2).

2. On suppose que f est décroissante sur I ; alors f admet un point fixe a et un seul.

— Si $u_0 \leqslant a$ et $u_2 \geqslant u_0$, la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante ; elles convergent toutes deux vers a.

— Si $u_0 \geqslant a$ et $u_2 \leqslant u_0$, la suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante ; elles convergent toutes deux vers a.

— Si $u_0 < a$ et $u_2 \leqslant u_0$, la suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante ; elles convergent vers deux points fixes b et c de f o f, tels que $b<a<c$. En particulier, la suite (u_n) diverge.

— Si $u_0 > a$ et $u_2 \geqslant u_0$, la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante ; elles convergent vers deux points fixes b et c de f o f, tels que $c<a<b$. En particulier, la suite (u_n) diverge.

Dans les quatre cas on dit que l'itération est en spirale (cf. figures 3 et 4).

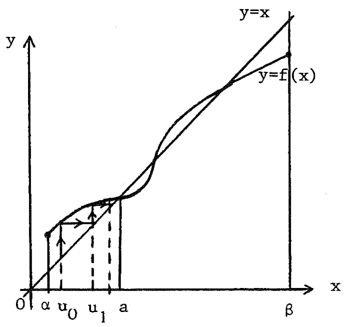


figure 1 : escalier croissant

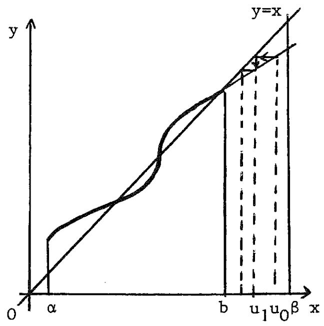


figure 2 : escalier décroissant

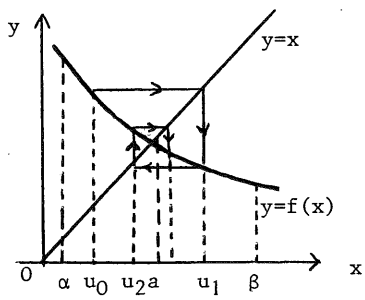


figure 3 : spirale convergente

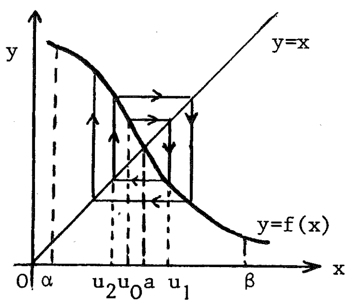


figure 4 : spirale divergente

La démonstration est immédiate.

Pour l'assertion 2, on observe que f o f est croissante.

Remarque 1. En dehors des cas couverts par les théorèmes 2 à 4, le comportement de la suite (u_n) peut être *très complexe,* comme le montre l'exemple, en apparence très simple, où I = [0,1] et $f(x) = \alpha x(1-x)$, où $\alpha \in [0,4]$. L'étude topologique du comportement de (u_n) est alors liée de façon étroite à celle des points périodiques, i.e. des solutions de l'équation $f^n(x) = x$. Cet aspect fait à l'heure actuelle l'objet de nombreux travaux mathématiques (cf. notamment les travaux de Smale et de Jonker).

Remarque 2. Pour ce qui est de la stabilité de l'algorithme des approximations successives, on pourra se reporter à Analyse I [5]. Il nous suffira ici de savoir que cette stabilité est assurée si $|f'(a)|$ est nettement inférieur à 1.

4) Etude de la rapidité de convergence (Etude du problème 3)

Considérons à nouveau un intervalle fermé I de **R**, et f une application de I dans lui-même, continûment dérivable sur I. On suppose que f admet un point fixe a et un seul (nous avons étudié au 3) des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi). Nous nous bornerons à étudier les cas

$$0 < |f'(a)| < 1 \quad , \quad f'(a) = 0,$$

qui assurent la stabilité de l'algorithme.

a) Cas où $0 < |f'(a)| < 1$.

Considérons un nombre réel positif k tel que

$$|f'(a)| < k < 1.$$

Comme f' est continue, il existe un intervalle compact $J = [a-\alpha, a+\alpha]$, $\alpha > 0$, tel que pour tout point x de $J \cap I$, $|f'(x)| \leqslant k$.

Alors $J \cap I$ est un intervalle compact stable par f, et pour tout point c de $J \cap I$, la suite (u_n) définie par les relations $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = c$ converge vers a et

$$(1) \qquad |u_n - a| \leqslant \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|.$$

$$(2) \qquad |u_n - a| \leqslant k^n \, |c-a|.$$

Ainsi, (u_n) *converge vers* a, *et* $|u_n - a|$ *est dominée par* k^n.

Remarque. L'inégalité (2) ne peut pas être fortement améliorée : prenons k' tel que $0 < k' < |f'(a)|$. Alors,

$$(3) \qquad k'^n \, |u_0 - a| \leqslant |u_n - a|.$$

Les relations (2) et (3) suggèrent que $|u_n - a|$ se comporte comme ρ^n, où $\rho = |f'(a)|$ (mais elles ne suffisent pas à le prouver !).

Le résultat suivant, dont on trouvera la démonstration dans Analyse I [5], permet de conclure :

Théorème 1. *Evaluation de la rapidité de convergence si* $0 < |f'(a)| < 1$.

Soit f une fonction de classe C^1 sur I satisfaisant aux deux conditions suivantes :

a) $0 < |f'(a)| < 1$

b) $f(x) = a + (x-a) f'(a) + 0(|x-a|^s)$, où $s > 1$.

Il existe alors un nombre réel $b > 0$ tel que

$$(4) \qquad |u_n - a| \sim b\, |f'(a)|^n.$$

Ce résultat fournit une estimation très précise de la rapidité de convergence, et montre en particulier que cette rapidité est gouvernée par $|f'(a)|$.

Remarque. Bien entendu, en pratique, on ignore la valeur exacte de a, et de $f'(a)$. C'est pourquoi on utilisera plutôt la relation (2), en prenant pour k le maximum de $|f'|$ sur un petit voisinage compact de a.

b) Cas où $f'(a) = 0$.

La première partie du raisonnement précédent reste valable, et montre que, pour tout nombre k tel que $0 < k < 1$, $|u_n - a|$ est dominée par k^n. Il faut donc s'attendre à une convergence très rapide. Pour majorer $|u_n - a|$ nous ferons l'hypothèse suivante satisfaite dans la quasi-totalité des cas rencontrés en pratique, et d'interprétation géométrique très simple :

Il existe un nombre réel r strictement supérieur à 1 et un nombre réel strictement positif λ tels que, au voisinage de a,

$$|f(x) - f(a)| \sim \lambda\, |x - a|^r.$$

On notera que cette condition est satisfaite lorsque f est de classe C^r sur I, où $r \geqslant 2$, et que

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(r-1)}(a) = 0,\ f^{(r)}(a) \neq 0.$$

Soient alors μ et μ' des nombres réels tels que

$$\mu' < \lambda < \mu.$$

Il existe un nombre réel strictement positif η tel que, pour tout élément de x de $J = [a - \eta, a + \eta]$,

$$\mu' \,|x-a|^r \leqslant |f(x) - f(a)| \leqslant \mu\, |x-a|^r.$$

En outre si $\eta^{r-1} < \dfrac{1}{\mu}$, alors J est stable par f.

On suppose désormais que ces conditions sont réalisées et que c appartient à J. On pose

$$k = \mu^{1/(r-1)}\, |c-a| \text{ et } k' = \mu'^{1/(r-1)}\, |c-a|.$$

Il est immédiat que $0 < k' < k < 1$ et que, pour tout entier naturel n,

$$(5) \qquad k'^{(r^n)} \frac{|c-a|}{k'} \leqslant |u_n - a| \leqslant k^{(r^n)} \frac{|c-a|}{k}.$$

Comme $k < 1$, la rapidité de convergence est beaucoup plus grande que dans le cas où $|f'(a)| \neq 0$. Cette rapidité est essentiellement gouvernée par le nombre r, *ordre du contact* au point fixe a entre la courbe $y = f(x)$ et la tangente (horizontale) à cette courbe. Lorsqu'une suite (u_n) satisfait à une relation du type (5) on dit que la *convergence est d'ordre* r ; lorsque $k = 1/10$, à chaque pas on *multiplie par r le nombre de décimales exactes.*

Un calcul asymptotique permet de démontrer le résultat suivant, dont la démonstration est donnée dans Analyse I [5] et dans [4].

Lorsque c appartient à J, il existe un nombre réel δ appartenant à $]0,1[$ tel que

$$(6) \qquad |u_n - a| \sim \delta^{(r^n)} \frac{|c-a|}{\delta}.$$

En outre, $k' \leqslant \delta \leqslant k$.

Remarque 1. On peut aussi étudier la rapidité de convergence lorsque $|f'(a)| = 1$, auquel cas on obtient des convergences en $1/n^s$, c'est-à-dire lentes. L'intérêt didactique de ce cas est donc de fournir un procédé de construction d'approximations lentes. Nous renvoyons pour plus de détails à Analyse I [5]. Des exemples très simples de suites convergeant lentement vers 0 peuvent être étudiés ; par exemple

$$I = [0, +\infty[,\ f(x) = \frac{x}{1+x} \quad ; \quad I = [0, +\infty[,\ f(x) = x\,e^{-x} ;$$

$$I = [0, \pi/2],\ f(x) = \sin x \quad ; \quad I = [0, +\infty[,\ f(x) = 1 - e^{-x}.$$

5) Méthodes de transformations d'une équation en une équation à point fixe (Etude du problème 4).

Nous nous bornons ici à esquisser quatre méthodes, très classiques, renvoyant aux bons ouvrages [6] et [8] pour d'autres algorithmes.

a) Linéarisation de l'équation par le calcul différentiel (Méthode de Newton-Raphson)

Décrivons d'abord *l'idée* intuitive gouvernant cette méthode. Supposons que l'on connaisse déjà une valeur approchée c de l'unique nombre a tel que $F(a) = 0$. D'après la définition de la dérivée de F au point c, pour tout point x de I,

$$F(x) = F(c) + (x-c)\, F'(c) + o\,(x-c).$$

Comme $F(a) = 0$, et comme $a - c$ est petit, on peut vraisemblablement espérer que $F(c) + (a-c)\, F'(c)$ est petit par rapport à $(a-c)$.

Dans ces conditions on remplace l'équation *non linéaire* $F(x) = 0$ par l'équation *linéaire* approchée

$$(1) \qquad F(c) + (x-c)F'(c) = 0.$$

Supposons que F' ne s'annule pas sur I ; alors (1) admet une solution et une seule

$$(2) \qquad d = c - \frac{F(c)}{F'(c)}.$$

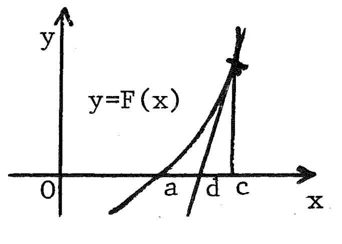
On a ainsi construit une "meilleure" valeur approchée d de a. Il reste alors à itérer ce processus, en prenant d comme valeur initiale à la place de c. On est donc conduit à envisager la suite (u_n) définie par les relations.

$$(3) \qquad u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)}. \qquad \text{(Algorithme de Newton)}$$

$$u_0 = c$$

Interprétation géométrique de la méthode de Newton. On approche a par l'abscisse d de l'intersection avec Ox de la tangente au graphe de F au point c.

Il reste à préciser des conditions sous lesquelles (u_n) converge vers a.



Ici, on remplace l'équation $F(x) = 0$ par l'équation $g(x)=x$, où $g(x)=x-\frac{F(x)}{F'(x)}$. En appliquant les résultats sur les équations à point fixe, on peut étudier la rapidité de convergence de la méthode de Newton (voir Analyse I). Comme $g'(a) = 0$, la convergence est d'ordre deux, c'est-à-dire qu'on double le nombre de décimales exactes à chaque pas.

Remarque 1. L'expérimentation et l'analyse théorique de la rapidité de convergence mettent en lumière un point très important : la convergence ne devient très rapide que si l'on initialise avec une valeur c approchant déjà assez bien a (par exemple $|c-a| \leqslant \frac{1}{10}$). C'est pourquoi, en pratique, il peut y avoir avantage à dégrossir la résolution de $F(x) = 0$ par une autre méthode (dichotomies, Bernoulli,...) et à passer ensuite à l'algorithme de Newton. Le cas des racines carrées est à cet égard éclairant : si on initialise la recherche de $a = \sqrt{1234}$ avec $c = 1000$, la convergence est lente au début. Si on calcule d'abord la partie entière de a à savoir 35, et si l'on prend $c = 35$, la convergence est très rapide dès le départ. Cela tient, bien entendu, au fait que la condition $f'(a) = 0$ implique seulement que f' est petit *au voisinage de* a.

Remarque 2. Il n'est pas toujours aisé de vérifier que les conditions de validité de la méthode de Newton sont satisfaites ; mais, en pratique, cette vérification est inutile. Ayant obtenu une valeur approchée b de a, on teste le signe de $F(b+10^{-p})$ et de $F(b-10^{-p})$, si p fixe la précision demandée. Sous l'hypothèse où F est monotone, ces tests permettent de prouver en toute rigueur que $|b-a| \leqslant 10^{-p}$ (tout au moins, tant que les erreurs d'arrondi dans le calcul de F(x) sont négligeables devant 10^{-p}).

b) Ajustement linéaire. Considérons une équation de la forme $F(x) = 0$, admettant une solution a et une seule, et supposons que $F'(a) \neq 0$, ce qui signifie que a est un zéro simple de F. L'idée consiste à transformer l'équation $F(x) = 0$ en l'équation équivalente

$$F(x)-\lambda x = -\lambda x,$$

où λ est un nombre réel non nul à choisir convenablement. On est alors ramené à l'équation à point fixe

$$g(x) = x \ , \quad \text{où } g(x) = x - \frac{F(x)}{\lambda}.$$

Comme $g'(x) = 1 - \frac{F'(x)}{\lambda}$, on choisit $\lambda = F'(a)$ de telle sorte que $g'(a) = 0$. En pratique il est rare que l'on connaisse $g'(a)$. On prendra donc λ de telle sorte que $|g'(a)|$ soit suffisamment petit. La convergence est géométrique.

Remarque 1. Lorsque l'équation de départ est sous la forme $f(x) = x$, on se ramène à ce cas en posant

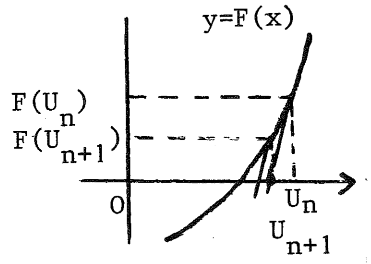
$$F(x) = f(x) - x.$$

Remarque 2. *Interprétation géométrique.*

La relation $u_{n+1} = g(u_n)$ équivaut à la relation

$$\lambda(u_{n+1} - u_n) + F(u_n) = 0.$$

Le point d'abscisse u_{n+1} s'obtient donc en coupant l'axe 0x par la droite passant par le point $(u_n, F(u_n))$ de pente λ.



Remarque 3. *Nouvelle approche de la méthode de Newton.*

En pratique, il est rare qu'on connaisse $F'(a)$, et il n'est pas possible d'effectuer le choix optimal $\lambda = F'(a)$. Ayant déjà obtenu un encadrement assez fin de a par une autre méthode (dichotomie, méthode de Bernoulli...) on pourra prendre $\lambda = F'(c)$, où c est voisin de a et poser $u_0 = c$. On peut alors penser à changer λ à chaque pas de façon à se rapprocher de la valeur optimale $\lambda = F'(a)$, ce qui conduit à l'algorithme suivant

$$u_0 = c \qquad \lambda_0 = F'(u_0)$$

$$u_1 = u_0 - \frac{F(u_0)}{\lambda_0} \qquad \lambda_1 = F'(u_1)$$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{\lambda_n} \qquad \lambda_{n+1} = F'(u_{n+1})$$

Autrement dit,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)}. \tag{1}$$

On retombe ainsi sur la méthode de Newton.

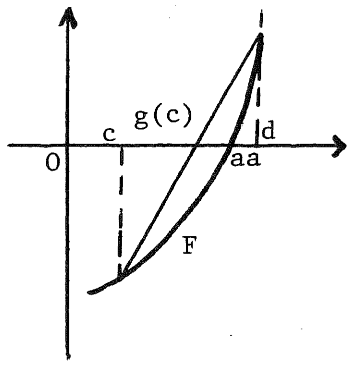
c) Interpolation linéaire

L'idée consiste à remplacer la fonction F par une fonction linéaire affine interpolant F sur un intervalle [c,d]. où c et d désignent des valeurs approchées de a telles que $c < a < d$. Dans ces conditions

$$g(x) = x - \frac{x - d}{F(x) - F(d)} F(x).$$

Interprétation géométrique de la méthode d'interpolation linéaire.

Supposons que l'on connaisse un encadrement [c,d] de la solution a. Alors g(c) n'est autre que l'abscisse du point d'intersection avec 0x de la sécante relative aux points c et d. Autrement dit, on effectue une *interpola-*



tion linéaire de F sur l'intervalle [c,d], et on remplace l'équation non linéaire F(x) = 0 par l'équation *linéaire* approchée.

$$x - \frac{c - d}{F(c) - F(d)} F(c) = 0.$$

Cette méthode porte des noms variés : interpolation linéaire, sécantes, fausse position, Lagrange, Descartes...

La convergence est géométrique ; l'étude théorique de cette convergence est esquissée dans Analyse I [5].

d) Passage aux fonctions réciproques

Considérons une équation f(x) = x et supposons que pour tout point x de I, $|f'(x)| > 1$. Alors, comme f' ne s'annule pas, f est strictement monotone sur I et admet donc une fonction réciproque g définie sur $I' = f(I)$. En outre g est de classe C^1 sur I' et, pour tout point y de I'.

$$|g'(y)| = \frac{1}{|f'(x)|} \quad \text{où } y = f(x).$$

Donc $|g'(y)| < 1$, et la méthode des approximations successives s'applique à g.

Remarque. Bien entendu cette méthode est déconseillée si les fonctions réciproques sont compliquées à calculer, ou si les rapports de lipschitz sont trop voisins de 1.

e) Cas des racines multiples.

Les méthodes précédentes échouent si F'(a) = 0 (ou si F'(a) est trop voisin de 0). Il convient alors de transformer préalablement l'équation F(x) = 0 de telle sorte que la racine a devienne une racine simple.

En analyse numérique, cette difficulté survient dès que deux racines sont mal séparées. Pour l'étude de tels cas on pourra se reporter à Durand, Chapitre 2 [6], et Berezin et Zhydkov, Chapitre 7 [8].

f) Quelques exemples illustrant ces méthodes et permettant de comparer expérimentalement leur performance.

Exemple 1. Résoudre l'équation numérique tgx = x, où

$$x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[,$$

à la précision 10^{-8}.

a) Poser tgx = y (Méthode des fonctions réciproques)
b) Traiter ensuite les cas où $x \in]n\pi, n\pi + \pi/2[$, lorsque n = 2,3,4.
c) Utiliser la méthode de Newton pour l'équation tgx = x, puis pour l'équation y = Arctgy + $n\pi$.

Exemple 2. Résoudre l'équation numérique $e^{5x} = x + 100$, où $x \geqslant 0$, à la précision 10^{-8}. Il est clair que $a \in [0,1]$.

a) Transformer cette équation en

$$y = \frac{1}{5} \text{Log}(y + 100).$$

b) Utiliser la méthode de Newton.
c) Comparer la performance de ces deux méthodes.

Exemple 3. Résoudre l'équation numérique shx = 100x, à la précision 10^{-8}.

a) Poser y = shx.
b) Poser y = e^x.
c) Utiliser un ajustement linéaire.
d) Comparer la performance de ces méthodes.

Exemple 4. Résoudre l'équation numérique
x = 30 Logx + 100 à la précision 10^{-8}.

a) Déterminer d'abord la partie entière de la solution a.
b) Effectuer un ajustement linéaire.
c) Employer la méthode de Newton.
d) Comparer la performance des procédés b) et c).

Exemple 5. Résoudre l'équation numérique $x^3 + x - 1 = 0$ à la précision 10^{-8}.

a) Prouver que $a \in [2/3, 3/4]$.
b) Effectuer un ajustement linéaire en prenant $\lambda = F'(2/3)$.
c) Employer la méthode de Newton.
d) Comparer.

Exemple 6. Résoudre l'équation x = Logx + 2, $x \geqslant 1$, à la précision 10^{-8}.

a) Combien faudrait-il d'itérations par l'algorithme $u_{n+1} = \text{Log}\, u_n + 2, \quad u_0 = 3$?
b) Effectuer un ajustement linéaire en prenant $\lambda = F'(3) = 2/3$, puis $\lambda = F'(u_1)$.
c) Employer la méthode de Newton.
d) Comparer la performance des méthodes b) et c).

Remarque. Dans les exemples précédents, on a choisi la précision 10^{-8} pour pouvoir apprécier plus clairement les performances des méthodes utilisées, ce que ne permettrait pas une précision moindre.

Pour le cas classique de calcul des racines carrées, des racines $n^{èmes}$, et des inverses, se reporter à la bibliographie sectorielle du thème 2 et, en particulier à Analyse 1.

6) Conclusion. L'étude précédente montre combien cette méthode du point fixe est au cœur des concepts fondamentaux de l'analyse, et ceci à tous les niveaux, puisque cette même méthode permet, ultérieurement, d'attaquer avec succès les équations matricielles, différentielles, intégrales, implicites, ...

Pour les notes historiques, nous renvoyons à la bibliographie sectorielle du thème 2. "Equations numériques".

BIBLIOGRAPHIE

On pourra aussi se reporter à la bibliographie sectorielle du thème 2 "Equations numériques".

OUVRAGES SCIENTIFIQUES

[1] DEMIDOVITCH B. et MARON I. - *Eléments de calcul numérique.* (Mir)

[2] ENGEL A. - *Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique*, adapté par Daniel Reisz. (Cedic).

[3] HILDEBRAND F.B. - *Introduction to numerical analysis.* (Mc Graw-Hill).

[4] OVAERT J.L. et VERLEY J.L. - *Exercices de Mathématiques, Analyse 1.* (Cedic) (en préparation)

[5] IREM de MARSEILLE - *Brochure Analyse I.*

[6] BEREZIN I.S. et ZHYDKOV N.P. - *Computing methods.* (Pergamon Press).

[7] DIEUDONNE J. - *Calcul infinitésimal.* (Hermann).

[8] DURAND E. - *Solutions numériques des équations algébriques.* (Masson)

[9] HOUSEHOLDER A. - *Principles of numerical analysis.* (Mac Graw Hill).

MONOGRAPHIES ET CONTEXTE

[10] ADAMS J.F. - *Algebraic topology. A student's guide,* Cambridge University press, New-York and London, 1972.

[11] ARNOLD V. - *Equations différentielles ordinaires.* (Mir).

[12] DIEUDONNE J. - *Eléments d'Analyse (vol. 1).* (Gauthier-Villars).

[13] GREENBERG M.J. - *Lectures on algebraic topology,* (Benjamin, Reading, Mass.), 1967.

[14] HARDY G.H. et WRIGHT E.M. - *An introduction to the theory of numbers.* (Clarendon Press). Oxford.

[15] HIRSCH M.W. et SMALE S. - *Differential equations, dynamical systems and linear algebra.* (Academic Press).

[16] KUROSH, *Cours d'algèbre supérieure,* (Mir), Moscou, 1973.

[17] STEWART G.W. - *Introduction to matrix computation.* (Academic Press).

[18] STEWART I. - *Galois theory,* Chapman and Hall, 1973.

[19] VARGA R.F. - *Matrix iterative analysis.* (Englewood cliffs).

ENCYCLOPEDIES, REVUES, HISTOIRE

[20] *Encyclopedic Dictionnary of Mathematics* (EDM) MIT Press. Cambridge (Mass) and London. 1977.

[21] *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées.* Paris Leipzig. 1904-1914.

[22] *Encyclopaedia Universalis.* Paris, 1968.

[23] *Petit Archimède : numéro spécial sur* Π.

[24] ABDELJAOUAD M. - *Vers une épistémologie des décimaux* (in Fragments d'histoire des mathématiques - Brochure APMEP).

[25] BOYER C. - *A History of mathematics.* (J. Wiley and sons).

[26] DIEUDONNE J. et alii : *Abrégé d'histoire des mathématiques* (Hermann)

[27] DHOMBRES J. - *Nombre, mesure et continu.* (Cedic).

[28] DUGAC P. - *Cours d'histoire des mathématiques.* (Paris VII).

[29] DUGAC P. - *Eléments d'analyse de K. Weierstrass.* (Archive for history). (Volume 10).

[30] ELLISON W. et F. - *Théorie des nombres* in Abrégé d'histoire des mathématiques (Hermann).

[31] GOLDSTINE H. - *A history of numerical analysis.* (Springer).

[32] KLINE M. - *Mathematical thought from ancient to modern times.* New-York. (Oxford University Press).

[33] OVAERT J.L. - Article *Calcul numérique* in Encyclopaedia Universalis.

TEXTES HISTORIQUES

[34] BOLZANO B. - *(Une preuve analytique...), (1817),* Revue d'histoire des Sciences, tome 17.

[35] CAUCHY A.L. - *Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique. Analyse algébrique. (1821).* (Gauthier-Villars et Diffusion IREM).

[36] EULER L. - *Eléments d'algèbre.* (Diffusion IREM).

[37] EULER L. - *Introduction à l'analyse des infiniments petits. (1748).* (Diffusion IREM).

[38] GALOIS E. - *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux.* Oeuvres complètes, (Gauthier-Villars).

[39] GAUSS K.F. - *Recherches arithmétiques (1801),* (Blanchard).

[40] LAGRANGE J.L. - *Théorie des fonctions analytiques, (1797)* (Diffusion IREM).

[41] LAGRANGE J.L. - *Leçons sur le calcul des fonctions. (1808).*

[42] LAGRANGE J.L. - *Réflexions sur la résolution algébrique des équations (1771)* Oeuvres complètes, (Gauthiers-Villars).

[43] LAGRANGE J.L. - *Sur l'intégration d'une équation... (1759)* Oeuvres, vol. 1, pp. 23-36.

[44] LAGRANGE J.L. - *Recherches sur les suites récurrentes... (1775)* Oeuvres, vol. 4 pp. 151-251 et *(1793)* vol. 5 pp. 627-641.

[45] LAPLACE P.S. - *Théorie analytique des probabilités,* Oeuvres, tome 7, Gauthier-Villars, Paris.

[46] NEWTON I. - *Méthodes des fluxions et des suites infinies. (1736)* (Blanchard).

[47] SERRET J.A. - *Cours d'algèbre supérieure.* 5ᵉ édition. Paris 1885. (Gauthier-Villars).

III. MAJORER - MINORER - ENCADRER

Michel VIALLARD (IREM de Rennes)

Tout professeur de Mathématiques sait que le début de l'enseignement de l'Analyse est assez délicat et que les notions de base (continuité, limites,...) pourtant vues plusieurs fois ne sont pas assimilées. Il nous semble que les raisons principales de cet état de fait sont d'une part *le grand nombre de difficultés réunies* au début de l'enseignement de l'Analyse, d'autre part l'accent presque exclusivement mis sur les propriétés locales qui ne sont accessibles qu'au travers d'un formalisme compliqué, au détriment des *propriétés globales* (ou quantitatives) beaucoup plus directement accessibles, et enfin *un manque d'activités d'initiation à l'Analyse.* C'est en espérant supprimer en partie ces trois raisons d'échecs fréquents dans notre enseignement de l'Analyse que nous avons réalisé un document "Activités en Analyse - Majorer - Minorer - Encadrer" dont sont extraits la plupart des exemples constituant cet article. Ces exemples portent sur l'ensemble des connaissances du Second Cycle car nous pensons que de telles activités doivent être reprises durant toute la scolarité. Ces exemples utilisent autant les fonctions que les suites car nous pensons que l'étude des fonctions et l'étude des suites ont la même importance et doivent être menées de façon autonome.

I — QUELQUES DIFFICULTES ACCUMULEES DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Nous ne prétendons pas les recenser toutes ici mais seulement en dégager trois qui nous ont paru les plus importantes :

1) Difficultés techniques

Apprendre à manipuler des *valeurs absolues, des inégalités* (et non des inéquations) et les deux ensemble. Apprendre à *majorer, minorer* et *encadrer*, en particulier des sommes, des produits ou des quotients (pouvant comporter un grand nombre de termes).

Exemple : soit f définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x^3+x^2 \sin x}$$

Démontrer que le dénominateur peut être minoré par x^2 et en déduire une majoration de f sur $[1, +\infty[$.

Exemple : On considère la fonction définie sur $]0, 1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} - x.E(\frac{1}{x^2})$$

Démontrer que $0 \leqslant f(x) \leqslant x$.

Exemple : On considère la suite de terme général :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

Trouver un encadrement de u_n permettant de déterminer la limite de la suite.

Exemple : Calculer $E(\sqrt{n^2+n+1})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exemple : Majorer sur $[\frac{3}{2}, 2]$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2x-x^2}}$$

2) Difficultés du raisonnement par condition suffisante

Apprendre à perdre volontairement de l'information pour faciliter l'obtention d'un résultat. Trop souvent notre enseignement privilégie les conditions nécessaires et suffisantes, les propriétés caractéristiques et les élèves ne sont pas habitués à remplacer un problème par un problème plus simple, par exemple à majorer une fonction par une fonction plus simple pour obtenir ensuite une de ses propriétés ($x \sin (\frac{1}{x})$ définie pour $x \neq 0$ et majorée en valeur absolue par $|x|$ ce qui fournit immédiatement sa limite en 0).

Exemple : x désignant un nombre réel, donner une condition suffisante du type $x > A$ pour que :

1) $x^3+2x^2+1 \geqslant 27 \ . \ 10^6$
2) $x^3-300x^2+1 \geqslant 27 \ . \ 10^5$
3) $x^3-10^{50}x^2-1 \geqslant 27 \ . \ 10^5$

Exemple : Majorer $\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^4}$ sur $\mathbf{N}^*$.

Exemple : Majorer la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x-E(x)}{\sqrt{x}} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Exemple : Soient f et g deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que pour tout $\epsilon > 0$ et tout x réel on ait :

$$|x-1| \leqslant 3\epsilon \Rightarrow |f(x)| \leqslant \epsilon$$
$$\text{et } |x-1| \leqslant 7\epsilon \Rightarrow |g(x)-3| \leqslant \epsilon$$

Trouver un réel positif α tel que $|x-1| \leqslant \alpha$ soit une condition suffisante pour que :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \frac{1}{100}$$

Exemple : Si $x>0$, majorer $\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$ et en déduire sa limite quand x tend vers $+\infty$.

3) Difficultés logiques

Une propriété portant sur 3 quantificateurs (notion de limite quand la limite est connue) ou a fortiori sur 4 quantificateurs (quand la limite n'est pas connue ou n'existe pas) est bien sûr nettement plus compliquée à bien assimiler (à cause, en particulier, de l'ordre des quantificateurs) qu'une propriété portant sur 2 quantificateurs (fonction ou suite majorée) et a fortiori qu'une propriété portant sur un seul (fonction ou suite admettant un majorant donné).

Exemple : Démontrer que pout tout $x \geqslant 0, \sqrt{1+x} \leqslant 1+\frac{x}{2}$ et en déduire, pour $n \in \mathbf{N}, E(\sqrt{n^2+n})$.

Exemple :
1 - Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $q \in [0,1[$

$$1+q+q^2+\ldots+q^n \leqslant \frac{1}{1-q}$$

2 - Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $n\,! \geqslant 2^{n-1}$, et en déduire une majoration pour tout $n \in \mathbf{N}$ de :

$$u_n = 1+\frac{1}{2\,!}+\ldots+\frac{1}{n\,!}$$

Exemple : Montrer que $1+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{8}$ est une valeur approchée de $\sqrt{1+a}$ avec une incertitude inférieure à $\frac{a^3}{16}$ si $0 \leqslant a \leqslant 4$, et une incertitude inférieure à $\frac{3|a|^3}{16}$ si $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 0$.

En déduire une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{10}$ (en précisant un majorant de l'erreur).

Exemple : On considère la suite :

$$u_n = \frac{1.3.5\ \ldots\ (2n-1)}{2.4.6\ \ldots\ 2n},\ n>0$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*, u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ et en déduire la limite de la suite.

Il nous a paru évident que ces trois difficultés pouvaient être en grande partie surmontées dès le début de l'enseignement de l'Analyse et même *bien avant l'enseignement des notions de limites* (fonctions et suites) et de *continuité*. Nous avons voulu, grâce aux exemples que nous avons fournis, concrétiser cette possibilité de mieux commencer l'enseignement de l'Analyse et de mieux le centrer sur ses véritables difficultés.

Ainsi peut-on espérer que les élèves retiendront quelque chose de l'Analyse alors qu'actuellement tous les efforts déployés pour leur faire assimiler des notions abstraites sont vains : il ne leur reste pratiquement rien si ce n'est quelques recettes de calcul sur les limites et quelques algorithmes.

II - L'OPPOSITION LOCAL - GLOBAL

Tout notre enseignement élémentaire de l'Analyse, sans doute à cause du développement de la Topologie, privilégie les résultats locaux (limite, continuité en un point) au détriment des résultats globaux souvent plus riches d'information. C'est ainsi qu'il est plus intéressant de savoir que pour tout x réel, $|f(x)| \leqslant |x|$ que de savoir que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, ou de savoir que pour tout $x \geqslant 0$, $x^2 \leqslant f(x) \leqslant e^x$ que de savoir que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. De même, pour pour les suites, il est bien sûr essentiel de savoir qu'une suite converge mais curieusement on oublie trop souvent de se demander vers quoi, et, quand la limite n'est pas connue exactement, on cherche rarement à en déterminer une valeur approchée ce qui devrait conduire à s'intéresser à la rapidité de la convergence (remarque particulièrement évidente pour les suites se présentant comme des sommes partielles de séries ou des suites définies par itération). Enfin, il ne suffit pas de savoir qu'une suite diverge ou qu'une fonction n'a pas de limite ; il est intéressant de connaître leur développement asymptotique (comportement oscillatoire ou divergent).

Les thèmes que nous proposons sont presque tous relatifs à des résultats globaux, et ils doivent permettre de rétablir l'équilibre, dans l'enseignement de l'Analyse, avec les résultats locaux qui ont actuellement une part trop importante. Il est clair en plus que beaucoup de résultats locaux sont en fait obtenus à partir de majorations globales, et que le travail global prépare utilement l'introduction de techniques locales plus faibles en informations mais plus systématiques. Tout le monde sait que l'idée essentielle pour montrer qu'une suite (u_n) est convergente vers ℓ, est de trouver une suite (v_n) convergente vers 0 telle que pour tout n on ait $|u_n - \ell| \leqslant v_n$.

Exemple : Si $n \in \mathbf{N}^*$, S_n désigne le nombre de chiffres de n en écriture décimale. En cherchant un encadrement de S_n trouver les limites de $\frac{S_n}{n}$ et $\frac{S_n}{\log_{10} n}$.

Exemple : On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$$

a - Montrer que pour tout n : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$

b - Démontrer que : $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2}$.

On double ainsi (à condition d'avoir pris un u_0 convenable) à chaque itération le nombre de décimales exactes.

c - En déduire que pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \frac{2}{2^{2^{n+1}}}$$

d - trouver n_0 pour que $0 \leqslant u_{n_0} - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{30.000}$ et préciser u_{n_0}.

Exemple : Démontrer que les trois parties de $\mathbf{R}^2$ suivantes sont convexes :

1) $E = \{(x, y) / y \geqslant x^2\}$

2) $F = \{(x, y) / xy \geqslant 1 \text{ et } x \geq 0\}$

3) $G = \{(x,y) \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0\}$

Exemple : On admet (ou démontre selon le niveau) que pour tout x réel, il existe un unique y tel que :

$$y^7 + y^3 = x$$

Voulant étudier le comportement de y(x) pour les grandes valeurs de x, on constate que $y^7 + y^3$ est alors de l'ordre de y^7 et on démontre d'abord que pour

$x > 1$, $y(x) \leq x^{1/7}$

puis que $y(x) \geq (x - x^{3/7})^{1/7}$

et enfin que $y(x) \leq (x - x^{3/7} + x^{-1/7})^{1/7}$

Exemple : Ayant démontré qu'il existe une fonction f de **R** dans **R** vérifiant

$$\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1$$

étudier le comportement de f(x) au voisinage de $+\infty$ grâce à un encadrement de f(x) (on peut d'ailleurs facilement faire une étude complète de f).

III - UN NOUVEAU MODE D'INITIATION A L'ANALYSE

1 - Ce qui vient d'être dit et les exemples fournis montrent déjà qu'il est souhaitable et possible de commencer l'enseignement de l'Analyse dès la classe de Seconde et même avant, grâce à des activités du type de celles proposées dans ce document. Il est aussi bon d'enrichir les exemples de fonctions connues des élèves et, en particulier, d'introduire très tôt l'usage des fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmes.

Exemple : On considère la fonction f définie par $f(x) = d(x, \mathbf{Z})$ où $d(x, \mathbf{Z})$ désigne la distance de x à l'entier relatif le plus proche.

a - Montrer que pour tout x réel $f(x + 1) = f(x)$

b - Majorer f sur **R**

c - Majorer $\left| \frac{f(x)}{x} \right|$ pour $x \neq 0$.

Exemple : Soit f définie sur **R*** par $f(x) = \frac{E(x)}{x}$

a - Montrer que f est majorée sur $]0, +\infty[$

b - Montrer que f est majorée sur $]-\infty, -1]$

c - f est-elle majorée sur **R*** ?

Exemple : Majorer $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$

1 - Sur $\{(x,y) \,/\, x > 0, y > 0\}$

2 - Sur $\{(x,y) \,/\, x - y \geq 0, x + 2y \geq 0, x \neq 0\}$

Exemple : Trouver la plus petite et la plus grande valeur de :

$$\frac{1}{4+x+y+xy} \text{ sur } \{(x,y) \,/\, |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$$

2 - Il est enfin nécessaire de signaler ce que des calculatrices du type H.P. 33 peuvent apporter au démarrage de l'enseignement de l'Analyse :

a) Si, grâce à une calculatrice programmable, on fait le calcul de la somme des inverses des entiers de 1 à 100 puis 1000 ou 2000, les élèves arriveront à penser que la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

doit converger, et ils seront d'autant plus réceptifs à toute démonstration du contraire et à toute évaluation de la croissance de cette suite. En recommençant à "bricoler" avec d'autres suites analogues

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \text{ ou } 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^n},$$

ils prendront conscience de la nécessité d'effectuer des démonstrations précises.

b) Considérons la fonction réelle définie par

$$f(x) = 2x + 3 + \sqrt{x^2 + 2x + 7}.$$

Dans un premier temps, on peut faire calculer f(10), f(100), $f(10^3)$, $f(10^4)$ et quelques autres valeurs analogues. La calculatrice montre clairement que, pour ces valeurs, f(x) est toujours très voisin de $3x + 4$. Dans un deuxième temps, on cherche à comprendre *intuitivement* ce résultat, ce qui est possible en écrivant

$$f(x) = 2x + 3 + x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}},$$

pour $x > 0$, et en remplaçant

$$\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}} \text{ par } 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)$$

comme le suggère un résultat figurant dans les programmes. On n'a, bien sûr, toujours rien démontré mais ayant compris intuitivement, il devient intéressant et pas très difficile d'obtenir pour $x > 0$ la majoration :

$$\left| 3x + 4 - (2x + 3 + \sqrt{x^2 + 2x + 7}) \right| \leq \frac{3}{x}.$$

Pour conclure, nous voulons insister sur le fait qu'il s'agit, avec ces thèmes, de développer les *activités de résolution de problèmes* plutôt que les "beaux discours" formels du maître, de développer *l'intuition et l'initiative* des élèves plutôt que d'introduire trop de concepts et trop tôt. Pour réaliser ces derniers objectifs, il faut proposer aux élèves des *situations plus riches* que celles qui nécessitent d'appliquer mécaniquement les théorèmes "algébriques" sur les limites ou les calculs de dérivées.

BIBLIOGRAPHIE

1 Activités en Analyse - Majorer - Minorer - Encadrer par M. Viallard (IREM de Rennes).

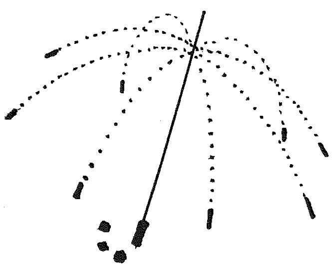
2 J. Dieudonné - Calcul Infinitésimal (Hermann)

3 Activités numériques et d'Analyse en Seconde : Résolution approchée d'équations (IREM de Rennes -Juillet 1981)

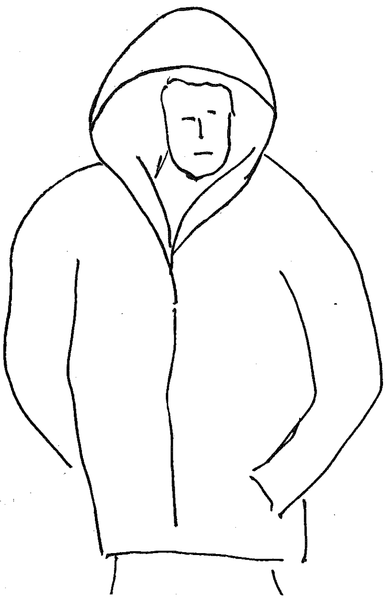
IV. CALCUL INTEGRAL ET MESURE DES GRANDEURS

IREM de LYON

Parapluie



Parapluie approché
(pour un calcul de
centre de gravité).



Parapluie approché
(en cas d'intempéries).

INTRODUCTION

Ce travail est le fruit des recherches menées pendant trois ans par plusieurs équipes de l'IREM de Lyon, mais aussi des activités de groupes appartenant à d'autres IREM, ainsi que de discussions d'ordre historique et philosophique que la structure semi-universitaire, semi-pédagogique des IREM permet d'entreprendre.

Le texte ci-dessous reproduit pour l'essentiel un document ''Intégration'' publié en Janvier 1979 par l'IREM de Lyon. Il propose une réflexion sur l'enseignement plutôt que des solutions toutes faites. Il se compose de deux parties : une bibliographie commentée des livres et documents qui ont été utilisés ou fabriqués par les auteurs, une série de propositions pour un enseignement possible de l'Intégration.

I BIBLIOGRAPHIE COMMENTÉE

I-1) ''Aires'' (chapitre IV de ''Premiers Balbutiements'' — IREM de Lyon (1))

Il s'agit d'une fiche introduisant la fonction Log par l'aire associée. Le document vise avant tout à provoquer une réflexion sur la notion ''d'aire d'un ensemble quarrable'' et sur la question : ''quel est le contenu réel de l'enseignement du calcul intégral en Terminale ? La construction d'un objet mathématique (ici l'Intégrale de Riemann) doit-elle précéder (voire remplacer !) l'étude du fonctionnement de cet objet, et de ses domaines d'utilisation ?''

I-2) ''A first course in Calculus'' (S. Lang)

Le groupe ''Analyse'' de l'IREM de Lyon a étudié ou consulté plusieurs ouvrages écrits par des mathématiciens professionnels pour les élèves des collèges américains. En particulier l'étude du livre de S. Lang a été très fructueuse et a permis de dégager deux idées forces :

1. L'Intégration opère sur des fonctions, sur des intervalles... ; mais à un niveau plus général elle est un procédé adapté à la mathématisation et à la résolution d'un type de problèmes [voir II-2)b)]

2. On peut utiliser les ''applications'' du calcul intégral pour *introduire* et *étudier* l'Intégration.

I-3) Un texte d'un groupe ''Math-Physique'' (IREM de Lyon (1)) sur le travail d'une force :

Ce groupe n'était pas parvenu à réaliser la synthèse entre le vocabulaire mathématique et l'argumentation du physicien fondée sur les découpages infinitésimaux. En travaillant sur ce texte il nous est apparu qu'en fait on mélangeait deux problèmes : celui du calcul du travail d'une force et celui de la définition d'un objet mathématique représentant le travail de la force. Pour les physiciens aucun problème de définition ni d'existence du travail de la force ne se posait ; il s'agissait [voir I-2)1.] de trouver la réponse numérique d'un problème. Pour les matheux, seules la cohérence logique et la rigueur de la construction comptaient.

Nous avons conservé le point de vue du physicien (l'existence du travail de la force est provisoirement hors sujet) et "retourné" les applications du calcul intégral en les utilisant dans la définition même de l'Intégration [voir II-2)b).].

I-4) Les textes de l'IREM de Marseille : Intégration — Quelques méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales (Marseille ④)

Nous avons eu connaissance en Janvier 1977, aux Journées de Dijon, d'une première version de ces textes. L'idée de base en est que le calcul intégral ne se réduit pas au calcul de primitives [voir déjà I-1)] : des intégrales peuvent être calculées sans recours aux primitives. Par le biais *d'activités appropriées* il faut donc faire sentir cela aux élèves dès les *premiers* moments où l'on aborde avec eux la notion d'intégrale. La définition de l'Intégrale ne doit pas se résumer à une construction formelle.

Par ailleurs les textes de Marseille ont renforcé notre conviction concernant l'importance des problèmes numériques et de l'approximation dans l'enseignement de l'Analyse (voir le chapitre "Calculs numériques avec ou sans machines" — Lyon ⑦). Les activités numériques soulèvent des questions à propos des rapports entre l'approfondissement théorique et l'approfondissement expérimental en Mathématiques. Par exemple, la complexité du calcul d'erreur dans la méthode de Simpson comparée à la simplicité et à l'efficacité du calcul de l'intégrale approchée amène à se poser la question suivante : "comment enseigner la rigueur dans les problèmes numériques, les critères de rigueur sont-ils les mêmes que dans d'autres secteurs des Mathématiques. Finalement qu'est-ce que la rigueur ?"

I-5) Barycentre et centre de gravité :

Le groupe de travail entre animateurs s'est interrogé sur les concepts de l'Analyse et de la Géométrie utilisés en Physique. Le "livre du problème" sur le Barycentre publié par l'IREM de Strasbourg a tout spécialement apporté une lumière nouvelle à notre réflexion sur l'Intégration.

I-6) Textes d'intérêt plus général :

— Statut et fonctionnement d'une notion (Marion-Ovaert, pour la Coprem).

— La Physique du maître entre la Physique du physicien et la Physique de l'élève (F. Halwachs).

— Philosophie et calcul de l'infini (Houzel - Ovaert - Raymond - Sansuc - Ed. Maspéro)

— Textes de R. Thom dans "Pourquoi la mathématique" (Collection 10-18).

— Article de G. Glaeser : "La didactique de l'Analyse" (Bulletin A.P.M. n° 302)

L'influence de ces ouvrages ou articles est difficile à préciser, mais sans doute a-t-elle été déterminante pour nous aider à renouveler notre travail.

* *
*

II PROPOSITIONS POUR UN ENSEIGNEMENT DE L'INTEGRATION

II-1) INTRODUCTION — IDEES GENERALES :

— Enseigner une notion mathématique, c'est aussi faire en sorte qu'elle soit utilisable

— Or il n'est pas évident de faire fonctionner un concept, même si on en connaît une définition ou une construction. Il s'agit donc d'enseigner la façon dont on utilisera l'Intégration.

— De plus il n'est pas immédiat de reconnaître quel est le modèle qui va "donner le résultat". Evidemment lors du chapitre "Applications du calcul intégral", un élève, même distrait, songera à utiliser le calcul intégral pour résoudre l'exercice qu'on lui propose. Mais les exercices sont-ils - et doivent-ils être - toujours posés avec un titre de chapitre ? Il faut donc concevoir un enseignement de l'Intégration comme méthode de résolution d'un type de problèmes.

— Enfin, tout cela ne doit faire l'objet d'activités concentrées dans le temps, ni d'activités s'enchaînant l'une à l'autre de façon linéaire. Il s'agit au contraire de revenir sur un même problème avec de nouveaux moyens, poser un nouveau problème dès que c'est possible, le faire évoluer... (voir l'article de G. Glaeser : "La didactique en Analyse" — Bulletin de l'A.P.M. n° 302).

II-2) UNE STRATEGIE POUR L'ENSEIGNEMENT DE L'INTEGRATION :

Voici quelques grandes lignes possibles pour une telle stratégie. Il nous paraît indispensable de les mettre en œuvre dès le niveau Première (et parfois avant).

a) Premières activités de calcul intégral :

L'intention n'est pas d'expliquer à Monsieur Jourdain, entrant en Première, qu'il fait du calcul intégral depuis sa plus tendre enfance. Ces activités visent en préparant le terrain de façon consciente et cohérente, à ce que l'élève qui aborde le calcul intégral dispose d'exercices déjà résolus, à ce qu'il ait déjà rencontré les principaux problèmes que pose la théorie nouvelle, à ce qu'il ait déjà une certaine pratique des méthodes et des résultats de cette théorie. Ainsi la conceptualisation (en Terminale), s'appuyant sur un substrat suffisamment riche, sera pour l'élève plus compréhensible et plus féconde.

Quelques exemples de premières activités de calcul intégral :

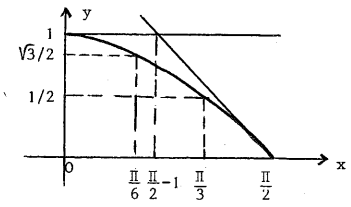
— Etude des surfaces, des volumes. Comparaison, additivité. (Notions à manipuler tout au long de la scolarité, dès l'école élémentaire)

— Activités autour du nombre π : longueur d'un cercle, aire d'un disque (comment la mesurer ?), volume d'un cylindre de révolution. Mesure du volume d'un récipient en étudiant la quantité d'eau qu'il peut contenir.

— Au moment où les fonctions apparaissent (fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques...), on peut poser simultanément des problèmes de construction de courbe, de longueurs d'arcs, d'aires, de volumes liés à ces courbes.

Le fait que l'étude théorique de ces problèmes ne soit pas au programme ne doit pas empêcher de proposer aux élèves des exercices sur ces thèmes. Ainsi après avoir introduit les fonctions trigonométriques (même si ce n'est que par usage des touches de la calculatrice) on peut s'intéresser au problème de l'aire limitée par l'arc de sinusoïde.

La concavité de l'arc de sinusoïde étant admise, on construit les trapèzes dont les sommets sont les points de la courbe d'abscisse $o, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, puis les tangentes aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$. A partir de là on montre



que l'aire A du domaine délimité par l'arc de sinusoïde et les axes satisfait aux inégalités : $0{,}977 \leqslant A \leqslant 1{,}071$.

— En Seconde, on construit la courbe d'équation $y = x^2$ pour $x \in [0,1]$. La méthode des rectangles (avec découpages réguliers) donne un encadrement de l'aire du domaine limité par la courbe, l'axe Ox, et la droite d'équation $x = 1$. On peut étudier directement la suite obtenue.

Un exercice, plus facile encore, et intéressant parce que le résultat ne se devine pas aisément, est le calcul du volume d'un "bol parabolique" obtenu en faisant tourner la courbe précédente autour de l'axe Oy.

b) Quelques démarches fondamentales pour enseigner l'Intégration en Première-Terminale :

Il convient tout d'abord de *recenser les problèmes de calcul intégral* dont il est possible de parler avec les élèves. Par exemple : centre de gravité, volume de révolution, quantité d'électricité, moment d'inertie, travail d'une force, distance parcourue par un mobile, aire d'un domaine plan associé à une courbe d'équation $y = f(x)$...

α) Une première démarche :

$\alpha - 1$ *Cette démarche vise à mettre en lumière les idées suivantes :*

(P_0) A tout intervalle [a,b] et à toute fonctions f suffisamment régulière sur [a,b] est associé un nombre (souvent positif) mesurant la quantité étudiée.

(P_1)Additivité type Chasles (et selon l'exemple on peut se demander si une formulation algébrique est possible ou non)

(P_2) Influence quantitative de la fonction f : densité, vitesse... (Exemple : pour les aires, si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur [a,b], alors : $0 \leqslant A_a^b(f) \leqslant A_a^b(g)$).
Cette propriété se dédouble pour le moment d'inertie (influence de la densité et de la distance).

(P_3) Si tout est constant, on connaît la quantité étudiée (Exemples : mesure d'un volume de révolution, quantité d'électricité en courant continu)

Dans les exemples cités au début du paragraphe, mis à part le problème du centre de gravité, ces propriétés apparaissent de façon naturelle.

En outre on dégagera dans chaque exemple les autres propriétés de l'intégrale qui y sont facilement illustrées :

$$\int_b^a f = -\int_a^b f, \quad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

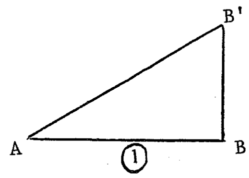
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \ldots$$

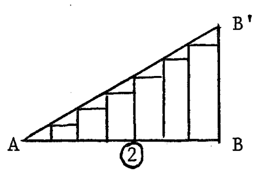
$\alpha - 2$ *Dans tous les cas, deux méthodes de calcul,* et il convient qu'au cours des activités les deux se révèlent de *même importance* :

• *Recherche d'une méthode "exacte"* — Lien avec le calcul des primitives : en laissant de côté le problème de l'existence du nombre envisagé, on peut interpréter son calcul comme la recherche d'une fonction F (Exemple : mesure d'un volume de révolution entre $x = a$ et $x = t$), étudier cette fonction, et montrer que, sous des hypothèses simples, on connaît la dérivée f de F. Si on connaît une primitive de f, le problème est alors résolu.

• *Recherche d'une méthode d'approximation :* en laissant toujours de côté l'existence du nombre cherché, on construit une ou plusieurs méthodes permettant de l'obtenir à ε près. Dans les exemples proposés on peut procéder par des découpages.

Remarque : on remplace ainsi le problème par un "problème approché". Il est intéressant de faire constater que ce dernier ne serait pas forcément pertinent pour autre chose. Exemple : calcul de l'aire d'un triangle.





L'aire obtenue grâce à la figure 2 approche l'aire du triangle ABB', mais ce découpage ne serait en rien une approximation dans un problème différent (problème de longueur par exemple) — Voir aussi le dessin de la première page de cet article.

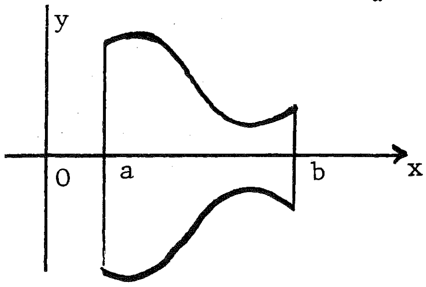
• *Remarque :* il est toujours enrichissant de montrer, à l'intérieur d'un même type de problèmes, combien il est utile de savoir multiplier les points de vue ou méthodes de calcul :
— si on connaît une primitive, on peut calculer...
— si on connaît l'aire, la mesure du volume... on peut dans certains cas en déduire une primitive
— si on ne connaît pas de primitive, on utilise un procédé d'approximation.

$\alpha - 3$ *Exemples d'illustration de cette démarche :*

*** Volumes de révolution** (Voir S. Lang).

1) Propriétés de base :

(P_0) La description d'un volume de révolution se fait à l'aide d'une méridienne définie par un intervalle [a,b] et par une fonction positive f (on peut remarquer que c'est la même fonction quel que soit le plan méridien choisi). A l'intervalle [a,b] et à f on associe la mesure du volume notée $V_a^b(f)$.



(P_1) Additivité par "tranches" le long de l'axe. Cette additivité ne peut avoir "naturellement" un aspect algébrique général, car les mesures de volume sont "naturellement" positives.

(P_2) Si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur [a,b], alors $V_a^b(f) \leqslant V_a^b(g)$.

(P_3) On connaît la formule $V = \pi r^2 h$ pour un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon r.

2) Procédés d'approximation :

On découpe l'intervalle [a,b] en tranches régulières. Dans les exemples, la méthode des rectangles (ici des cylindres de révolution) fournit un encadrement de la mesure du volume.

Suivant les classes et les élèves, les moyens de calcul et le temps dont on dispose... on pourra s'en tenir à un encadrement explicite, trouver une suite d'encadrements, montrer que le procédé s'applique à toutes sortes de fonctions et constitue une méthode de calcul approché, étudier en tant que telle cette méthode...

3) Lien avec le calcul des primitives :

On étudie la fonction $F : x \mapsto V_a^x(f)$ où $x \in [a,b]$.
Si $x_1 < x_2$ et si $f(x_1) - \alpha \leqslant f(x) \leqslant f(x_1) + \alpha$ pour tout $x \in [x_1,x_2]$, alors (en appliquant P_1,P_2,P_3) on a :

$$\pi(x_2 - x_1)[f(x_1) - \alpha]^2 \leqslant F(x_2) - F(x_1) \leqslant \pi(x_2 - x_1)[f(x_1) + \alpha]^2$$

Si f est continue sur [a,b], alors

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} = \pi f^2(x_1)$$

On traite de même la limite à gauche. En résumé, pour tout $x \in [a,b]$, on a : $F'(x) = \pi f^2(x)$. Ce qui permet de calculer F si on connaît une primitive de f^2.

*** Moment d'inertie d'une barre par rapport à un axe**

On peut commencer par étudier le moment d'inertie d'une tige rectiligne homogène par rapport à un axe orthogonal à la tige passant en l'une de ses extrémités. On suppose la tige suffisamment longue par rapport à sa section pour l'assimiler à un segment de droite. On découpe la tige de longueur ℓ en n sous-tiges de longueur $\frac{\ell}{n}$. Si la tige est représentée par le segment [0,l], le découpage correspond à une subdivision $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = l$ de ce segment, et si n est assez grand on peut physiquement assimiler le tronçon $[x_k, x_{k+1}]$ à un point matériel de masse $\frac{M}{n}$ (M étant la masse de la tige) situé à la distance x_k de l'axe, son moment d'inertie est alors

$$\frac{M}{n} x_k^2 = \frac{M}{\ell} x_k^2 (x_{k+1} - x_k).$$

D'où une valeur approchée du moment d'inertie de la tige :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{\ell} x_k^2 (x_{k+1} - x_k).$$

On pourrait étudier aussi le moment d'inertie par rapport à un axe ne passant pas par une extrémité de la tige, et examiner l'influence de la distance de l'axe à l'une des extrémités de la tige choisie pour origine. Dans une deuxième étape on peut considérer une tige non homogène : la densité p(x) serait fonction de la distance x à l'origine.

On peut également étudier les moments d'inertie d'un disque homogène ou d'un cylindre de révolution homogène par rapport à leur axe, ou d'une sphère homogène par rapport à un axe passant en son centre.

*** Un exemple d'aspect quelque peu différent**

L'objet cherché est géométrique et il dépend d'une fonction de plusieurs variables — C'est le cas du *centre de gravité* d'une plaque, la fonction est la densité.

1) Propriétés de base :

(P'_0) Il existe un point du plan centre de gravité de la plaque.

(P'_1) Si P_1 et P_2 sont deux plaques disjointes de masses m_1 et m_2, de centres de gravité G_1 et G_2, la plaque "réunion" de P_1 et P_2 a pour centre de gravité le barycentre de (G_1,m_1) et (G_2, m_2)

(P'_2) Si la plaque P est contenue dans un disque D, le centre de gravité G de P est un point de D (et la distance de G à tout point de P est inférieure au diamètre de D)

2) Procédé d'approximation :

Pour approcher à ε près le centre de gravité G de la plaque P :
— on découpe la plaque en sous-plaques P_i de diamètres inférieurs à ε, de masses m_i.
— on choisit un point M_i dans chaque plaque P_i
— on note H le barycentre des points M_i affectés des coefficients respectifs m_i. Alors $d(H,G) \leqslant \varepsilon$

La preuve de ce résultat se trouve dans le livre de l'IREM de Strasbourg. Pour y arriver on remarque que, si G_i est le centre de gravité de P_i, alors G est le barycentre des points G_i affectés des coefficients m_i. Puis on écrit $(\Sigma m_i)\overrightarrow{HG} = \Sigma m_i \overrightarrow{M_i G_i}$. D'où $(\Sigma m_i) \| \overrightarrow{HG} \| \leqslant (\Sigma m_i)\varepsilon$ (en tenant compte du fait que tous les m_i sont positifs)

Remarque :

Au niveau où nous nous plaçons, nous n'insistons pas sur la possibilité de prouver l'existence de l'objet cherché (le centre de gravité) par une méthode de suite de Cauchy (ce qui est fait dans le livre de l'IREM de Strasbourg). Cet aspect, certes important, nous paraît plus abstrait et peut donc être étudié plus tard, quand le problème d'une construction de l'Intégrale est mûr. C'est le genre d'exercices que nous renvoyons au delà de l'enseignement secondaire (tout comme nos collègues de Strasbourg).

β) Une deuxième démarche :

$\beta - 1$ *Cette démarche vise à mettre en lumière les idées suivantes :*

(Q_0) La quantité cherchée (cas d'un signal par exemple) est décrite par une fonction à valeurs réelles, non nécessairement positive, sur un intervalle fixé [a,b]. A cette fonction f est associé un nombre I(f).

(Q_1) L'application $f \mapsto I(f)$ est linéaire (ce qui correspond au principe de superposition des signaux).

(Q_2) Si $f \geqslant 0$ sur [a,b], alors $I(f) \geqslant 0$

(Q_3) Si $f = k$ (constante) sur $[c,d] \subset [a,b]$ et si $f = 0$ sur $[a,b] \setminus [c,d]$ (cas d'un signal en créneau), alors $I(f) = k(d-c)$

$\beta - 2$ Dans les exemples traités on utilisera, selon le cas, la *méthode de recherche d'une primitive*, ou *celle de recherche d'une valeur approchée* ; et ici encore les deux devront être illustrées de façon égale.

$\beta - 3$ *Exemples d'illustration de cette démarche :*
Les problèmes tels que quantité d'électricité, intensité moyenne, charge d'un condensateur, vitesse moyenne... sont intéressants à plusieurs titres :
— situations simples, expériences élémentaires faisables avec les élèves en T.P.
— Deux types de courants bien différenciés : continu et alternatif
— Une mathématisation utilisant le programme de Première et les nombres complexes
— La quantité d'électricité dépend d'une fonction de signe variable. On peut superposer les courants (générateurs en série), et donc faire apparaître la linéarité des phénomènes. Cette propriété importante de l'Intégration apparaît ainsi complètement dans cet exemple (Remarquons cependant que la propriété $\int \alpha f = \alpha \int f$ peut aussi s'interpréter, dans le cas des aires notamment, à l'aide d'un changement d'unité sur l'axe des ordonnées seul).

γ) Synthèse :

La diversité des problèmes étudiés permet ainsi de mettre en lumière, petit à petit, et de façon naturelle, les propriétés fondamentales de l'Intégrale : l'additivité par rapport à l'intervalle apparaît clairement dans le cas des volumes de révolution, tandis que la linéarité par rapport à la fonction apparaît bien dans les problèmes d'étude de signaux (électriques, acoustiques ou optiques)... Inversement l'utilisation des propriétés générales permet de traiter aisément des problèmes dont l'étude directe serait difficile ou artificielle.

En outre par cette diversité de situations on peut illustrer les deux modes de construction du calcul intégral : partir de la mesure des ensembles pour en arriver à l'intégration des fonctions, ou le contraire. Ainsi la notion de probabilités, l'étude des distributions de masses ou de charges conduisent de façon naturelle à choisir un point de vue mesure des ensembles, mais ultérieurement on a besoin d'intégrer des fonctions (espérance mathématique, variance, centre de gravité, moment cinétique, énergie cinétique). Inversement l'intégration des fonctions permet aussi la mesure des ensembles.

Additif bibliographique : les démarches étudiées en α) et β) sont abondamment exploitées dans le livre de S. LANG, *A first course in Calculus,* et dans celui de P. LAX, *Calculus with applications and computing* (ces livres sont analysés à la fin de ce Bulletin).

II-3) EN GUISE DE CONCLUSION, QUELQUES QUESTIONS

— Comment lier cela à l'enseignement de la Mécanique, de la Physique ?

— Comment prendre le temps de visiter calmement tous ces problèmes ?

— Etudier les calculateurs analogiques et, en particulier, les intégromètres. De quoi s'agit-il ? Comment ça fonctionne ? Comment ça "arrondit" ? (Voir par exemple l'Encyclopédie Universelle des sciences et techniques)

— En quoi les infiniment petits sont-ils un support efficace pour l'imagination ? Tout le monde (physiciens, mécaniciens...) utilise des découpages infinitésimaux, néglige "à vue de nez" les infiniment petits négligeables en conservant ceux qui ne le sont pas... "tout le monde sait que ça marche". Ceux qui professionnellement devraient expliquer ce phénomène sont les professeurs de Mathématiques. Or ils se contentent en général (tout en utilisant fréquemment eux-mêmes ces procédés) de donner un ou deux exemples, plus ou moins significatifs, où ce genre de raisonnement mène à une erreur, sans vraiment préciser pourquoi, ici, "ça ne marche pas", alors que si souvent "ça marche". Certes l'explication serait difficile. Peu à peu les mathématiciens ont élaboré une théorie de l'Analyse sans recours aux infiniment petits ; elle est très satisfaisante pour la rédaction d'un texte mathématique, mais pour l'enseignant de Mathématiques un problème pédagogique demeure.

— Questions plus générales : le calcul différentiel a fait faire des progrès au calcul intégral, et réciproquement. Comment ? Dans quelles situations ? Pour quel type de problèmes ? Enseignons-nous les rapports entre les deux tels qu'ils se sont établis à l'origine ? Pourquoi ?

V. INTERPOLATION ET APPROXIMATION DE FONCTIONS

Daniel REISZ (IREM de Dijon)

...L'esprit scientifique est essentiellement une rectification du savoir, un élargissement du cadre de la connaissance... Scientifiquement on pense le vrai comme rectification historique d'une longue erreur, on pense l'expérience comme rectification de l'illusion commune et première.

G. BACHELARD

INTRODUCTION

Les problèmes d'interpolation et d'approximation de fonctions sont des exemples significatifs de ce que nous appellons un "grand problème" c'est-à-dire un ensemble de situations pouvant donner lieu à "une étude suivie et pouvant être reprise à différents niveaux" fournissant "des problématiques pour l'approfondissement des concepts" et, en retour, s'offrant comme "le terrain privilégié de mise à l'épreuve des outils théoriques élaborés". (cf. page 4)

Il me semble aussi que sur ces problèmes on peut répondre affirmativement aux trois questions fondamentales qui doivent justifier le choix d'un thème d'activité (cf. page 5) :

— importance du thème dans la formation scientifique
— terrain d'approfondissement théorique et expérimental
— champ d'activités mathématiques intéressantes pour les élèves ; et qu'on y trouve (cf page 6) "le qualitatif et le quantitatif", les "références culturelles et historiques", "la priorité aux concepts dynamiques".

Enfin, il semble que l'on peut transférer sur le plan didactique ce que Jean-Louis Ovaert remarque sur le plan épistémologique : "... l'histoire des mathématiques montre (...) qu'il y a interaction constante entre les progrès du calcul et l'approfondissement des concepts" [11]

Au niveau du second cycle de l'enseignement secondaire, approximation et interpolation constituent un terrain privilégié pour l'émergence et/ou l'investissement de concepts d'analyse dans des problématiques intuitivement accessibles, même si leur maîtrise fait appel à des techniques souvent raffinées. Il s'agit en tout cas d'un terrain très riche en activités mathématiques véritables qui ne feront pas, en général, l'objet d'exposés synthétiques au niveau d'enseignement considéré, mais qui participeront de façon fondamentale à l'élaboration correcte du concept central de fonction dont la perception actuelle est souvent restreinte à celle d'une expression algébrique donnée, quand ce n'est pas au discours dogmatique

"correspondance →
→ fonction → application $\rightrightarrows$ injection / surjection $\rightrightarrows$ bijection"
suivi de la ritournelle

"domaine de définition → intervalle d'étude → continuité → dérivée → tableau de variations →..."

Il s'agit aussi d'un terrain privilégié pour montrer aux élèves, qu'à tout niveau, les mathématiques procèdent par approfondissements successifs et, par ailleurs, que les calculatrices (ou les microordinateurs) ne sont pas de simples outils de calcul mais permettent d'approfondir la dialectique entre le champ conceptuel et le champ des problèmes.

I - ANALYSE SOMMAIRE DES PROBLEMES D'INTERPOLATION ET D'APPROXIMATION

Dans l'analyse forcément sommaire que nous faisons des deux problèmes : interpolation et approximation, nous donnons souvent l'impression illusoire de deux problèmes distincts. En réalité, tant au niveau de problèmatiques qu'au niveau des méthodes, le lecteur s'apercevra que s'il s'agit de problèmes différents, ils sont loin d'être disjoints.

A - Interpolation

Le problème général de l'interpolation est le suivant : pour les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on connait les valeurs d'une certaine fonction f :

$$b_1 = f(a_1) \quad , \quad b_2 = f(a_2) \quad , \ldots , \quad b_n = f(a_n).$$

On désire, pour une valeur donnée de a, avoir une valeur approchée de f(a). Selon que $a_i < a < a_{i+1}$, ou que $a < a_0$ ou $a > a_n$, on parlera plus précisément d'interpolation ou d'extrapolation. De tels problèmes se rencontrent en particulier lorsque la fonction f n'est connue que par une table de valeurs numériques. Mais il ne faudrait pas croire que ce soit là la seule situation où l'on soit amené à faire des interpolations. En effet, il est souvent possible de calculer formellement f(a), mais dans la réalité un tel calcul peut exiger un investissement de temps disproportionné à l'usage et à la précision nécessaire. Dans des problèmes d'interpolation, la qualité de l'approximation lorsqu'on substitue à la fonction f, une fonction interpolatoire φ, est déterminée par la valeur $|\, f(a) - \varphi(a) \,|$. Cette quantité, évidemment inconnue, dépend de différents facteurs. Les plus significatifs sont :

— le nombre et la répartition des a_i et, en particulier la longueur des segments $[a_i, a_{i+1}]$
— l'allure des courbes représentatives de f et φ sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$
— la position de a par rapport aux valeurs a_i et en particulier par rapport aux plus proches de ces valeurs.

Moyennant certaines conditions de "régularité" de la fonction donnée f, moyennant certains choix du type de la fonction interpolatoire φ (polynôme de degré n, fonction rationnelle, fonction trigonométrique, fonction exponentielle,...) on peut espérer minimiser la quantité $|f(a) - \varphi(a)|$ ou plutôt un majorant connu de cette quantité inconnue.

B - Approximation

S'il est facile de comprendre l'idée générale de l'approximation d'une fonction f par une fonction φ sur un intervalle donné (trouver une fonction φ telle que, pour tout x de l'intervalle, $\varphi(x)$ soit une "bonne" approximation de f(x)) les problèmes soulevés par les techniques d'approximation, techniques sous-tendues par des problèmes spécifiques, sont souvent très délicates et ne sauraient tous, loin s'en faut, être abordés ici, même au niveau des généralités.

Afin de clarifier un peu ce type de problème on peut regarder de plus près les différents "paramètres" qui interviennent :

1) *La façon dont est connue la fonction f*

a) On en connaît un nombre fini de couples $(x_i, f(x_i))$ soit à la suite d'observations expérimentales, soit par une table numérique.

b) On peut déterminer $f(x_i)$ pour un x_i que l'on choisit (Exemples : f est connue par un enregistrement expérimental continu, f est donnée par une formulation mathématique explicite,...). On a alors le choix de la subdivision et ce choix est souvent un paramètre important de la qualité de l'approximation.

On peut se demander quel peut être l'intérêt d'une approximation lorsqu'on connaît f par une formulation mathématique explicite. En réalité ce cas n'est nullement artificiel car il est souvent utile d'approcher une fonction f par une fonction φ d'un type bien particulier (polynôme, fonction rationnelle, somme de sinus ou cosinus,...). Sur les calculatrices par exemple, les fonctions transcendantes habituellement préprogrammées (sinus, exp,...) sont approchées par les constructeurs à l'aide de fonctions polynômes ou de fonctions rationnelles dont la forme explicite reste hélas trop souvent un "secret de fabrication" (il ne faut pas croire, contrairement à une opinion trop répandue, qu'il s'agit systématiquement de développements de Taylor).

2) *Le type de la fonction approximante φ*

Parmi les familles de fonction les plus utilisées :

— les fonctions affines
— les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n
— les fonctions rationnelles
— les fonctions logarithmes ou exponentielles
— les sommes de sinus et de cosinus (séries de Fourier)

Toutes ces fonctions peuvent, par ailleurs, être utilisées par morceaux.

3) *La définition de la qualité de l'approximation*

a) On peut exiger (ou ne pas exiger) que la fonction approximante passe par des points donnés de f, c'est-à-dire, vérifie $\varphi(x_i) = f(x_i)$ pour une famille de x_i. On rejoint par là le problème de l'interpolation.

b) Lorsque les données $(x_i, f(x_i))$ sont trop nombreuses par rapport aux "degrés de liberté" de φ on peut minimiser

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - \varphi(x_i)|^2 \text{ (méthode des moindres carrés)}$$

c) On peut mesurer la qualité de l'approximation par l'intermédiaire de différentes normes. Parmi les plus fréquentes :

$$\mathrm{Sup}\ |\, f(x) - \varphi(x) \,|$$

qui privilégie les accidents locaux (approximation uniforme)

$$\int_a^b |\, f(x) - \varphi(x) \,|\ dx$$

qui, au contraire, néglige les accidents locaux et mesure un caractère plus global de l'approximation

$$\int_a^b |\, f(x) - \varphi(x) \,|^2\ dx$$

qui elle aussi néglige les accidents locaux, mais qui en outre a, pour de nombreux phénomènes, une signification physique ou mathématique importante (intégrale d'énergie, probabilité...). Enfin son traitement mathématique (il s'agit d'une norme euclidienne ou hermitienne) est en général plus commode que celui de la norme précédente.

II - QUELQUES SECTEURS D'INTERVENTION DE L'INTERPOLATION ET DE L'APPROXIMATION

A - Problèmes numériques

a) Lissage de fonctions données expérimentalement : [10], [13], [17].

b) Ajustement de fonctions d'une classe donnée à un tableau de valeurs numériques. Rôle de la méthode des moindres carrés dans les cas surdéterminés (plus d'équations que d'inconnues) : [2], [13], [18].

c) Calcul de valeurs approchées d'une fonction sur un intervalle donné : [13].

d) Calcul de nombres attachés à des fonctions (intégrales, dérivées, mesure de grandeurs diverses) : [2], [11], [13], [14].

e) Recherche de solutions approchées d'équations numériques $F(x) = 0$

— par des procédures itératives (Newton, dichotomie,..)
— on remplace F par une approximation polynomiale P et on résoud $P(x) = 0$.

[2], [6], [13].

f) Résolution d'équations différentielles ou intégrales

— par discrétisation
— on donne les solutions sous forme de séries (entières, Fourier,...)

[13], [16].

g) Equations aux dérivées partielles.

B - Problèmes théoriques

Très souvent, pour démontrer des propriétés concernant des fonctions d'une classe assez générale (fonctions continues, fonctions intégrables, mesures, distributions,...) il est commode de démontrer ces propriétés pour des classes de fonctions plus particulières (fonctions polynomiales, polynômes trigonométriques, fonctions de classe C^{∞},...) et de passer au cas général par densité. Cette méthode est d'un emploi constant en analyse fonctionnelle.

III - QUELQUES EXEMPLES D'ACTIVITES POSSIBLES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

D'une façon générale les problèmes d'interpolation sont, au niveau d'enseignement où nous nous plaçons, plus abordables que ceux d'approximation. Dans les quelques exemples d'activités possibles que nous donnons nous avons voulu garder en toile de fond les aspects pédagogiques et les programmes de l'enseignement secondaire plutôt que de rédiger des "sous-cours" d'analyse numérique. Par ailleurs nous insisterons plus sur les idées directrices que sur une rédaction "finie" d'énoncés d'exercices. Pour d'autres exemples et des compléments mathématiques, on consultera [1], [2], [3].

A - INTERPOLATION LINÉAIRE

Certains aspects élémentaires de l'interpolation linéaire peuvent être abordés dès les classes de 4ème-3ème en même temps que l'étude "point par point" des premières fonctions non affines.

Exercice 1 : Cas de la parabole

Cet exercice, outre la mise en place du principe même de l'interpolation linéaire a pour objectif de regarder le comportement de l'erreur et de faire prendre conscience des facteurs qui l'influencent.

Soit $f : x \mapsto y = x^2$ dont on considère les valeurs pour x entier (tabl. ci-contre). On décide qu'entre deux entiers consécutifs x_i et x_{i+1}, f sera approché par la fonction affine : $x \mapsto \varphi(x) = ax + b$, définie par

x	f(x)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

$$\varphi(x_i) = f(x_i) = x_i^2$$
$$\varphi(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^2$$

1) Après avoir déterminé φ pour $x_i = 2$, $x_{i+1} = 3$, calculer et comparer

$\varphi(2,1)$	$f(2,1)$
$\varphi(2,2)$	$f(2,2)$

...

Refaire le même travail sur les segments [100 ; 101] [1000 ; 1001]

2) Etudier sur le segment $[n, n+1]$ la fonction
$$E_n : x \mapsto E_n(x) = |f(x) - \varphi(x)|$$

3) Etudier l'erreur relative
$$\frac{E_n}{n^2}$$

Exercice 2 : Cas de la fonction racine carrée

On reprend la démarche précédente pour la fonction $f : x \mapsto y = \sqrt{x}$
x_i et x_{i+1} étant deux carrés parfaits consécutifs
x_i et x_{i+1} étant deux entiers consécutifs.

Remarque :

On trouvera, sur les deux exercices précédents, des compléments très intéressants concernant les aspects quantitatifs dans "Premiers balbutiements" (I.R.E.M. de Lyon, 1975-1976)

Exercice 3 : Cas d'une fonction inconnue des élèves

On reprend toujours la même démarche mais cette fois avec une fonction *inconnue* des élèves, mais calculable sur une calculatrice (bien préciser que les valeurs obtenues sur une calculatrice sont elles-mêmes des valeurs approchées mais dont la précision est de l'ordre de 10^{-n}, n dépendant du matériel utilisé). On pourra choisir les fonctions cos ou sin dès le premier cycle, les fonctions exponentielles ou logarithmes en seconde puis, dans les classes ultérieures, les fonctions hyperboliques, les fonctions trigonométriques réciproques, voire la fonction Γ, préprogrammée sur certaines calculatrices.

Exercice 4 : Halte aux excès

En considérant la fonction $x \mapsto y = x^{12}$ qu'on interpolera linéairement entre 0 et 1, on montrera les dangers auxquels peut conduire une interpolation linéaire intempestive, ainsi que les facteurs qui déterminent la qualité de l'interpolation.

Exercice 5 : Fonction uniquement connue par des données numériques discrètes

Une fonction n'est connue que par une table de valeurs numériques (par exemple d'origine expérimentale). On calculera des valeurs intermédiaires par des interpolations linéaires. On ne manquera pas de faire préciser les hypothèses implicites de régularité de la fonction f.

Exemple :

x	f(x)
0	0
1	3
4	5
5	7
9	9
10	11

B - INTERPOLATION PARABOLIQUE (OU QUADRATIQUE)

Exercice 1 : Détermination d'une parabole par 3 points

1) Déterminer a, b, c pour que la courbe représentative de la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = ax^2 + bx + c$ passe par les points (1,2) (2,4) (4,7).

2) Montrer que si deux des points sont trop près l'un de l'autre, le déterminant du système donnant les valeurs de a, b, c prend des valeurs proches de 0 ce qui rend aléatoires les valeurs numériques obtenues pour a, b et c (système mal conditionné). On montrera alors qu'il est préférable de remplacer la donnée de deux points proches par la donnée de l'un des points et de la tangente en ce point (remplacer des données exactes amenant à un système mal conditionné par une approximation amenant un système bien conditionné).

Remarque :
Ce genre d'activités doit détacher un peu l'élève des réflexes "tout ou rien" : un système admet une solution ou n'admet pas de solution. On retrouvera cette idée fondamentale plus loin, sous un autre aspect (méthode des moindres carrés).

Exercice 2 : Cas des 3 points d'abscisses équidistantes

On utilise souvent une interpolation parabolique en prenant trois points équidistants de la fonction f à interpoler (exemple : intégration numérique par la méthode de Simpson).

1) Déterminer a, b, c pour que la courbe représentative de $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = ax^2 + bx + c$ passe par les points

$$(\alpha, f(\alpha) = \alpha') \quad \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \gamma'\right) \quad (\beta, f(\beta) = \beta')$$

2) Application à $f : x \mapsto y = \sqrt{x}$ qu'on interpolera paraboliquement en utilisant les trois points

$$(1 ; \sqrt{1} = 1) \quad (5 ; \sqrt{5} \simeq 2{,}236) \quad (9 ; \sqrt{9} = 3)$$

Exercice 3 : Comparaison entre interpolation linéaire et interpolation quadratique

On se propose dans cet exercice de comparer tant au niveau de la longueur des calculs que de la précision obtenue, interpolation linéaire et interpolation parabolique. On utilisera pour cela la fonction sin en deux endroits différents (près de 0 où la courbure est faible, près de 90° où la courbure est plus forte).

On a $\sin 0° = 0$; $\sin 5° \simeq 0{,}08715$; $\sin 10° \simeq 0{,}17364$; $\sin 80° \simeq 0{,}98481$; $\sin 85° \simeq 0{,}99619$; $\sin 90° = 1$

1) Faire deux interpolations linéaires φ_1 et φ_2 respectivement entre 0° et 5° et entre 5° et 10°, puis une interpolation parabolique π basée sur (0°, 5°, 10°). Etablir et étudier le tableau suivant :

	f(x)	$\varphi(x)$	$\pi(x)$
0°			
1°			
2°			
⋮			
10°			

2) Refaire le même travail pour 80°, 85°, 90°.

3) Quel pas de subdivision faudrait-il choisir pour que des interpolations linéaires assurent la même qualité d'approximation que l'approximation parabolique ?

C - MÉTHODE DE LAGRANGE

La méthode de Lagrange repose sur un fait dont on se convainc facilement : par n + 1 points distincts on peut faire passer une courbe et une seule, représentative d'une fonction polynôme de degré au plus égal à n ; et sur une difficulté dont on se convaincra tout aussi facilement : dès que n est un peu grand (n > 4) la détermination, sans méthode adaptée, de la fonction polynôme amène des calculs inextricables.

La méthode de Lagrange trouve son efficacité dans le choix judicieux d'une base du sous-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré $\leqslant n$. Elle permet des interpolations plus complexes que celles vues précédemment (les interpolations linéaires et paraboliques ne sont jamais que des interpolations de Lagrange pour n = 1 et n = 2). Enfin, elle est à la base, sous des formes particulières, de la plupart de méthodes d'interpolations (méthodes de Newton, Gauss, Stirling, Bessel, ...). Voir [1], [2], [3], et [4]

Exercice 1 : Bases de l'espace vectoriel des polynômes

1) Montrer qu'on peut écrire le polynôme

$$F(x) = 3x - x^2 + 8x^3$$

sous les différentes formes

$$\begin{aligned} F(x) &= 3x - x^2 + 8x^3 \\ &= 10 - 10(1-x) - 7(x-x^2) - 8(x^2-x^3) \\ &= -3 + 4(1+x) - 9(1+x+x^2) + 8(1+x+x^2+x^3) \end{aligned}$$

2) Après avoir vérifié que l'ensemble $\mathcal{T}_3$ des polynômes de degré $\leqslant 3$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des polynômes, on montrera que

$\{1, x, x^2, x^3\}$ (base canonique)
$\{1, 1-x, x-x^2, x^2-x^3\}$
$\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$
sont différentes bases de $\mathcal{P}_3$.

Exercice 2 : Choix d'une base pour le problème de l'interpolation

Soit les cinq points (x_i,y_i) :

$$(-2,3), \quad (0,-2), \quad (1,5), \quad (5,1), \quad (6,7)$$

et $\mathcal{P}_4$ le sous espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant 4$.

1) Montrer que
$$\{1,\ x+2,\ (x+2)x,\ (x+2)x\,(x-1),\ (x+2)\,x\,(x-1)\,(x-5)\}$$
est une base de $\mathcal{P}_4$.

2) Montrer qu'il en est de même de
$$\{x(x-1)\,(x-5)\,(x-6),\quad (x+2)\,(x-1)\,(x-5)\,(x-6),\quad (x+2)x\,(x-5)\,(x-6),\quad (x+2)x\,(x-1)\,(x-6),\quad (x+2)\,x\,(x-1)\,(x-5)\}$$

3) On veut déterminer le polynôme $F(x)$ de degré $\leqslant 4$ qui vérifie $F(x_i) = y_i$ pour $i = 1, \ldots, 5$

a) Mettre en place (*sans les effectuer*) les calculs qui seraient nécessaires pour déterminer F en partant de
$$F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
c'est-à-dire en utilisant la base canonique
$$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$$

b) Montrer l'intérêt des deux bases précédemment mises en place pour le problème d'interpolation posé.

c) Résoudre le problème dans chacune des deux bases.

On trouvera

$$F(x) = 3 - \frac{5}{2}(x+2) + \frac{19}{6}(x+2)x - \frac{143}{210}(x+2)x(x-1) + \frac{31}{210}(x+2)x(x-1)(x-5) \text{ (forme de Newton)}$$

et

$$F(x) = 3\,\frac{x(x-1)\,(x-5)\,(x-6)}{336} - 2\,\frac{(x+2)\,(x-1)\,(x-5)\,(x-6)}{60} + 5\,\frac{(x+2)\,x\,(x-5)\,(x-6)}{60} - 1\,\frac{(x+2)\,x\,(x-1)\,(x-6)}{140} + 6\,\frac{(x+2)\,x\,(x-1)\,(x-5)}{240}$$

(forme de Lagrange)

Remarque :

On trouvera sur la méthode d'interpolation de Lagrange et les formes d'interpolation qui en dérivent des renseignements complémentaires (d'ordre théorique, organisation algorithmique des calculs, ...) dans les ouvrages d'analyse numérique (par exemple [1], [2], [3], [4]). Signalons toutefois les avantages réciproques de la forme de Lagrange et de la forme de Newton, c'est-à-dire l'intérêt du choix judicieux d'une base d'un espace vectoriel :

— la base de Lagrange ne dépend que des abscisses des points d'interpolations. Cette base est donc particulièrement efficace si, pour des abscisses invariantes, on a à faire différentes interpolations pour différentes valeurs des ordonnées (situation fréquente dans les applications).

— la base de Newton n'a pas cette particularité mais donne pour une interpolation donnée, des calculs plus simples. En outre elle permet, sans reprendre tous les calculs, d'ajouter un point à l'ensemble des points d'interpolations (autre situation fréquente dans les applications).

D - INTERPOLATION UTILISÉE COMME MÉTHODE D'APPROXIMATION

On peut avoir à approcher une fonction f à partir de données du type $(x_i, f(x_i))$ d'origine expérimentale ou théorique. Une interpolation donne alors une fonction φ, mais on peut (on doit) en plus essayer d'apprécier la qualité de l'approximation. Cela exige d'avoir sur f des renseignements plus complets qu'une simple liste de valeurs $(x_i, f(x_i))$, renseignements qui concernent en général la dérivabilité à différents ordres de f. On trouvera une étude mathématique complète de ces questions dans [1], [2] ou [3]. Les exercices qui suivent n'ont d'autre prétention que de dégager des idées directrices relatives à ces méthodes. On est, pour ces questions, amené à utiliser le théorème de Rolle : Pour toute fonction dérivable sur $[a, b]$ et telle que $f(a) = f(b)$ il existe au moins une valeur $c \in [a,b]$ telle que $f'(c) = 0$.

Exercice 1 : Approximation linéaire

Soit $f : x \mapsto y = f(x)$ une fonction deux fois continûment dérivable dont on connaît les valeurs :

$$y_1 = f(x_1)$$
$$y_2 = f(x_2)$$

On approche f par une fonction affine L_1 entre ces deux valeurs (cf. A) et on pose

$$R(x) = f(x) - L_1(x)$$

On se propose de majorer $R(x)$ sur $[x_1, x_2]$

1) Soit $\bar{x}$ un réel quelconque de $]x_1,x_2[$ et u l'application

$$x \mapsto u(x) = f(x) - L_1(x) - k(x-x_1)\,(x-x_2)$$

Vérifier que $u(x_1) = u(x_2) = 0$ et montrer qu'un choix convenable de k permet en plus d'avoir $u(\bar{x}) = 0$.

Application numérique : $f(x) = \sin x$

$$x_1 = \frac{5\pi}{12} \qquad y_1 = \sin\frac{5\pi}{12} \simeq 0{,}96592$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} \qquad y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

On trouvera

$$k = \frac{\sin\bar{x} - L_1(x)}{\left(\bar{x} - \frac{5\pi}{12}\right)\left(\bar{x} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

2) En appliquant à u, puis à u', le théorème de Rolle, montrer qu'il existe une valeur ξ de $[x_1, x_2]$ telle que

$$u''(\xi) = f''(\xi) - 2\,k$$

En déduire

$$R(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L_1(\bar{x}) = \frac{f''(\xi)}{2} (\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)$$

3) Soit

$$M_2 = \sup_{x \in [x_1, x_2]} |f''(x)|$$

Montrer qu'alors

$$|R(\bar{x})| \leqslant \frac{M_2}{2} |(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)|$$

c'est-à-dire, x étant un réel quelconque de $[x_1,x_2]$, on a pour tout $x \in [x_1,x_2]$

$$|R(x)| \leqslant \frac{M_2}{2} |(x - x_1)(x - x_2)|$$

Application numérique : appliquer ces résultats au cas numérique décrit en 1)

Exercice 2 : Approximation parabolique

Soit $f : x \mapsto y = f(x)$ une fonction trois fois continûment dérivable dont on connaît les valeurs :

$$y_1 = f(x_1) \quad y_2 = f(x_2) \quad y_3 = f(x_3) \qquad x_1 < x_2 < x_3$$

On approche f par une fonction trinôme L_2 passant par les trois points donnés (cf.B) et on pose

$$R(x) = f(x) - L_2(x)$$

On se propose, comme dans l'exercice précédent, de majorer $R(x)$ sur $[x_1,x_3]$. On reprend pour cela la même méthode, c'est à dire que l'on introduit la fonction auxiliaire :

$$u(x) = f(x) - L_2(x) - k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

et, pour une valeur arbitraire $\bar{x}$, distincte de x_1, x_2 et x_3 on choisira k tel que $u(\bar{x}) = 0$.

En utilisant alors trois fois le théorème de Rolle, montrer que

$$R(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L_2(\bar{x}) = \frac{f'''(\xi)}{3!} (\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_3)$$

où $\xi \in [x_1,x_3]$.

Puis, en désignant par $M_3 = \sup_{x \in [x_1,x_3]} |f'''(x)|$, en déduire

$$|R(x)| \leqslant \frac{M_3}{3!} |(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)|$$

Application numérique : $f(x) = \sin x$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \quad y_1 = f(x_1) = \sin\frac{\pi}{3} \simeq 0{,}86602$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{12} \quad y_2 = f(x_2) = \sin\frac{5\pi}{12} \simeq 0{,}96592$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} \quad y_3 = f(x_3) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Remarque :

La méthode utilisée dans les deux exercices précédents se généralise sous certaines conditions restrictives sur f. On démontre que si f est une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur $[a,b]$ et que si L_n désigne son polynôme interpolatoire de Lagrange, basé sur les points d'abscisses $x_0, x_1, \dots x_n$ avec $a \leqslant x_0 < x_1 < \dots < x_n \leqslant b$ alors

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)|$$

avec $M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} f^{(n+1)}(x)$

E - INTERPOLATION DE TCHEBYCHEV

La formule précédente montre que l'erreur $R_n(x)$ dépend de trois facteurs :

1) Du nombre $(n+1)$ des points d'interpolation

2) Du nombre M_{n+1} qui dépend de la fonction donnée f et sur lequel on ne peut donc pas agir

3) Du polynôme
$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Pour un nombre donné de points d'interpolation la borne supérieure de $\Pi_{n+1}(x)$ sur $[a,b]$ peut varier considérablement selon la répartition des valeurs x_i sur le segment $[a,b]$ (Par exemple si les x_i sont concentrés près de a, $\Pi_{n+1}(x)$ peut devenir très grand pour x voisin de b). On peut donc se poser le problème de la meilleure répartition des points d'interpolation, c'est-à-dire de la meilleure répartition des x_i sur $[a,b]$ pour que $\Pi_{n+1}(x)$ "s'écarte de zéro sur $[a,b]$ le moins possible". Ce problème a été résolu en 1874 par Tchebychev qui a démontré que le meilleur choix des x_i était

$$x_i = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i+1}{2n+2} \pi$$

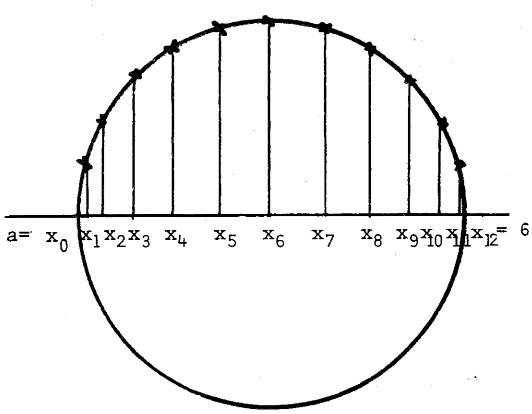
Les nombres $\cos \frac{2i+1}{2n+2} \pi$ sont alors les zéros du polynôme de Tchebychev

$$T_{n+1}(x) = \cos [(n+1) \operatorname{Arccos} x]$$

et on a

$$|\Pi_{n+1}(x)| = |T_{n+1}(x)| \leqslant 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$$

On remarquera que la répartition optimale des x_i n'est pas régulière, mais qu'il y a accumulation des points vers les extrémités du segment $[a,b]$. Ils sont projections des 2n sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre $\frac{b+a}{2}$ et de rayon $\frac{b-a}{2}$



répartition optimale des x_i pour n = 12

On trouvera dans [7], pages 20 et suivantes, une suite d'exercices accessibles à un élève de terminale et mettant en évidence les résultats énoncés ci-dessus.

Remarque

On démontre que la qualité de l'approximation obtenue avec les polynômes de Tchebychev vérifie sur $[-1,+1]$ les deux propriétés suivantes :

1) si f est lipschitzienne alors

$$\|f-L_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1,+1]} |f(x)-L_n(x)| = O\left(\frac{\operatorname{Log} n}{n}\right)$$

2) si f est de classe C^{p+1} alors

$$\|f-L_n\|_\infty = O\left(\frac{\operatorname{Log} n}{n^p}\right)$$

F - INDICATIONS SOMMAIRES SUR QUELQUES AUTRES TYPES D'APPROXIMATIONS

Dans un problème d'interpolation il s'agit de *créer* une fonction qui passe par des *points donnés* (x_i, y_i). Dans un problème d'approximation il s'agit de trouver une fonction φ qui soit une "bonne approximation" d'une autre fonction f *pour toute valeur x* d'un intervalle.

Dans la pratique on a vu, dès les exemples précédents, que certaines méthodes interpolatoires peuvent être utilisées comme méthodes d'approximation dans la mesure où les valeurs y_i sont des valeurs particulières prises par une fonction $f : y_i = f(x_i)$. On a par ailleurs vu que certains renseignements sur f permettent alors de "mesurer" la qualité de l'approximation obtenue.

Il existe d'autres types d'approximations où l'on peut approcher une fonction donnée f par une fonction φ :

— approximations tayloriennes
— séries de Fourier
— approximations rationnelles
— méthodes de moindres carrés
— méthode spline cubique
— ...

Il s'agit ici simplement de donner quelques idées directrices et quelques ébauches d'activités permettant à des élèves du secondaire d'avoir quelques ouvertures vers d'autres méthodes d'approximations couramment utilisées.

I - Approximations Tayloriennes

Exercice 1 : Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,x]$. On peut alors écrire

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

1) En choisissant comme primitive de 1 la fonction

$$t \mapsto -(x-t)$$

montrer qu'une intégration par parties permet d'écrire

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)dt$$

2) En réutilisant la même méthode, montrer qu'on obtient

$$f(x)-f(a) = f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t)dt$$

puis plus généralement la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x)-f(a) = f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n$$

avec

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Le polynôme

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

est alors une approximation de f(x) avec une erreur (reste)

$$R_n = f(x) - T_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

3) Application aux fonctions sin x et e^x

Exercice 2 : Majoration de l'erreur

Soit $M_{n+1} = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$

Montrer qu'alors $|R_n| \leqslant M_{n+1}\dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

Exercice 3 : Formule de Mac-Laurin

1) Réécrire ce qui précède, en particulier pour les fonctions sinus et exponentielle, dans le cas où $a=0$.

2) Etudier graphiquement la qualité des approximations obtenues au voisinage de 0 pour $n=1,2,3$, avec les fonctions sin x et e^x.

II - Résolution approchée de système d'équations linéaires et approximations s'y rattachant

Il ne s'agit pas de trouver une approximation d'une solution d'un système, mais d'aborder un type de problème qui se rencontre fréquemment dans des problèmes d'approximation de fonctions et aussi dans de nombreuses situations pratiques : on est en présence d'un système de n équations linéaires à p inconnues avec $n>p$ (système surdéterminé).

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{aligned}$$

Un tel système peut s'interpréter vectoriellement dans $\mathbf{R}^n$ par

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots\ldots + x_p\vec{a}_p = \vec{b}$$

et de ce point de vue le système admet ou n'admet pas de solution selon que $\vec{b}$ appartient ou n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \vec{a}_p)$. Il est regrettable, pour la formation de nos élèves, que l'on s'en tienne dans la plupart des cas à cette vision manichéenne. Le praticien (mathématicien, physicien, ingénieur, économiste, ...) ne peut, en général, pas se contenter d'affirmer que si $\vec{b}$ n'appartient pas au s.e.v. $(\vec{a}_1,\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p)$ alors il n'y a pas de solution, mais il lui faut faire "pour le mieux" c'est-à-dire trouver le vecteur $\vec{b}'$ du sous-espace qui soit le plus "proche" de $\vec{b}$ c'est-à-dire minimiser

$$\|\vec{b}-\vec{b}'\| \text{ avec } \vec{b}' = \sum_{i=1}^{p} x_i\vec{a}_i$$

Lorsque la norme est euclidienne, une telle approximation repose sur un fait géométrique bien connu. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{a}_1,\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p)$ et F' son orthogonal. Le vecteur $\vec{b}$ s'écrit alors d'une façon et d'une seule sous la forme

$$\vec{b} = \vec{b}' + \vec{b}'', \vec{b}' \in F, \vec{b}'' \in F'$$

et

$$\| \vec{b} - \vec{b}' \| = \|\vec{b}''\| = \inf_{\vec{\beta}\in F} \| \vec{b} - \vec{\beta} \|$$

Le vecteur $\vec{b}'$, vecteur de F le "plus proche" de $\vec{b}$ apparaît donc comme la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur F. Lorsqu'on dispose dans F d'une base orthonormée $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ alors

$$\vec{b}' = \sum_{i=1}^{k} (\vec{b} \cdot \vec{e}_i)\, \vec{e}_i \qquad \text{(voir [18])}$$

Exercice 1 :

Dans une usine on produit x objets A et y objets B. La production (x, y) devrait vérifier les conditions suivantes

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 53 \\ 3x - 5y &= 21 \\ x - y &= 200 \end{aligned}$$

Déterminer la "meilleure" production possible, c'est-à-dire le couple (x_0, y_0) pour lequel le vecteur

$$\vec{b}_0 \begin{pmatrix} 2x_0+3y_0 \\ 3x_0-5y_0 \\ x_0+y_0 \end{pmatrix} \quad \text{minimise} \quad \|\vec{b} - \vec{b}_0\| \text{ avec } \vec{b}=(53,21,200)$$

Exercice 2 :

Soit les 4 points A(1,2) , B(2,3) , C(3,5) , D(4,4).

Déterminer la droite (d) d'équation $y=ax+b$ qui passe "au plus près" des quatre points, au sens décrit précédemment. Utiliser les formules habituelles d'ajustement linéaire et comparer les résultats.

Exercice 3 :

Soit les 4 points A(−1,4) , B(0,3) , C(1,4) , D(3,5).

En utilisant la méthode décrite précédemment, déterminer la fonction $x \to y=ax^2+bx+c$ passant, sinon par les quatre points, le "plus près possible" de ces 4 points.

Il est intéressant de voir que par cette méthode on peut "visualiser géométriquement" une première approche de l'approximation d'une fonction périodique par des polynômes trigonométriques. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de période 1. On vérifiera que

$$(f,g) \mapsto (f|g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

est un produit scalaire et pour ce produit scalaire les fonctions

$$\begin{aligned} c_n &: t \to c_n(t) = \sqrt{2}\cos 2\pi nt \qquad n>0 \text{ et } c_0=1 \\ s_n &: t \mapsto s_n(t) = \sqrt{2}\sin 2\pi nt \qquad n>0 \end{aligned}$$

forment une famille orthonormée. Soit F_p le sous espace engendré par $\{c_0,c_1, \ldots, c_p\} \cup \{s_1,s_2, \ldots, s_p\}$. On obtient alors, pour une fonction f de E les $2p+1$ premiers termes de sa série de Fourier en écrivant que

$$f = f_F + f_{F'},$$

avec

$$f_F = \sum_{n=0}^{p} a_n c_n \qquad f_{F'} = \sum_{n=1}^{p} b_n s_n$$

et

$$a_n = (f|c_n) \qquad b_n = (f|s_n)$$

Remarque :

Cette présentation des séries de Fourier trouvera un cadre plus naturel et plus efficace dans l'espace vectoriel hermitien des fonctions continues de période 1 à valeurs complexes, muni du produit hermitien

$$(f,g) \to (f|g) = \int_0^1 \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$$

et en considérant la famille orthonormée

$$e_n : t \mapsto e^{2\pi int}, \; n \in \mathbf{Z}$$

III - Lissage par fonctions spline cubique

On a vu que les méthodes d'interpolation précédentes utilisaient, pour interpoler $n+1$ points, soit des polynômes de degré élevé (n en général, moins dans des cas particuliers), on a alors une fonction de classe C^∞ sur **R**, soit des interpolations linéaires ou paraboliques "segment par segment", on a alors une fonction continue, mais présentant en général des points anguleux aux points d'interpolation.

On peut envisager de faire une interpolation "segment par segment" avec des arcs de polynômes de faible degré mais en imposant de "bons raccordements" c'est-à-dire en exigeant dérivée première ou, mieux, dérivée seconde continue.

Exercice 1 : Impossibilité de "bons raccordements" paraboliques

Soit 3 points (x_1,y_1) ; (x_2,y_2) ; (x_3,y_3) et deux fonctions f et g :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ g(x) &= a'x^2 + b'x + c' \end{aligned}$$

On désirerait choisir a,b,c,a',b',c' tels que

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1 \\ f(x_2) &= g(x_2) = y_2 \\ g(x_3) &= y_3 \\ f'(x_1) &= \alpha \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels donnés}) \\ g'(x_3) &= \beta \\ f'(x_2) &= g'(x_2) \end{aligned}$$

Montrer pourquoi ce problème n'admet, en général, pas de solution.

Exercice 2 : "Bons raccordements" cubiques

Soit toujours les mêmes trois points que dans l'exercice précédent, ainsi que les mêmes conditions ; mais ici on choisit deux fonctions f et g polynômes du 3e degré :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3+bx^2+cx+d \\ g(x) &= a'x^3+b'x^2+c'x+d' \end{aligned}$$

Montrer que, non seulement le problème admet toujours des solutions, mais qu'il reste même un paramètre indéterminé.

Remarque :

Le simple fait qu'il reste "mathématiquement" un paramètre indéterminé permet de s'offrir le luxe supplémentaire :

$$f''(x_2) = g''(x_2)$$

et ceci n'est pas simplement un luxe gratuit, mais est particulièrement intéressant pour des questions physiques (exemple : raccordement "en douceur" de deux virages d'une route) et de résistance des matériaux : lorsqu'on impose à une tringle élastique de passer par des points donnés elle se met en position de raccordement cubique avec dérivée seconde continue. C'est de ce dernier fait, très utilisé par les praticiens, que vient la dénomination de cette méthode (spline = tringle).

IV - Approximations rationnelles de fonctions

Les approximations utilisées dans la pratique ne sont pas seulement des approximations polynomiales ou trigonométriques. En particulier, contrairement à une idée répandue, les valeurs de certaines fonctions transcendantes sont calculées par des calculatrices électroniques à l'aide d'approximations rationnelles non polynomiales. Nous ne donnons aucune indication sur les méthodes utilisées pour obtenir de telles approximations (voir [1]). Ces méthodes sont en général basées sur le développement en fraction continue de *fonctions*. Mais nous proposons ici l'étude expérimentale de la qualité de certaines de ces approximations.

Exercice 1 :

Vérifier que

$$|x| < \frac{\mathrm{Log}2}{2} \Rightarrow \left| e^x - \frac{12(x^2+10)+x(x^2+60)}{12(x^2+10)-x(x^2+60)} \right| \leqslant 10^{-8}$$

Exercice 2 :

Comparer

$$e^x \text{ et } \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$$

et déterminer un intervalle [a,b] tel que

$$x \in [a,b] \Rightarrow \left| e^x - \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} \right| < 10^{-3}$$

Exercice 3 :

Sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right]$, puis sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$

comparer

$$\mathrm{Log}\,(1+x)\,, \quad \frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2}\,, \quad \frac{60x+60x^2+11x^3}{60+90x+36x^2+3x^3}$$

BIBLIOGRAPHIE

Les titres [1] à [4] sont des ouvrages d'analyse numérique donnant de larges développements aux questions abordées ici, abordant d'autres questions fondamentales en analyse numérique (résolution d'équations, de systèmes,...).

Les titres [5] à [8], sans être consacrés à l'analyse numérique, en donnent des applications et des éclairages intéressants.

Les titres [9] à [11] donnent un éclairage plus historique.

Les titres [13] à [18] sont, pour la plupart, des ouvrages de niveau plus élevés ou abordant des questions plus spécifiques.

[1] HILDEBRAND F.B.
Introduction to Numerical Analysis ; Mc. Graw-Hill - New-York, 1974.

[2] DEMIDOVITCH B. et MARON I.
Elements de Calcul Numérique ; Editions de Moscou 1973

[3] BAKHVALOV N.
Méthodes numériques ; Editions de Moscou 1976

[4] BARANGER J.
Introduction à l'Analyse Numérique ; Hermann, Paris

[5] ENGEL A.
Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique ; CEDIC, Paris, 1979.

[6] I.R.E.M. de MARSEILLE
Analyse 1, 2, ...

[7] YAGLOM A. M. et YAGLOM I.M.
Chalenging Mathematical Problems, volume 2 ; Holden-Day, San Francisco

[8] Calculateurs programmables dans les collèges et les lycées - Recherches pédagogiques N° 75 ; I.N.R.P., Paris

[9] TCHEBYCHEV P.L.
Sur les quadratures, J. Math. Pures Appl. 19, p. 118-120 (1874)

[10] GOLDSTINE H.
A History of Numerical Analysis; Springer, Berlin, 1978.

[11] OVAERT J.L.
Calcul numérique in "Encyclopédia Universalis" (supplément 1980)

[12] OVAERT J.L. et VERLEY J.L.
Algèbre 1 ; Cedic 1981

[13] BEREZYN I.S. - ZHYDKOW N.P.
Computing Methods (2 volumes) ; Pergamon Press, Oxford, 1963

[14] DAVIS P.
Interpolation and Approximation ; Blondsdell, New-York, 1963

[15] LORENTZ C.G.
Approximation of functions ; Holt, New-York, 1964

[16] VARGA R.S.
Matrix iterative analysis ; Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1962

[17] AHLBERG J.H., NILSON E.N., WALSH J.L.
The theory of splines and their applications ; Academic Press, New-York,

[18] STEWART G.W.
Introduction to matrix computation ; Academic Press, New-York.

3^e PARTIE : ACTIVITES ET PUBLICATIONS DES GROUPES DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

1 - ACTIVITES DES GROUPES I.R.E.M. PARTICIPANT AU GROUPE INTER-I.R.EM. D'ANALYSE

Les groupes IREM-Analyse sont formés d'enseignants du Supérieur et du Secondaire. Ils comptent en général de cinq à dix personnes. Parmi les motivations qui amènent à participer à de tels groupes, on trouve notamment :

— le besoin de réflexion collective sur les problèmes pédagogiques vécus chaque jour dans la classe. La confrontation des expériences conduit à se remettre en question, donne des éléments pour progresser, appelle à diversifier ses recherches et ses sources de réflexion personnelle.

— le besoin de renouveler ses méthodes de travail, de savoir susciter l'intérêt des élèves, de leur proposer des activités mathématiques significatives et formatrices.

— le besoin de remettre à jour ou de compléter ses connaissances théoriques. Mieux maîtriser un sujet permet de mieux l'enseigner, même (ou surtout ?) si c'est à un niveau élémentaire.

— le besoin d'aborder certaines notions de façon pluridisciplinaire.

Dans la plupart des cas les travaux des groupes analyse sont menés à deux niveaux :

— un niveau général : réflexion sur l'analyse, sur son enseignement à un stade donné ou à tous les stades (d'un point de vue scientifique), sur les objectifs de cet enseignement.

— un niveau plus ponctuel ou pratique : partant des réalités ambiantes (programmes, homogénéité ou hétérogénéité des classes, motivation des élèves...) il s'agit de recenser les difficultés concrètes de l'enseignement de l'analyse, d'en chercher les origines, de proposer des remèdes.

Ces travaux s'étalent en général sur plusieurs années scolaires. Ils intègrent le plus souvent à leur progression des expérimentations avec des classes réelles. Seules ces expérimentations et les conclusions qui s'en dégagent permettent de juger les modifications pédagogiques que propose un groupe. Ces comptes rendus d'expérimentations illustrent fréquemment les publications au travers desquelles les divers groupes I.R.E.M. voudraient faire connaître les résultats théoriques ou pratiques de leurs activités.

2 - PUBLICATIONS DES GROUPES INTER-I.R.EM. D'ANALYSE

Colloque Inter-I.R.E.M.

• *Colloque "Enseignement de l'analyse" (janvier 1977 - Dijon)*

① Usage des calculateurs programmables dans l'enseignement de l'analyse

— Dresser des tables de valeurs numériques : usage de ces tables. Calcul des différences finies, interpolation.
— Limite d'une fonction : faire présenter en première l'existence d'une limite en 2 (resp. en $+\infty$) de la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ (resp : $x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$) au moyen d'une sous-suite d'une suite avec utilisation d'une HP - 25.
— Résolution approchée d'équations par la méthode de Newton (avec HP - 25) : étude expérimentale d'exemples ($x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, $x - \sin x - 0{,}25 = 0{,}1$ $x^3 + x = 1000$...) et étude théorique de conditions suffisantes de convergence.
— Calcul d'intégrales par des méthodes d'approximations (et HP - 25) et comparaison des méthodes (fonctions en escalier, trapèzes, tangentes, Simpson).
— Pour une approche heuristique de l'analyse (en Terminale C) : "Comprendre d'abord, formaliser ensuite" (déclaration d'intentions).

② Analyse et épistémologie : réflexions sur la situation actuelle et les remèdes possibles, autour des thèmes suivants : suites et fonctions, calcul intégral, la notion de rigueur en analyse.

③ Activités préparatoires à l'analyse : propositions pour organiser ces activités.

④ Les causes d'échecs et d'erreurs en analyse.

⑤ A propos de la notion de limite de la maternelle à l'Université (réflexion générale).

⑥ Liaisons Terminales - DEUG (réflexion générale)

* * *

Bordeaux

• *Dans le journal de liaison de l'I.R.E.M. de Bordeaux de mars 1978 :*

① — *une introduction à la notion de suite réelle en Seconde :* une série de TD destinés à familiariser les élèves avec la notion de suite réelle infinie, de convergence, de rapidité de convergence, et par là à préparer le terrain pour le concept de limite ; avec quelques exemples de situations concrètes où les suites interviennent.

② — *A propos d'intégrales :* des thèmes d'activités pour montrer qu'on peut faire bien des choses avec les intégrales sans les ramener à des calculs de primitives.

③ — *Une définition des fonctions Log et Exp. à partir de Suites :* par une considération "naturelle" Log est définie à partir de $\lim_{n \to +\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$, et les propriétés de Log sont démontrées élémentairement (niveau Terminale C) à partir de cette définition. Puis Exp. est obtenue comme fonction réciproque.

• *Dans le journal de liaison de l'I.R.E.M. de Bordeaux de juin 1979 :*

④ — A propos des dérivées d'une fonction en un point : lien entre la notion de dérivée n^{me} de f en x_0 et la notion de meilleure approximation locale en x_0 de f par un polynôme de degré n.

• *Autres documents*

⑤ — *Une présentation de l'intégrale de Riemann à l'aide de suites* (1978) : en cherchant à "calculer" l'aire de la surface associée à une courbe $y = f(x)$ on est amené à définir l'intégrale de Riemann au moyen de 2 suites intrinsèquement liées à une fonction f bornée sur [a,b], et on démontre les propriétés classiques de l'intégrale à partir de cette définition.

⑥ — *Quelques exercices d'analyse pour le second cycle* (1978) : propositions de thèmes d'activité (de la Seconde à la Terminale) visant à familiariser l'élève avec les techniques clefs du raisonnement en analyse : majorations, minorations, encadrements, recherche de valeurs approchées, évaluation d'erreurs, amélioration d'une approximation, d'une rapidité de convergence...

⑦ — *Quelques TD numériques* (1979) : approximations de fonctions usuelles (sin, cos, Log, exp.,...) avec usage de calculatrices.

⑧ — *Une série de fiches d'analyse pour la classe de Première* (1978) : par une succession de TD où les élèves sont amenés à manipuler des suites et des fonctions on essaie de faire apparaître les questions clefs du programme d'analyse. La priorité est donnée aux préoccupations d'ordre quantitatif ou global, le souci du qualitatif et du local vient après (les inégalités de type lipschitz jouant un rôle primordial).

⑨ — *Compte rendu du séminaire d'analyse — Guadeloupe — mars 1977*
Approximation de $\sqrt{2}$ par la résolution de l'équation $x^2 - 2 = 0$
Approximation de la somme de la série $\Sigma \frac{1}{n^2}$ par encadrements des restes.
Thèmes d'activités reposant sur des majorations ou minorations d'intégrales
Introduction à la notion de limite de suite en Seconde.

* * *

Dijon

• Dans le document *Pour une approche heuristique de l'enseignement de l'analyse* (avec usage de calculatrices) (1978) (D. Reisz et C. Wasserer) :

① Approche heuristique des nombres réels : à partir des développements décimaux ; à partir d'une "pseudo-convergence" dans $\mathbb{Q}$ (suites de Cauchy), d'où la notion de coupure.

② Approche heuristique de la notion de convergence de suites réelles : par l'étude expérimentale de plusieurs suites il s'agit d'amener les élèves à prendre conscience du phénomène de convergence.

③ Fonctions : à propos de fonctions explicites, ne pas se contenter d'une étude qualitative, mais montrer l'intérêt de l'aspect quantitatif, la compréhension concrète des concepts qu'il permet.

④ Résolution approchée d'équations : intérêt des méthodes approchées quand on ne connaît pas de formules universelles, approfondissements théoriques que ces méthodes appellent...

⑤ Calcul intégral (même objectif que dans le point 4).

• *Autres publications*

⑥ *Bulletin spécial "exercices"* (mars 1978) : propositions de thèmes d'exercices d'analyse ou de géométrie, tirés souvent de domaines extra-mathématiques, échelonnés de la 6e à la Terminale.

⑦ *Bulletin spécial "activités numériques"* (avril 1979)

— Histoire du calcul numérique
— Leibniz et la numération binaire
— La division à l'école élémentaire...et après
— Calcul numérique : exemples introduisant les notions de fraction et de rationnel (4e)
— Jeux de nombres dans le 1er cycle : exemples de situations, autour de nombres, où il est assez difficile de "théoriser", pour lesquelles le professeur n'a pas un discours tout prêt.
— Les détours du jeu de Tzyanshidzi :
— Grand prix de formule 1 : exemples d'études expérimentales de rapidité de convergence de suites (Terminale)
— Calculs et moyennes : quelques exemples concrets où interviennent les notions de moyennes arithmétiques, géométriques, harmoniques ou quadratiques.
— Valeurs approchées : intérêt des moyennes arithmétiques, géométriques ou harmoniques pour obtenir des valeurs approchées de nombres dont on connaît un encadrement, en liaison avec le critère d'optimisation choisi.
— Calculs numériques et racines carrées : une méthode d'approximation de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par une suite de fonctions rationnelles, avec connaissance à chaque étape de l'approximation, et programmation de cette méthode sur un calculateur.
— A propos des dénombrements : nombres de Stirling et nombres de Bell.

⑧ *Pages et calculs choisis de Blaise Pascal (1978)*

* * *

Grenoble

• Dans le document *Activités préparatoires à l'analyse* (1978) :

① Valeur absolue — Distance sur **R** — Intervalles : comprendre ces notions dans leurs divers aspects au moyen d'activités sur fiches (niveau 4e).

② A propos de l'approximation (en seconde) de $\frac{1}{x}$ au voisinage de 1, de $\sqrt{1-x^2}$ au voisinage de $\frac{1}{2}$

③ Une étude expérimentale de suites et séries géométriques de raison $q \in]-1,1[$.

• *Autres publications*

④ *Quelques réflexions sur l'analyse enseignée en Première et Terminales C et D* (1976) : mise en évidence des difficultés pédagogiques que soulèvent six thèmes précis, propositions de remèdes : la composition des applications, les notations sur les fonctions, les définitions de continuité et dérivabilité, continuité et dérivabilité sur un intervalle, limites d'applications dérivées, fonctions croissantes.

⑤ *Les notions spontanées de limite en conflit avec la notion mathématique* (1980) : au moyen de tests et interviews, le groupe I.R.E.M. a cherché à déceler comment les notions de "tendre vers" et de "limite" sont assimilées par les élèves, comment les connaissances spontanées des élèves et le concept mathématique se juxtaposent, se complètent ou se contrarient.

* * *

Lille

① *Approche des réels en classe de 4e* (P. Jeannin et J.P. Muselet — 1974) : Série de fiches rédigées pour les élèves de 4e.

② *Sur les nombres réels et la géométrie* (R. Bkouche 1977) : A propos du rapport géométrique - numérique : il n'y a pas de priorité de l'un ou de l'autre, les deux domaines sont liés et chacun d'eux permet d'éclairer l'autre.

③ *Logarithmes et exponentielles* (D. Poisson 1977 — Formation des adultes) : construction des fonctions logarithmes et exponentielles par la recherche de solutions mathématiques à des problèmes d'origine concrète.

④ *Pente — Hauteur — Surface* (D. Poisson - 1978 - Formation des adultes) : introduction à la dérivation et à l'intégration.

⑤ *A propos de la notion de limite* (P. Tison — Bulletin n° 3 de l'I.R.E.M. de Lille — Novembre 1976) : Remarques d'ordre général sur l'introduction de l'analyse dans l'enseignement, du cours moyen aux Terminales.

⑥ *A la poursuite des réels* (A. Michel et P. Tison 1980) : Quelques exercices destinés à faire appréhender la notion de nombre réel avec usage de petites calculatrices.
— Calcul de racines carrées (4e et 3e) : existence de $\sqrt{2}$, encadrements de $\sqrt{2}$ par des procédés algébriques ou géométriques.
— Calcul approché de π (de la 3e à la Terminale) : deux méthodes basées sur des encadrements de l'aire du quart de disque ou du disque : méthode des rectangles et méthode des aires des polygones inscrits ou circonscrits
— Calcul approché de la racine k^{me} (Première et Terminale)
— Autres méthodes de calcul approché de π : méthode des isopérimètres (suite de Nicolas de Cusa) ; méthode du périmètre des polygones inscrits ou circonscrits : formule de Viète.

⑦ *Esprit de corps et esprit de suite* (1981) (A. Michel et P. Tison) (Niveau : approfondissement théorique pour les enseignants). Etude des relations entre la propriété d'Archimède et les diverses propriétés de complétion.

* * *

Limoges

① *Les nombres réels* (J. Dupuis - 1973) (Approfondissement théorique pour les enseignants). Construction de **R** : 1) à partir des décimaux, 2) à partir des suites de Cauchy, 3) à partir des sections commençantes.

② *Introduction à l'analyse en Seconde à l'aide de mini-calculateurs* (M. Clément - 1979) : Série de fiches à utiliser avec une petite calculatrice programmable, visant à mettre l'élève en présence de représentations graphiques nombreuses et variées et à susciter autour d'elles des problèmes d'interpolation linéaire, de calcul approché de racines d'équations, de recherche d'extremum.

③ Approximation des racines d'une équation $f(x)=0$ (J. Ezquerra - 1978) : Etude de problèmes théoriques, et traitement sur calculatrices.

④ *Continuité - Limites - Dérivation - Etude de fonctions en Première B* (1979) : Série de fiches de T.P. destinées à des élèves de Première B, les objectifs étant : ne pas ramener l'étude des limites à l'application de recettes, rendre concrète la notion de continuité, introduire le nombre dérivé à partir d'exemples physiques et économiques, utiliser la fonction dérivée et l'étude de fonctions dans des problèmes de physique et d'économie.

⑤ *Analyse I* (MM. Blanchet et Roumilhac - 1979) : Exposé des définitions fondamentales et théorèmes classiques, suivi d'exercices d'application, pour les notions suivantes : domaine d'existence d'une fonction, limites, continuité, sens de variation, dérivées, fonction affine tangente.

* * *

Lyon

① *Premiers balbutiements* (1976) :
— L'enseignement de l'analyse en question
— Enquête sur la connaissance des nombres réels chez les élèves de la 3e à la Terminale (toutes sections)
— Des décimaux aux réels (réflexion générale)
— Etude de fonctions en Seconde : construction graphique précise de paraboles d'où valeurs approchées de racines carrées, construction graphique précise de la courbe d'équation $y=\frac{1}{x}$
— Fonctions circulaires : proposition pour réintroduire les fonctions circulaires par une "description" du cercle trigonométrique, intérêt pédagogique de cette méthode dans le déroulement du cours d'analyse
— Aires : proposition de retour à l'ancienne présentation de l'intégrale par les aires, en particulier pour construire la fonction Log.

② *Pliages et calculs* (avril 1979) : Comment construire sur le segment [0,1], matérialisé par une bande de papier, n'importe quel point d'abscisse donnée (entre 0 et 1) avec l'approximation désirée, uniquement par une succession de pliages en deux. Exposé des fondements théoriques de cette recherche et de ses prolongements.

③ *Intégration* (janvier 1979) : Proposition pour un enseignement de l'intégration en Terminale basé sur l'étude de "problèmes d'intégration" et non sur une définition préalable. Ces problèmes sont entre autres : aire plane délimitée par $y=f(x)$, centre de gravité, volume de révolution, moment d'inertie, travail d'une force, quantité d'électricité, distance parcourue par un mobile.

Dans *Sans tambour ni trompette* (juin 1978) : Concernant l'analyse on trouve les articles ④ et ⑤ :

④ — Autour de π : historique de diverses méthodes d'approximation de π (Egyptiens, Babyloniens, Archimède, Hippocrate de Chio, Métins, Huyghens, Viète, Wallis et les modernes).

⑤ — Deux T.P. de maths. en Terminale avec calculatrices : construction de quelques courbes point par point, approximation de la constante d'Euler par usage des "paquets de Cauchy".

⑥ *Vers la dérivée en Première A* (R. Gauthier - 1977) ; On cherche à rendre sensible à des élèves de Première A la notion de dérivée au travers d'activités multiples tirées le plus souvent de problèmes concrets.

⑦ *Premiers pas* (1977) :
— Les fractions en 6e et 5e : présentation d'une expérience destinée à apprendre aux élèves de 6e et 5e la manipulation des fractions (et non la définition du corps des rationnels).
— A propos de l'enseignement de la récurrence en Terminale.
— A propos de quelques axiomes des réels (segments emboîtés, borne supérieure, Archimède)
— Calculs numériques avec ou sans machine dans le second degré : suites récurrentes de rationnels convergeant vers $\sqrt{a}$ avec maîtrise de l'approximation (processus de Héron), convergence vers π (formules de Wallis, de Viète, méthode des polygones réguliers inscrits ou circonscrits à un cercle de rayon 1) avec usage de machines programmables.
— A propos de la monotonie : réflexion sur les rapports de la monotonie avec l'intégrabilité, la dérivabilité, la continuité.
— Fonctions dérivées et théorème des valeurs intermédiaires
— Le formalisme des dérivées et des différentielles.

* * *

Marseille

① *Suites* (1980) (in "Analyse I") : Proposition d'activités autour de la notion de suite réelle (classes de Seconde et Première) destinées à familiariser les élèves avec la notion de suite infinie, de convergence, de rapidité de convergence, à leur faire percevoir l'efficacité de cet outil (approximation des réels par des suites de décimaux, solutions approchées d'équations, étude des restes de séries convergentes ou des sommes partielles de séries divergentes, approximation de fonctions et de nombres attachés à des fonctions).

② *Calcul de valeurs approchées de π et calcul des fonctions trigonométriques* (1981) :
— Méthode des polygones inscrits et exinscrits : méthode d'Archimède et méthode utilisant l'encadrement de Snellius

$$\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \leqslant x \leqslant \frac{2 \sin x + \operatorname{tg} x}{3}$$

— Méthode des développements en séries : méthodes de James Gregory (par développement de Arctgx en série entière), méthode d'Euler.

③ *Calcul des fonctions Exp. et Log.*

④ *Intégration* (1980) (in "Analyse I")

1) Réflexion sur le rôle de la formule d'intégration par parties dans de nombreux problèmes d'approximation de fonctions (avec évaluation de la performance du procédé d'approximation)

2) Quelques méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales : exposé des méthodes (rectangles, trapèzes, tangentes, Simpson), contrôle des erreurs.

⑤ *Eléments de bibliographie sur le calcul infinitésimal et l'analyse* (1979) : par J.L. Ovaert, in "Bulletin Inter-IREM n° 18 — Histoire de Mathématiques et Epistémologie"

⑥ *Histoire du calcul numérique* (1979) (J.L. Ovaert in Encyclopedia Universalis) : Il s'agit de mettre en lumière comment dans l'histoire des mathématiques il y a interaction constante entre les problèmes numériques et l'approfondissement des concepts fondamentaux de l'analyse.

⑦ *Objectifs et méthodes de travail pour l'enseignement de l'analyse dans le secondaire* (1980) (in "Analyse I") : Le groupe analyse de l'IREM de Marseille :

1) fait une étude de l'état actuel de l'enseignement de l'analyse

2) présente ses objectifs et méthodes de travail

3) dresse une liste précise des problèmes de l'analyse qui doivent être abordés au cours de la scolarité

4) analyse le rôle didactique que peuvent avoir les calculatrices de poche : contribution à l'apprentissage du calcul, contribution aux activités liées à l'analyse.

⑧ *Résolution de l'équation $f(x)=x$ par approximations successives* (1980) (in "Analyse I") (Approfondissement théorique des enseignants). Etude de l'existence et de l'unicité d'une solution. Obtention de "la" solution par approximations successives. Etude de la stabilité. Etude de la rapidité de convergence. Accélération de la convergence. Comment ramener la résolution de $h(x)=0$ au problème précédent. Quelques exemples numériques. Un document présentant des activités pour les élèves et mettant en valeur les aspects algorithmiques est en préparation.

* *
*

Montpellier

① *Document n° 1 : Continuité* (1978) : Quelques remarques sur la continuité d'une fonction de **R** vers **R** en liaison avec l'interpolation linéaire ou la limite de suites.

② *Document n° 2 : Intégration* (1978) : Présenter l'intégrale (en Terminale) sans faire appel à la notion de dérivée, mais en insistant sur sa définition en qualité de limite et en partant de problèmes concrets (énergie potentielle d'un ressort, volume d'une pyramide).

* *
*

Nancy

① *Autour d'un prêt bancaire* (J.P. Deschaseaux - 1978) : Une expérience pédagogique en 2 AB où l'on tente de faire passer les mathématiques à travers du concret (plutôt qu'illustrer les mathématiques par une application) donc partir de la vie courante (plutôt qu'y arriver).

* *
*

Nantes

① *Quelques difficultés pédagogiques dans l'enseignement de l'analyse dans le second cycle :* (MM. Fouques et Seyroux). Analyse critique d'énoncés de problèmes d'analyse tirés des annales du Bac. (toutes séries). Réflexions et propositions concernant la présentation de quelques uns des concepts fondamentaux ou théorèmes clefs relatifs à l'ensemble des nombres réels, aux fonctions de **R** dans **R**, aux limites et à la continuité, aux équations.

② *Etudes épistémologique et historique des idées de nombre, mesure et de continu* (Nanta - Iremica 3)

* *
*

Poitiers

① *Sur l'enseignement de l'analyse n° 1 - Fonctions* (1976) : Réflexions sur la notion de fonction et la façon de l'enseigner. Tests (niveau Seconde) et commentaires sur les réponses. Indications pour une leçon sur les fonctions en Seconde : comprendre le concept à partir de la construction explicite de nombreuses fonctions, par l'usage de dessins et diverses manipulations concrètes. Compte rendu d'une séance de T.D. Note historique.

② *Sur l'enseignement de l'analyse n° 2 - Valeur absolue* (1976) : Au niveau Seconde, que savoir sur ce thème ? Cause des difficultés. Remèdes. Deux présentations de la valeur absolue sont proposées : par restriction à l'axe (Ox) de la distance dans le plan, ou par construction d'une distance sur la droite réelle. Exercices - Fonction valeur absolue, avec exercices - Propriétés de la valeur absolue, avec exercices - Equations et inéquations - Vers la continuité.

③ *Sur l'enseignement de l'analyse n° 3 - Notion de limite, suites réelles* (1978) : (Pour toutes sections à partir de la Seconde).

- Réflexions sur la notion de limite. Objectifs. Options
- Bibliographie sur le nombre π
- Introduction à la notion de limite par quatre T.D. dont un autour de π (recherche d'une valeur approchée de π par encadrement de la circonférence au moyen de polygones réguliers), et un autre autour de $\sqrt{2}$ (encadrement de $\sqrt{2}$ par deux suites de décimaux, ou par résolution approchée avec graphiques de $x=1+\frac{1}{1+x}$, ou de $x=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$)
- Formalisations, définitions.

④ *Dérivabilité* (1977) (Première et Terminale) : Dégager l'idée de nombre dérivé à partir de situations concrètes (vitesse d'un mobile, tangente en un point à une courbe). Puis le concept étant formalisé, exercices divers d'application pour en saisir toute la portée. Il s'agit de fiches de travail avec compte rendu des réactions observables d'élèves.

⑤ *Intégration et continuité* (document pour les professeurs) : Fonctions intégrables, fonctions non intégrables.

* *
*

Rennes

• Dans le document *Activités en analyse : majorer, minorer, encadrer* - ou "comment faire de l'analyse sans limite ni continuité" (M. Viallard - 1978) :
Proposition de thèmes d'exercices visant à préparer l'enseignement des concepts fondamentaux, à faire manipuler d'abord des propriétés globales ou quantitatives qui, une fois maîtrisées, permettront d'introduire les problèmes du local et du qualitatif. Ces exercices font établir des encadrements, majorations, minorations de fonctions sur des intervalles donnés, par des nombres ou par d'autres fonctions. Recherche de valeurs approchées. Tout cela sans recours à des notions de limite, continuité ou dérivabilité. Ces exercices sont répartis en trois niveaux qu'on peut faire correspondre aux classes de Seconde, Première et Terminale.

(1) — Niveau I : encadrements de sommes, différences, produits, quotients.

(2) — Niveau II : majorations, minorations de fonctions sur des intervalles (une variable en général, mais aussi deux variables dans quelques exemples), calculs d'erreurs.

(3) — Niveau III : approximations de la limite d'une suite convergente, recherche de maxima et minima de fonctions, encadrements d'intégrales.

3 - QUELQUES PUBLICATIONS CENTREES SUR L'USAGE DES CALCULATRICES

De nombreux groupes I.R.E.M. ont publié des documents relatifs à l'utilisation des calculatrices dans les collèges et lycées. Par les thèmes abordés et les méthodes proposées ils nous paraissent d'un grand intérêt pour tous ceux qui recherchent une refonte de l'enseignement de l'analyse. Voici quelques unes de ces publications où figurent des activités en analyse.

Bordeaux

(1) *Mathématiques et calculatrice de poche* (G. Noël et J. Bastier - Ed. Technique et Vulgarisation 1979).
A travers un grand nombre d'exercices (dont beaucoup d'analyse) il est proposé une découverte concrète de l'utilisation mathématique qu'on peut faire d'une calculatrice de poche.

Grenoble

(2) *Matchinettes 1 et matchinettes 2* (1978)
Divers exemples d'utilisation d'une calculatrice à tous les niveaux (même dans le primaire), possibilités et insuffisances de la machine.

I.N.R.D.P.

(3) *Emploi de calculateurs programmables dans le second degré (1972)*
Bilan d'une expérimentation menée par les I.R.E.M. et l'I.N.R.D.P.

Lille

(4) *TI.57* (in Mathémactive n° 1 - Novembre 1980)

(5) *Des programmes pour la TI.57* (1981)

Limoges

(6) *Compte rendu du groupe mini-calculateurs* (1978) :
Expériences d'initiation à l'informatique dans le second cycle ou même dans le premier, retombées dans l'activité mathématique (problèmes de dénombrement, tracés de courbes, éléments liés à une courbe : tangentes, asymptotes...)

Lyon

(7) *Compte rendu des journées de Carry-le-Rouet* (1976)
On y verra notamment comment l'usage des calculatrices permet une introduction concrète à l'analyse, comment il peut mener vers une étude formelle de certaines propriétés, vers la prise de conscience de certains phénomènes, comment il permet de bâtir des activités significatives en analyse (exemple : approximation d'irrationnels, étude locale de fonctions, construction de tables de logarithmes...)

Marseille

(8) *Rôle des algorithmes dans l'enseignement de l'analyse* (à paraître en 1981).

Nancy

(9) *A propos des calculettes* (1977)
Quelques thèmes d'activités pour s'initier à l'usage des petites calculatrices

(10). *Journées calculatrices - Epinal - Mai 1978.*
Propositions d'activités de toutes sortes, simples ou élaborées, pour apprendre à manipuler les calculatrices.

Paris-Sud

(11). *Mathémachines.*

4^{e} PARTIE : BIBLIOGRAPHIE GENERALE

I - OUVRAGES SCIENTIFIQUES ET DIDACTIQUES.
A. Niveau Elémentaire.
B. Approfondissement.

II - ENCYCLOPEDIES ET REVUES.

III - OUVRAGES D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES.

IV - TEXTES HISTORIQUES.

Remarque : Les documents sur l'analyse publiés par les IREM n'ont pas été repris ici ; ils figurent dans la partie III qui précède.

OUVRAGES SCIENTIFIQUES ET DIDACTIQUES

A. Niveau Elémentaire

Le signe o indique un niveau très accessible.

[1] **ARNAUDIES J.M. et LELONG J.,** *Cours de mathématiques* (Vol. II et IV) (Dunod).

[2]o **BAKHVALOV N.,** *Méthodes numériques.* (Mir).

[3]o **BARANGER J.,** *Introduction à l'analyse numérique.* (Hermann).

[4] **BARRA R.,** *Apprentissage de l'Analyse.* (4 fascicules). (Cedic).

[5] **BERMAN C.,** *Problèmes d'analyse mathématique.* (Mir).

[6] **BRAUN,** *Differential equations and their applications.* (Springer-Verlag).

[7]o **CHILOV G.,** *Analyse Mathématique (fonctions d'une variable).* (Mir).

[8]o **DEMIDOVITCH B.,** *Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique.* (Mir).

[9]o **DEMIDOVITCH B. et MARON I.,** *Eléments de calcul numérique.* (Mir).

[10] **DIXMIER J.,** *Cours de Mathématiques du premier cycle.* Gauthier-Villars).

[11]o **ENGEL A.,** *Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique,* adapté par Daniel Reisz. (Cedic).

[12] **FIKHTENGOL'TS G.M.,** *The fondamentals of Mathematical analysis (Vol. 1).* (Pergamon-Press).

[13] **FREDON D.,** *Mathématiques, Economie et Gestion.* (Cedic).

[14] **GOODSTEIN R.L.,** *Fondamental concepts of Mathematics.* (Pergamon Press).

[15] **HASTINGS C.,** *Approximation for digital computers.* (Princeton).

[16] **HILDEBRAND F.B.,** *Introduction to numerical analysis.* (Mc Graw-Hill).

[17]o **LANG S.,** *A first course in Calculus* (Addison et Wesley).

[18] **LANG S.,** *A second course in Calculus* (Addison et Wesley).

[19]o **LAX P., BURSTEIN S., LAX A.,** *Calculus with Applications and Computing (vol. 1)* (Springer-Verlag).

[20] **OVAERT J.L. et VERLEY J.L.,** *Exercices de Mathématiques, Algèbre I* (Cedic).

[21] **OVAERT J.L. et VERLEY J.L.,** *Exercices de Mathématiques, Analyse I* (Cedic).
(En préparation).

[22]o **PISKOUNOV N.,** *Calcul différentiel et intégral* (Mir).

[23] **PRIESTLEY,** *Calculus : an historical approach* (Springer-Verlag).

[24] **ROSENLICHT M.,** *Introduction to Analysis* (Scott, Foresman and Co).

[25] **ROSS K.A.,** *Elementary analysis : the theory of Calculus* (Springer-Verlag).

[26] **RUDIN W.,** *Principles of mathematical analysis* (Mac Graw Hill).

[27] **TOEPLITZ O.,** *The Calculus : a genetic approach* (University of Chicago).

[28] **WILSON R.L.,** *Much ado about Calculus* (Springer-Verlag).

[29] **WONNACOTH T.H.,** *Calculus : An applied approach* (Wiley and sons).

[30] **YAGLOM A.M. et YAGLOM I.M.,** *Chalenging Mathematical problems (vol. 2)* (Holden Day).

B. Approfondissement

Les signes (★) et (★★) indiquent un niveau assez élevé ou élevé.

[1]★ **AHLBERG J.H., NILSON E.N., WALSH J.L.,** *The theory of splines and their applications.* (Academic press) New-York 1967.

[2] **APOSTOL T.M.,** *Calculus* (2 volumes). (Wiley and sons).

[3]★ **ARNOLD V.,** *Equations différentielles ordinaires.* (Mir).

[4]★★ **ARNOLD V.,** *Méthodes Mathématiques de la mécanique classique.* (Mir)

[5]★ **BEREZIN I.S. et ZHYDKOV N.P.,** *Computing methods.* (Pergamon Press).

[6]★ **DE BOOR C.,** *A practical guide to splines.* (Springer-Verlag).

[7]★ **BOURBAKI N.,** *Fonctions d'une variable réelle.* (Hermann).

[8]★ **CHAMBADAL L. et OVAERT J.L.,** *Analyse II.* (Gauthier-Villars).

[9] **CHEVALLARD Y. et ROLLAND R.,** *Théorie des séries, tome I.* (Cedic).

[10]★ **DAVIS Ph.,** *Interpolation and approximation.* (New-York Blaisdell).

[11] **DIEUDONNE J.,** *Calcul infinitésimal.* (Hermann).

[12]★★ **DIEUDONNE J.,** *Eléments d'Analyse (8 vol.).* (Gauthier-Villars). (★ pour les volumes 1 et 2).

[13]★ **DURAND E.,** *Solutions numériques des équations algébriques.* (Masson).

[14] **FOMINE S. et KOLMOGOROV A.,** *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* (Mir).

[15]★ **FORSYTHE G.E., MALCOLM M.A., MOLER C.B.,** *Computer Methods for mathematical computations.* (Prentice Hall).

[16]★ **GANTMACHER F.R.,** *Théorie des matrices.* (Dunod).

[17]★ **HARDY G.H., LITTLEWOOD,** *Inequalities.*

[18] **HARDY G.H. et WRIGHT E.M.,** *An introduction to the theory of numbers.* (Clarendon Press). Oxford.

[19]★ **HIRSCH M.W. et SMALE S.,** *Differential equations, dynamical systems and linear algebra.* (Academic Press).

[20]★★ **HOBSON E.W.,** *The theory of functions of a real variable* (2 vol.). (Dover).

[21] **HOUSEHOLDER A.,** *Principes of numerical analysis.* (Mac Graw Hill).

[22] **KARLIN S.J. et STUDDEN W.J.,** *Tchebycheff systems : with applications in analysis and statistics.* (John Wiley and sons).

[23] **LANG S.,** *Analysis I.* (Addison et Wesley).

[24]★ **LANG S.,** *Real Analysis* (anciennement Analysis II). (Addison et Wesley). Traduction française : Analyse réelle (Inter-édition)

[25]★ **LORENTZ G.G.,** *Approximation of functions.* (Holt New-York).

[26]★ **POLYA-SZEGÖ,** *Problems and theorems in analysis.* (Springer-Verlag).

[27]★ **PONTRIAGUINE I.,** *Equations différentielles ordinaires.* (Mir).

[28] **ROLLAND R. et CHEVALLARD Y.**, *Théorie des séries. Tome II.* (Cedic).

[29]★ **STEWART G.W.**, *Introduction to matrix computation.* (Academic Press).

[30]★ **RUDIN W.**, *Real and complex analysis.* (Mac Graw Hill). Traduction Française : Analyse réelle et complexe. (Masson).

[31] **SMIRNOV V.**, *Cours de Mathématiques supérieures* (4 tomes). (Mir).

[32] **STOER J. et BURLIRSCH R.**, *Introduction to numerical analysis.* (Springer Verlag).

[33] **SPIVAK M.**, *Calculus, Supplement to calculus.* (Addison et Wesley).

[34]★ **VALIRON G.**, *Cours d'analyse.* (Masson).

[35]★ **VARGA R.F.**, *Matrix iterative analysis.* (Englewood cliffs).

[36]★ **WHITTAKER E.T. et WATSON G.N.** *A course of modern analysis* (Cambridge-University Press)

[37]★ ★ **YOSIDA K.**, *Functionnal Analysis.* (Springer-Verlag).

ENCYCLOPEDIES ET REVUES

A. Encyclopédies

Encyclopaedia Britannica. 1956.
Encyclopedic Dictionnary of Mathematics (EDM) MIT Press. Cambridge (Mass) and London. 1977.
Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées. Paris Leipzig. 1904-1914.
Encyclopaedia of Science and Technology (15 volumes) New-York. 1960.
Encyclopaedia Universalis. Paris. 1968.
Dictionnaire de mathématiques (Chambadal L.). (Hachette). Paris 1978.
Dictionnaire de mathématiques (F. Le Lionnais et alii). (PUF).

B. Revues

American Mathematical Society (AMS).
American Monthly.
Der Mathematik Unterricht.
Der mathematische und naturwissenschafftliche Unterricht.
Didaktik der Mathematik.
Enseignement Mathématique.
International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.
London Mathematical Society (LMS).
Mathematical Intelligencer.
Le Petit Archimède.
Recherches en didactique des Mathématiques (Editions La pensée sauvage).
The Mathematics Teacher.

C. **Articles sur l'analyse** parus dans les numéros récents du Bulletin APMEP.

n° 275-276 Nombreux articles intéressants.
n° 300 Noyaux-thèmes (nombreux articles).
n° 301 Etudes sur la périodicité.
n° 302 H. CARTAN. Sur les filtres.
n° 302 G. GLAESER. La didactique de l'analyse.
n° 303 Compte-rendu des Journées d'Orléans.
n° 303 J. DHOMBRES. Et pan ! dans le mille...
n° 309 J. BETREMA et G. WALLET. Les infiniment petits existent.
n° 314 I. RIHAOUI. Caractérisations du corps des réels.
n° 314-315 C. MOSER. Problèmes de coupures.
n° 319 J. LEGRAND. Les endomorphismes du groupe additif **R**.
n° 320 D. REISZ. Thème et variations sur la série harmonique.
n° 321 G. LION. Sur le théorème des fonctions réciproques.
n° 322 C. BATUT et M. MENDES-FRANCE. A propos de l'irrationalité de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.
n° 323 M. GLAYMANN. Mathématique : subir ou créer ?

OUVRAGES D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

Le signe (o) indique un ouvrage de base.

[1] **ABDELJAOUAD M.**, *Vers une épistémologie des décimaux* (in Fragments d'histoire des mathématiques - Brochure APMEP).

[2] **BOYER C.**, *A history of mathematics.* (J. Wiley and sons)

[3] **BOYER C.**, *The history of the calculus and its conceptual development.* (Dover)

[4] **BROCHURE APMEP**, *Fragments d'histoire des mathématiques.*

[5]o **BIRKHOFF G.**, *A source book in classical analysis.* Cambridge Massachussets. (Harvard University Press)

[6] **CAVAILLES J.**, *Philosophie mathématique.* (Hermann)

[7] **DEA Didactique Bordeaux** (J.L. Ovaert et J.M. Bouscasse) *Construction, développement et reprises du concept de fonction.* (en préparation)

[8] **DEA Didactique Bordeaux** (J.L. Ovaert et J.M. Bouscasse) *Discret et continu* (en préparation)

[9] **DEA Didactique Marseille** (J.L. Ovaert), *Rôle des problèmes numériques dans la construction des concepts de l'analyse.* (en préparation)

[10] **DHOMBRES J.**, *Nombre, mesure et continu.* (Cedic)

[11] **DIEUDONNE J.**, *L'analyse mathématique au dix-huitième siècle.* in Abrégé d'Histoire des Mathématiques. (Hermann).

[12] **DIEUDONNE J.**, *L'analyse fonctionnelle.* in Abrégé d'Histoire des Mathématiques (Hermann).

[13] **DUGAC P.**, *Cours d'histoire des mathématiques.* (Paris VII)

[14]o **DUGAC P.**, *Fondements de l'analyse.* in Abrégé d'Histoire des Mathématiques. (Hermann)

[15] **DUGAC P.**, *Eléments d'analyse de K. Weierstrass.* (Archive for history). (Volume 10).

[16] **DUGAC P.**, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques* (Vrin).

[17] **DUGAC P.**, *Notes et documents sur la vie et l'œuvre de René Baire.* (Archive for History). (Vol. 15, n° 4).

[18] **DUGAC P.**, *Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire.* (Thèse Paris VI).

[19]o **EDWARDS C.H.**, *The Historical Development of the Calculus.* (Springer-Verlag).

[20] **FELIX L.**, *Notion de mesure et nombres réels.* (Blanchard).

[21] **GRATHAM-GUINESS I.**, *Joseph Fourier.* (MIT Press)

[22] **HOUZEL Ch.**, *Intégrales elliptiques et fonctions abéliennes.* In Abrégé d'Histoire des Mathématiques. (Hermann).

[23] **HOUZEL Ch., OVAERT J.L., RAYMOND P., SANSUC J.J.**, *Philosophie et calcul de l'infini.* (Maspéro).

[24] **GOLDSTINE H.**, *A history of numerical analysis.* (Springer).

[25] **ITARD J.**, *Les livres arithmétiques d'Euclide.* (Hermann).

[26]o **INTER-IREM Bulletin.**, *Histoire des Mathématiques et Epistémologie.*

[27]o **KLINE M.**, *Mathematical thought from ancient to modern times* New-York. (Oxford University Press).

[28] **LEBESGUE H.**, *Notice d'histoire des mathématiques.* (Enseignement mathématique). Genève.

[29] **LELIONNAIS**, *Les grands courants de la pensée mathématique.* (Blanchard).

[30] **NAUX Ch.**, *Histoire des logarithmes de Neper à Euler.*

[31] **OVAERT J.L.**, Article *Calcul numérique* in Encyclopedia Universalis.

[32]o **SMITH D.E.**, *A Source book in Mathematics.* New-York. (Dover).

[33]o **STRUIK D.J.**, *A Source book in Mathematics.* (Harvard)

[34] **VERLEY J.L.**, *Les fonctions analytiques.* In abrégé d'histoire des Mathématiques. (Hermann)

[35]o **YOUSCHKEVITCH H.P.**, *The concept of function.* (Archive for history). (volume 16).

[36] **YOUSCHKEVITCH H.P.**, *Les mathématiques arabes.* (Vrin).

TEXTES HISTORIQUES

Nous nous sommes bornés à quelques textes de synthèse, le plus souvent en langue française. On peut avoir accès à ces textes dans les bibliothèques universitaires.

Pour une bibliographie plus détaillée et plus structurée, nous renvoyons aux ouvrages suivants :

— *Bulletin Inter-Irem*, Histoire des mathématiques et épistémologie. Bibliographie sectorielle sur le calcul infinitésimal (Diffusion Irem).
— *Abrégé d'histoire des mathématiques* par J. Dieudonné et alii (Hermann).
— *Encyclopédie des sciences mathématiques* Paris - Leipzig (1908)

[1] **BAIRE R.**, *Leçons sur les fonctions discontinues.* (Gauthier-Villars) 1906.

[2] **BAIRE R.**, *Leçons sur les théories générales de l'analyse* (2 tomes) (Gauthier-Villars). 1907-1908

[3] **BANACH S.**, *Théorie des opérations linéaires.* (Varsovie) 1932.

[4] **BOREL E.**, *Leçons sur les séries divergentes.* (Gauthier-Villars) Paris 1901.

[5] **BOREL E.**, *Leçons sur la théorie des fonctions.* (Gauthier-Villars)

[6] **CAUCHY A.L.**, *Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique. Analyse algébrique.* (Gauthier-Villars et Diffusion IREM).

[7] **CAUCHY A.L.**, *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal.* 1823.

[8] **CAUCHY A.L.**, *Leçons sur le calcul différentiel.* 1829.

[9] **EULER L.**, *Eléments d'Algèbre.* (Diffusion IREM)

[10] **EULER L.**, *Introduction à l'analyse des infiniments petits. Oeuvres complètes.* (Diffusion IREM) 1748.

[11] **EULER L.**, *Institutiones calculi differentialis.* (Volume X). Oeuvres complètes. 1755.

[12] **EULER L.**, *Institutiones calculi integralis.* Oeuvres complètes. 1768-70.

[13] **FOURIER J.B.**, *Théorie analytique de la chaleur.* Oeuvres, tome 1. 1821.

[14] **GOURSAT E.**, *Cours d'analyse mathématique.* (Gauthier-Villars)

[15] **HERMITE Ch.**, *Cours d'analyse.* (Gauthier-Villars). 1873

[16] **JORDAN C.**, *Cours d'analyse à l'Ecole Polytechnique.* Trois éditions (1882 à 1906) (Gauthier-Villars).

[17] **LACROIX S.** *Traité du calcul différentiel et intégral.* (1797-1800) (Diffusion IREM)

[18] **LAGRANGE J.L.**, *Théorie des fonctions analytiques.* (1797) (Diffusion IREM)

[19] **LAGRANGE J.L.**, *Leçons sur le calcul des fonctions.* (1808).

[20] **LEBESGUE H.**, *Leçons sur l'intégration.* (1926) (Gauthier-Villars).

[21] **LEIBNIZ G.**, *Histoire et origine du calcul différentiel.* (1714) Oeuvres complètes. (Diffusion IREM)

[22] **L'HOSPITAL**, *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696). (Diffusion IREM).

[23] **MACLAURIN C.**, *Traité des fluxions.* (1742). (Diffusion IREM).

[24] **NEWTON I.**, *Méthodes des fluxions et des suites infinies.* (1736) (Blanchard).

[25] **PICARD E.**, *Traité d'Analyse.* (1891) (Gauthier-Villars).

[26] **RIEMANN B.**, *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique.* (1854) Oeuvres complètes. Traduction française 1968 (Blanchard).

[27] **SERRET J.A.**, *Cours d'algèbre supérieure.* 5ème édition. Paris 1885. (Gauthier-Villars).

[28] **SERRET J.A.**, *Cours de calcul différentiel et intégral.* (1868) (Gauthier-Villars).

5e PARTIE : BIBLIOGRAPHIE SECTORIELLE

Dans cette partie, nous esquissons une liste de quelques grands problèmes de l'analyse, accompagnée, pour chacun d'entre eux, d'une bibliographie limitée aux ouvrages scientifiques fondamentaux. Les numéros qui suivent chaque nom d'auteur renvoient à la Bibliographie Générale.

Une analyse plus détaillée est ensuite effectuée pour trois de ces grands problèmes, à savoir : limites de suites, sommes de séries ; équations numériques ; nombres et fonctions attachés à des fonctions par le calcul infinitésimal.

Pour finir, six livres importants sont analysés par des membres de la Commission Inter-IREM d'Analyse.

A. LISTE DE QUELQUES GRANDS PROBLEMES DE L'ANALYSE

par J.L. OVAERT et R. ROLLAND

La liste qui suit ne comporte que les problèmes susceptibles d'être abordés au niveau de l'enseignement secondaire.

1. Limites de suites, sommes de séries

Les problèmes se présentent sous un double aspect.

— *Qualitatif* : Etude de la convergence, exploration des divers types de divergence. Recherche de limites.

— *Quantitatif* : Approximations de nombres définis de cette manière, rapidité de convergence, performance des divers procédés d'approximation. Accélérations de convergence. Sommation de séries divergentes.

Ce thème met en jeu une dialectique entre deux points de vue :

— tantôt les suites et séries sont données et on veut étudier la convergence ;

— tantôt on se donne un nombre ou une fonction et on étudie les modes de représentation de ce nombre ou de cette fonction comme limite de suites ou somme de séries.

Ce thème est lié de manière étroite à celui des équations numériques (cf. 2), des évaluations asymptotiques (cf. 6) et de l'approximation des nombres réels (cf. 7).

Quelques ouvrages fondamentaux :

Demidovitch et Maron IA [9] ; Engel IA [11] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Berezin et Zhydkov IB [5] ; Chevallard et Rolland IB [9] et [28] ; Dieudonné IB [11].

2. Equations numériques

Ici aussi, les problèmes se présentent sous un double aspect.

— *Qualitatif* : Existence et unicité de solutions. Séparation des solutions. Stabilité des solutions et des processus d'approximation.

— *Quantitatif* : Calcul de solutions approchées, comparaison de la rapidité de convergence et de la performance des divers procédés. Accélérations de convergence.

Ce thème met en jeu une dialectique entre l'étude de processus donnés et l'élaboration de nouveaux procédés afin d'améliorer la performance pour une classe de cas donnée.

Ce thème est lié à celui des suites et séries (cf. 1).

A ce thème, se rattachent les méthodes de traitement numérique des matrices utilisant l'analyse linéaire :

— résolution de systèmes d'équations linéaires,
— inversion de matrices,
— problèmes de valeurs propres et de vecteurs propres.

Ces méthodes fournissent un terrain d'exploration des différentes manières de normer les espaces vectoriels de matrices et d'applications linéaires.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Bakhvalov IA [2] ; Demidovitch et Maron IA [9] ; Engel IA [11] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [20] et [21] ; Berezin et Zhydkov IB [5] ; Durand IB [13] ; Gantmacher IB [16] ; Stewart IB [29] ; Varga IB [35].

3. Variations des fonctions d'une variable réelle

Les différents problèmes : monotonie, convexité, continuité, taux de variation, étude locale, étude asymptotique, peuvent prendre, suivant les cas, un aspect qualitatif ou quantitatif.

Peuvent être rattachés à ce thème :

— la comparaison de deux fonctions, des éléments d'une suite ou d'une famille de fonctions,
— l'étude de la monotonie et de la convexité des suites (intervention du continu sur le discret).

Quelques ouvrages fondamentaux :

Chilov IA [7] ; Demidovitch IA [8] ; Lang IA [17] et [18] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Piskounov IA [22] ; Dieudonné IB [11] ; Smirnov IB [31].

4. Etude locale des fonctions d'une variable réelle

— Existence et recherche de développements limités des différents ordres, de développements asymptotiques. Recherche de limites.

— Allure locale d'une fonction (maxima, minima, inflexions) ; pour les fonctions à valeurs vectorielles, points réguliers.

— Calcul de valeurs approchées d'une fonction au voisinage d'un point.

— Extension des problèmes précédents au cas des fonctions de plusieurs variables.

Ce thème met en jeu une dialectique entre les concepts liés aux fonctions, aux graphismes, au calcul numérique et à la géométrie différentielle (problèmes de contact). L'aspect qualitatif est dominant, mais certains problèmes utilisent des majorations et des encadrements (aspect quantitatif).

Quelques ouvrages fondamentaux :

Chilov IA [7] ; Demidovitch IA [8] ; Lang IA [17] et [18]; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Piskounov IA [22] ; Dieudonné IB [11] ; Smirnov IB [31].

5. Majorations et encadrements de nombres, de suites, de fonctions

Ce thème intervient dans presque toutes les questions d'analyse. On peut y regrouper, de manière transversale, différentes techniques employées pour obtenir des majorations :

— opérations algébriques, composition des fonctions,
— variations de fonctions,
— inégalités tayloriennes,
— inégalités de convexité,
— intégration et sommation d'inégalités.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Demidovitch et Maron IA [9] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [20] et [21] ; Dieudonné IB [11] ; Hardy et Littlewood IB [11] ; Polya et Szegö IB [26].

6. Ordres de grandeur, évaluations asymptotiques

— Etude de différents types de comportement asymptotique pour les suites et les fonctions : phénomènes linéaires, quadratiques, logarithmiques, exponentiels, oscillatoires, puis oscillatoires amortis, oscillatoires divergents.

— Recherche de limites et de parties principales.

— Evaluation de restes de séries et d'intégrales convergentes, de sommes partielles de séries et d'intégrales divergentes.

— Evaluation de racines d'équations dépendant d'un paramètre.

— Convergence des sommes du type de Riemann.

Ce thème met en jeu une dialectique entre le discret et le continu.

Il est lié à celui des limites de suites et sommes de séries (cf. 1) et des majorations et encadrements (cf. 5).

Il jette un pont entre les problèmes purement qualitatifs (existence et unicité, ...) et les problèmes quantitatifs (majorations...).

Il intervient de façon essentielle dans l'étude des systèmes dynamiques discrets et continus.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Engel IA [11] ; Lang IA [17] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Arnold IB [3] ; Chambadal et Ovaert IB [8] ; Dieudonné IB [11] ; Hirsch et Smale IB [19] ; Whittaker et Watson IB [36].

7. Représentations et approximation des nombres

Etude de divers types de représentation des nombres :

— développements décimaux, dyadiques, triadiques,
— sommes de séries, limites de suites (déjà traitées au thème 1),
— intégrales,
— fractions continues.

Cette étude présente des aspects qualitatifs et quantitatifs.

Elle peut porter sur des nombres donnés, ou sur une classe de nombres donnée.

Ce thème est lié aux problèmes d'irrationnalité et de transcendance, et de mesure d'icelles.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Engel IA [11] ; Lax IA [19] : Ovaert et Verley IA [21] ; Chevallard et Rolland IA [9] ; Hardy et Wright IA [18].

8. Problèmes de maxima et de minima

— *Aspect qualitatif* : Existence et unicité d'extrema. Séparation des extrema locaux. Stabilité des extrema.

— *Aspect quantitatif* : Calcul des extrema par différentes techniques : inégalités, calcul différentiel. Problèmes d'extrema liés.

Ce thème recouvre notamment les problèmes d'optimisation :

— optimisation de majorations,
— optimisation d'un processus d'approximation,
— optimisation de valeurs d'une fonction numérique (coût, énergie,...),
— optimisation de fonctions : calcul des variations. En particulier, optimisation d'une distance (géodésiques, normales à une courbe, chemin optique, intégrales d'énergie).

Ce thème est d'une importance capitale pour les interventions de l'analyse en sciences physiques et économiques.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Chilov IA [7] ; Demidovitch IA [8] ; Lang IA [17] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Piskounov IA [22] ; Arnold IB [3] ; Courant et Hilbert: Methods of Mathematical Physics ; Landau et Lifchitz: Mecanique (Mir).

9. Représentations et approximation des fonctions

— Etude de différents procédés de représentation : développements en série, représentations intégrales, interpolation.

— Etude, pour chacun de ces procédés, des différents modes de convergence et de leur pertinence (convergence simple, uniforme, en moyenne, en moyenne quadratique,...). Cette étude présente, comme pour le cas des nombres (cf. 1 et 7) des aspects qualitatifs et des aspects quantitatifs.

— Opérations sur les représentations : opérations algébriques, composition, dérivation, intégration. Ces problèmes mènent à l'étude systématique du comportement des concepts de l'analyse (continuité, caractère lipschitzien, dérivabilité, intégrabilité, ...) vis-à-vis des différents types de convergences étudiés.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Lang IA [17] et [18] ; Lax IA [19] ; Chevallard et Rolland IB [28] ; Davis IB [10] ; Dieudonné IB [11] ; Fomine et Kolmogorov IB [14] ; Lorentz IB [25] ; Rudin IB [30] ; Whittaker et Watson IB [36] ; Yosida IB [37].

10. Nombres attachés à des fonctions par le calcul infinitésimal

(Il s'agit des intégrales et des dérivées). Calcul des dérivées et des primitives. Etude qualitative et quantitative de divers procédés d'approximations :

— interpolation et différences finies,
— développements en séries,
— développements tayloriens généralisés.

Le calcul des valeurs d'une fonction est traité au thème 4, celui de ses zéros au thème 2.

Ce thème est lié à celui de l'approximation des fonctions et de leurs différents modes de représentation (cf. 9).

Quelques ouvrages fondamentaux :

Demidovitch et Maron IA [9] ; Engel IA [11] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [20] ; Berezin et Zhydkov IB [5] ; Dieudonné IB [11].

11. Equations différentielles. Equations aux différences finies

a) *Equations linéaires à coefficients constants*

— Etude du problème de Cauchy ; structure de l'ensemble des solutions. Sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire. Classification des points singuliers. Stabilité des solutions. Comportement asymptotique des solutions.

b) *Equations linéaires*

— Etude du problème de Cauchy ; structure de l'ensemble des solutions, résolvante, dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales et aux coefficients. Classification des points singuliers et stabilité. Comportement asymptotique des solutions.

— Problèmes aux limites.

— Problèmes de contrôle et de commande.

— Recherche de solutions approchées : performance comparée de diverses méthodes.

— Etude dans le champ complexe : classification des singularités, recherche de représentation des solutions par des séries ou des intégrales.

c) *Equations non linéaires autonomes*

— Etude des champs de vecteurs, flots, orbites ; dérivation associée à un champ de vecteur, intégrales premières. Systèmes conservatifs. Classification des points singuliers.

d) *Equations non linéaires dépendant du temps*

Problème de Cauchy. Recherche de solutions approchées.

Quelques ouvrages fondamentaux :

Lang IA [17] et [18] ; Lax IA [19] ; Arnold IB [3] et [4] ; Dieudonné IB [11] ; Hirsch et Smale IB [19] ; Ince - Ordinary differential equations (Dover) ; Lang IB [23] et [24] ; Pontriaguine IB [27] ; Roseau - vibrations non linéaires et théorie de la stabilité ; Whittaker et Watson IB [35].

B. ANALYSE DETAILLEE DES THEMES 1, 2 et 10
par J.L. OVAERT et R. ROLLAND

Cette analyse est conduite suivant plusieurs niveaux d'approfondissement. Les références bibliographiques sont relatives à des travaux didactiques (groupes IREM, brochures A.P.M.E.P., ouvrages didactiques, etc.). Les références aux groupes IREM sont conformes à la partie III de la présente brochure. Par exemple, le sigle Dijon[1] se réfère à l'approche heuristique des nombres réels... Les références concernant les calculatrices sont codées avec la lettre C. Par exemple, le sigle Bordeaux[C1] se réfère à mathématiques et calculatrice de poche. La plupart des rubriques comprend une brève note historique assortie de références bibliographiques concernant des ouvrages d'histoire des mathématiques, et des textes historiques. Pour les ouvrages scientifiques, on pourra se reporter au A.

THEME N°1 : Limites de suites, sommes de séries

Premier niveau

a) ***Recherche de limites*** de suites par comparaison avec les suites de références simples $n \mapsto n^p$, $n \mapsto a^n$ (exemples numériques). Comparaison de quelques suites de référence (exemples numériques) ; exemples de divergence vers $+\infty$, vers $-\infty$; comparaison aux suites de référence ; exemples de phénomènes d'oscillation et de chaos.

On peut faire ressortir la dialectique entre suites, graphismes et calcul numérique, et mettre en évidence la nécessité d'un contrôle théorique de la convergence.

b) *Rapidité de convergence*

— *Exemples de convergence rapide*. Calcul de e par la somme de la série : étude expérimentale, puis théorique. Moyennes arithmético-géométriques (exemples) : étude expérimentale, puis théorique. Voir aussi le calcul des racines carrées par la méthode de Héron (cf. thème n° 2).

— *Exemples de convergence géométrique*. Dichotomies, trichotomies. Calcul de π par la méthode d'Archimède (polygones inscrits). Calcul des logarithmes par la méthode de Briggs.

— *Exemples de convergence lente*.

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ldots = \frac{\pi}{4}$$

(Pas de contrôle théorique de la convergence, ni d'accélération de convergence à ce niveau).

Les exemples étudiés au b) sont à mener de front avec la mise en place des suites de référence.

— *Exemples de divergence lente*.

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^{c(n)}}{n},$$

où $c(n)$ est le nombre de chiffres de n.

Bibliographie :

IREM : Bordeaux [1], [6], [9], [C1] ; Dijon [2], [6], [7] ; Grenoble [5], [C2] ; Lille [1], [6] ; Lyon [1], [4], [7] ; Marseille [1], [2], [C8] ; Nancy [1], [C9] ; Paris Sud [C1] ; Poitiers [3] ; Rennes [1].
Brochure A.P.M.E.P. 4ᵉ, 3ᵉ ; Lelionnais III [29] ; Goldstine (chap. 2) III [24] ; Naux III [30] ; Itard III [25] ; Dhombres III [10].

Deuxième niveau (on dispose des dérivées et de la convergence des suites monotones).

a) ***Recherche de limites*** de suites par comparaison avec les suites de référence $n \mapsto n^\alpha$, où $\alpha \in \mathbf{R}$, $n \mapsto a^n$, où $a \in \mathbf{R}_+^*$, $n \mapsto n!$.

Comparaison de ces suites de référence (Etude systématique).

Exemples faisant intervenir $n \mapsto \log n$.

Etude analogue pour la divergence vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exploration de la divergence oscillatoire par suites extraites (exemples).

Même dialectique qu'au premier niveau.

Suites définies par des relations de récurrence linéaires.

Bibliographie :

IREM : Marseille [1] ; Rennes [3].
Engel IA [11].

Note historique : Pour la comparaison des suites de référence, voir Cauchy. Cours d'analyse algébrique. (Chap. II § 3) IV [6].

b) ***Existence de limites par monotonie et suites adjacentes***

Retour sur e, π, $\log 2$, sur les racines carrées.
Moyennes arithmético-géométriques.
Etude de la rapidité de convergence.

Bibliographie :
IREM : Lille [6] ; Dijon [2], [6], [7] ; Marseille [1], [C8] ; Poitiers [3].
Engel IA [11].

c) ***Approfondissement des méthodes de calcul de π***

Méthodes d'Archimède, d'Al Khasi, de Viète, de Snellius.

Etude expérimentale et théorique. Bon terrain pour montrer l'intérêt des développements limités pour améliorer la performance.

Bibliographie :
IREM : Dijon [6], [7] ; Lille [6] ; Lyon [4] ; Marseille [2], [6].
Engel IA [11] ; Lelionnais III [29] ; Itard III [25] ; Goldstine III [24] ; Numéro spécial sur π du petit Archimède.

Textes historiques : Euler. Introduction à l'analyse des infiniment petits (chap. 6) IV [10].

d) ***Calcul des fonctions exponentielles et trigonométriques par les séries***

Bon terrain pour faire apparaître une majoration du reste, à partir du principe de Lagrange, thème à lier à celui de la construction d'une table trigonométrique (cf. 2).

Bibliographie :
IREM : Bordeaux [3] ; Lille [3] ; Marseille [3], [6] ; Paris Sud [11].
Engel IA [11] ; Lax IA [19].

Note historique : Pour comparer sur ce thème les conceptions de la convergence des séries, voir :
Newton. Papers vol. IV, cité dans Goldstine page 62 III [24].
Euler. Introduction à l'analyse des infiniment petits, (chap. 8) IV [10].
Lagrange. Théorie des fonctions analytiques (art. 25 à 29) IV [18].
Leçons sur le calcul des fonctions (leçon 5) IV [19].
Cauchy. Analyse algébrique, (chap. 9 - § 2) IV [6].

e) ***Calcul des logarithmes*** (on peut prendre comme objectif la construction d'une table)

Méthode de Briggs : étude expérimentale et théorique.

Méthode de Mercator ; emploi de techniques arithmétiques pour améliorer la performance : étude expérimentale et théorique.

Méthode de Newton et Halley ; accélérations de convergence : étude expérimentale.

Bibliographie :
IREM : Bordeaux [3] ; Lyon [C7] ; Marseille [3], [6] ; Paris Sud [11].
Engel IA[11] ; Lax IA [19] ; Goldstine (chap. 2) III [24] ; Naux III [30].

Note historique : Pour comparer sur ce thème les conceptions de la convergence des séries, voir :
Newton. Méthode des fluxions et des suites infinies, (chap. 9) IV [24].
Euler. Introduction à l'analyse des infiniment petits, (chap. 6 et 7) IV [10].
Lagrange. Théorie des fonctions analytiques (art. 19 à 24) IV [18]
Leçons sur le calcul des fonctions (leçon 4) IV [19].
Cauchy. Analyse algébrique, (chap. 6 - § 4) IV [6].

f) ***Accélérations de convergence pour les séries numériques***

Approfondissement de l'étude de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} .$$

Etude de convergence. Mise en évidence expérimentale de la partie principale du reste. Amélioration de la performance qui en résulte. Ce thème est à mener de front avec les problèmes d'évaluations asymptotiques (cf. Problèmes de l'analyse - Thème 6).

Bibliographie :
IREM : Dijon [6], [7] ; Marseille [C8] ; Lyon [5], [C7] ; Grenoble [C2] ; Paris Sud [C11].
Article A.P.M.E.P. (Bull. 320) de Reisz ; Engel IA [11] ; Ovaert et Verley IA [21].

Troisième niveau (on dispose des nombres complexes, du calcul intégral, des théorèmes sur les fonctions continues, et des développements limités des fonctions transcendantes élémentaires).

a) ***Recherche de limites*** de suites par comparaison avec les suites de référence $n \mapsto n^\alpha$, $n \mapsto a^n$, $n \mapsto n!$, $n \mapsto (\log n)^\alpha$.

Comparaison de ces suites de référence. Emploi des dérivées, des parties principales et des développements limités pour la recherche de limites.

Bibliographie :
IREM : Marseille [1] ; Rennes [3].
Demidovitch IA [8] ; Barra IA [4] ; Ovaert et Verley IA [21].

b) ***Etude de convergences et de divergences de suites***

— Par monotonie et suites adjacentes. Cas des séries numériques à termes positifs et des séries alternées.

— Par des majorations du type $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n$, $k < 1$, preuves de divergence par paquets de Cauchy (sur exemples). La condition $u_{n+1} - u_n \to 0$ ne suffit pas pour établir la convergence.

Ce thème met en évidence, sur des exemples simples, l'importance des paquets de Cauchy.

— Exploration de la divergence par suites extraites : quelques exemples d'oscillations et de phases tournantes.

— Cas des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. (Se reporter au thème n° 2 - Equations numériques).

Bibliographie :
IREM : Marseille [8] ; Rennes (à paraître) ; Nancy (à paraître).
Chevallard et Rolland IB [9] ; Dieudonné IB [11] ; Ovaert et Verley IA [21].

c) ***Développement en série des fonctions transcendantes élémentaires***

$x \mapsto \exp x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \log(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc\,tg} x$. Intérêt de l'intégration par parties et de la forme intégrale du reste. Accélérations de convergence pour $x \mapsto \log(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc\,tg} x$.

— Méthode d'Euler pour le calcul de π et ses variantes. Comparaison des diverses méthodes et analyse des facteurs mis en jeu ;

— méthode d'Euler pour le calcul des logarithmes. Comparaison des méthodes.

Bibliographie :

IREM : Bordeaux - relations n° 0, 1, 2 ; Marseille (à paraître).
Chevallard et Rolland IB [28] ; Dieudonné IB [11].

Note historique : Le problème du développement en série entière des fonctions transcendantes élémentaires a été longtemps fort difficile. Voici quelques points de repère :

L. Euler. Introduction à l'analyse des infiniment petits - (chap. 6 à 8) IV [10]
J.L. Lagrange. Théorie des fonctions analytiques - (Art. 19 à 29) IV [18]
Leçons sur le calcul des fonctions - (Leçons 4 et 5) IV [19]
A.L. Cauchy. Analyse algébrique, (chap. 6 et 9) IV [6]
N. Abel. Lettre à Holmböe et mémoire sur la série du binôme (œuvres complètes)
C. Jordan. Cours d'Analyse à l'Ecole polytechnique IV [16]
E. Picard. Traité d'analyse IV [25].

d) ***Accélérations de convergence pour les suites et séries numériques***

Reprise des exemples $\Sigma\frac{1}{n^2}$, $\Sigma\frac{(-1)^n}{n}$, $\Sigma\frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \log p$, $\log n\,!$.

— Approche expérimentale des restes, rôle des paquets de Cauchy ; contrôle théorique du reste grâce au calcul intégral.

— Amélioration de la précision sur le reste par intégrations par parties (début, sur ces exemples, de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin). Gain de performance qui en résulte.

— Exploration de la sommation de quelques séries divergentes.

Bibliographie :

IREM : Marseille [6], [C8] ; Lyon [C7] ; Grenoble [C2] ; Dijon [7].
Chevallard et Rolland IB [9] ; Dieudonné IB [11] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Goldstine (chap. 3) III [24].

Note historique : Pour la sommation des séries divergentes, voir L. Euler IV [11] ; J.L. Lagrange IV [18] ; Lacroix IV [17] ; A.L. Cauchy IV [6] ; N. Abel, (œuvres complètes) ; E. Borel IV [4].

Pour les procédés d'accélération de convergence, voir :
L. Euler IV [11] et Jacobi "De usu legitimo...", œuvres complètes (vol. 6).

THEME N° 2 : Equations numériques.

<u>*Premier niveau*</u> (étude à mener de front avec une première approche des suites numériques).

a) ***Calcul des racines carrées*** par dichotomie, trichotomie.

Méthode de Héron ; emploi de l'algorithme $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\alpha}{u_n})$. Comparaison expérimentale, puis théorique, de la rapidité de convergence et de la performance.

Thèmes associés : cas des racines cubiques, de la recherche d'un inverse avec grande précision, du calcul des racines cubiques connaissant les racines carrées,...

Bibliographie :

IREM : Bordeaux [1], [6], [9], [C1] ; Dijon [4], [6], [7] ; Grenoble [C2] ; Lille [6] ; Lyon [7], [C7] ; Marseille [6], [8], [C8] ; Nancy (à paraître) ; Poitiers [3] ; Rennes (à paraître) ; Paris Sud [C11].
Dhombres III [10] ; Boyer (chap. 3) III [2] ; Kline III [27] ; Engel IA [11].

b) ***Construction d'une table trigonométrique*** par la méthode de Ptolémée (à mener de front avec la géométrie des polygones réguliers et le calcul trigonométrique). Intervention de l'interpolation linéaire pour la calcul de sin 1° à partir de sin 3°. Amélioration de la performance par Al Khasi : on pose $x = \sin 1°$; dans ces conditions $x = \frac{1}{3}[\sin 3° + 4x^3]$. Mise en place, sur cet exemple, de la méthode des approximations successives. Evaluation expérimentale, puis théorique, de la rapidité de convergence. Application ou calcul de valeurs approchées de π.

Bibliographie :

IREM : Marseille [2], [6].
Abdeljaouad III [1] ; Boyer (chap. 10) III [2] ; Youschkevitch III [36] ; Kline (chap. 5) III [27].

<u>*Deuxième niveau*</u> (on dispose des dérivées et de la convergence des suites monotones).

a) ***Etude qualitative des équations***

— Existence et unicité de solutions (emploi de suites monotones).

— Exemples de séparation de solutions par étude de variations et par dichotomie.

— Cas des équations à point fixe — convergence en escalier et en spirale —. Etude de la stabilité (exemples). Exemples d'oscillations et de chaos.

Bibliographie :

IREM : Marseille [6], [8], [C8] ; Lyon [7] ; Dijon [4], [7] ; Limoges [3].
Ovaert et Verley IA [21] ; Demidovitch et Maron IA [9].

Note historique :

I. Newton. Arithmétique Universelle.
J.L. Lagrange. Leçons élémentaires de Mathématiques.

b) ***Recherche de solutions approchées d'équations numériques***

— Description de quelques méthodes : dichotomie, interpolation linéaire, méthode des tangentes, méthode des approximations successives. (Pas d'accélération de convergence à ce niveau).

— Sur quelques exemples, comparaison expérimentale et théorique de la rapidité de convergence et de la performance.

— Intervention de la dichotomie pour l'existence des solutions ; exemple des racines carrées. Dans le cas des équations à point fixe, exploration des facteurs gouvernant la rapidité de convergence (pente des sécantes et des tangentes). On pourra mettre en valeur l'importance d'inégalités lipschitziennes.

Bibliographie :
IREM : Marseille [6], [8], [C8].
Berezin et Zhydkov IB [5] ; Dieudonné IB [11] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Goldstine (chap. 2) III [24].

Note historique :

— *La dichotomie et ses variantes* (subdivisions) ont eu une importance considérable dans le développement des concepts fondamentaux de l'analyse :

J.L. Lagrange. Théorie des fonctions analytiques - Art. 48 - IV [18]. Leçons sur le calcul des fonctions - Leçon 9 - IV [19]

B. Bolzano. Une preuve analytique... Revue d'histoire des sciences, tome 17.

A.L. Cauchy. Cours d'analyse algébrique, note 3, IV [6].

On pourra trouver des références ultérieures (Weierstrass, Dini) dans les livres de Dugac, III [13] et III [15].

— *Méthode d'interpolation linéaire :*

R. Descartes. La géométrie.

J.L. Lagrange. Résolution des équations numériques (œuvres complètes).

— *Méthode de Newton :*

I. Newton. La méthode des fluxions et des suites infinies, IV [24]. Principes mathématiques de la philosophie naturelle, livre 1. (Problème p. 31, Problème p. 22 et Scholie).

A.L. Cauchy. Cours d'analyse algébrique, note 3, IV [6].

— *Méthode des approximations successives :*

F. Viète. Extrait dans Goldstine, chap. 2, § 4, III [24].

J. Wallis. Extrait dans Goldstine, chap. 2, § 4, III [24].

A.L. Cauchy. Cours d'analyse algébrique, note 3, IV [6].

Troisième niveau (on dispose de la continuité, des développements limités, du concept de contact, et du calcul intégral).

a) ***Etude qualitative des équations***

— Existence et unicité des solutions : emploi des suites monotones, des théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues, du critère de Cauchy sous la forme $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n$, où $k < 1$. Cette étude permet de mettre en évidence les divers procédés de démonstration d'existences en analyse (monotonie et bornes supérieures, connexité, compacité, critère de Cauchy). Emploi des valeurs d'adhérence pour les phénomènes d'oscillation.

— Etude de la stabilité des solutions d'une équation à point fixe (par monotonie).

Bibliographie :
IREM : Marseille [8].
Demidovitch et Maron IA [9] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Durand IB [13].

b) ***Séparation des solutions d'une équation***

— Utilisation de variations de fonctions (exemples).

— Comparaison d'équations (exemples).

— Cas des équations algébriques. Majoration du module des racines, exemples utilisant les méthodes de Descartes et de Sturm.

Bibliographie :
Durand IB [13] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Kuroth. Cours d'algèbre supérieure (MIR) ; Fadeev et Sominski. Exercices d'algèbre (MIR).

c) ***Recherche de solutions approchées d'équations numériques***

Approfondissement de l'étude des méthodes classiques : dichotomie, interpolation linéaire, méthode des tangentes, méthode des approximations successives :

— La méthode de dichotomie peut être employée pour démontrer l'existence de racines (théorème des valeurs intermédiaires) et l'existence de maxima et de minima (propriétés des fonctions continues sur un compact).

— Intervention de la convexité dans les méthodes d'interpolation linéaire et des tangentes.

— Exemples d'accélération de convergence ; lien entre méthode des tangentes et méthode des approximations successives. Procédés utilisés pour ramener l'étude de $g(x) = 0$ à celle de $f(x) = x$. Emploi combiné des différentes méthodes précédentes.

— Sur exemples, évaluation asymptotique de la rapidité de convergence pour la méthode des approximations successives. Rôle du contact dans le cas $f(a) = a$, $f'(a) = 0$, et dans le cas $f(a) = a$, $|f'(a)| = 1$. Construction d'algorithmes ayant une performance donnée.

Bibliographie :
IREM : Marseille [6], [8] ; Limoges [3].
Demidovitch et Maron IA [9] ; Berezin et Zhydkov IB [5] ; Dieudonné IB [11] ; Ovaert et Verley IA [21].

d) ***Systèmes linéaires et inversion de matrices carrées***

Sur des exemples simples, emploi de la méthode des approximations successives. Cas des matrices à diagonale strictement dominante.

Bibliographie :

Ovaert et Verley IA [20] ; Berezin et Zhydkov IB [5] ; Durand IB [13] ; Gautmacher IB [16] ; Varga IB [35].

THEME N° 10 : nombres et fonctions attachés à des fonctions par le calcul infinitésimal.

<u>*Premier niveau*</u> (on dispose des dérivées et des primitives).

a) ***Calcul des dérivées.*** Emploi des opérations sur les fonctions (opérations algébriques, composition) ; emploi des développements limités (sur exemples).

b) ***Calcul des primitives.*** Primitives usuelles ; emploi de l'intégration par parties ; construction des fonctions transcendantes élémentaires.

c) ***Calcul de valeurs approchées de dérivées*** par différences finies. Instabilité des dérivées (sur exemples) ; étude expérimentale et théorique.

d) ***Emploi des dérivées et des primitives pour la mesure des grandeurs***

— en géométrie : (aires, volumes de sphères, cônes, cylindres, pyramides).
— en électricité : quantité d'électricité, intensité efficace, énergie.
— en mécanique : quantité de mouvement, travail, énergie.

Bibliographie :

IREM : Limoges [4] ; Lyon [6], [7] ; Marseille [4] ; Poitiers [4] ; Rennes [2], [3] ; Paris Sud [C11].
Lang IA [17] ; Lax IA [19].

<u>*Deuxième niveau*</u> (on dispose des dérivées, des primitives et des intégrales).

a) ***Calcul des dérivées.*** Approfondissement des méthodes (composition, fonctions réciproques) ; calcul et emploi de développements limités.

Bibliographie :

IREM : Lyon [7] ; Marseille (à paraître).
Lang IA [17] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Piskounov IA [22].

b) ***Calcul des primitives.*** Emploi de l'intégration par parties et de changements de variables simples ($x \mapsto ax+b$, $x \mapsto x^2$) ; emploi des fonctions transcendantes élémentaires directes et réciproques ; exemples d'intégrales conduisant à de nouvelles transcendantes.

Ce thème permet de dégager une classification grossière des fonctions.

Bibliographie :

Smirnov IB [31] ; Valiron IB [34] ; Goursat IV [14] ; Piskounov IA [22].

Note historique concernant la classification des fonctions :

L. Euler. Introduction à l'analyse infinitésimale (chap. 1) IV [10] et [11].
J.L. Lagrange. Leçons sur le calcul des fonctions (leçons 1 et 2) IV [19].
A.L. Cauchy. Cours d'analyse (chap. 1) IV [6].
Ch. Hermite. Cours d'analyse (chap. 1) IV [15].

A ce sujet, on pourra aussi consulter les ouvrages suivants :
Ch. Houzel sur les travaux d'Euler in III [23].
J.L. Ovaert sur les travaux de Lagrange in III [23].
Youschkevitch in III [35].
DEA didactique Bordeaux (à paraître).

c) ***Calcul de valeurs approchées de dérivées.*** Cas des dérivées d'ordre supérieur, majoration des erreurs commises.

Bibliographie :

IREM : Marseille (à paraître) ; Paris Sud [C11].
Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [21] ; Berezin et Zhydkov IB [5].

d) ***Calcul de valeurs approchées d'intégrales***

— Méthodes interpolatoires simples (rectangles, trapèzes, tangentes, Simpson). Etude expérimentale. Contrôle théorique des erreurs. Comparaison expérimentale et théorique de la performance de ces méthodes. Optimisation de l'interpolation linéaire et parabolique (méthode de Gauss à l'ordre 2 et 3).

— Développements tayloriens : exemples d'utilisation de développements en série entière. Méthode d'Euler-Maclaurin à l'ordre inférieur à 3 et comparaison avec les méthodes interpolatoires.

Bibliographie :

IREM : Bordeaux [5] ; Marseille [4], [6].
Demidovitch et Maron IA [9] ; Lax IA [19] ; Ovaert et Verley IA [20] ; Piskounov IA [22].

e) ***Emploi du calcul différentiel et intégral pour la mesure des grandeurs :***

— en géométrie : aires, volumes de révolution, emploi de coordonnées polaires ;
— en mécanique : centres d'inertie, moments d'inertie, travail, énergie ;
— en électricité (électrostatique et électrocinétique) : tension, intensité, énergie ;
— en mécanique des fluides, pressions, flux, travail ;
— en optique : chemin optique ;
— en thermodynamique : quantité de chaleur, travail, entropie.

Bibliographie :

IREM : Lyon [3] ; Marseille (à paraître) ; Strasbourg, livre du problème, vol. 5.
Lang IA [17] ; Lax IA [19] ; Arnold IB [4] ; Demidovitch IA [8] ; Piskounov IA [22].

C. QUELQUES LIVRES

Serge LANG - *"A first course in calculus"*, en anglais, 469 p. (Addison-Wesley, 1978).

Le livre de S. Lang s'adresse à des étudiants américains entrant à l'université au sortir de la "High School". Ces étudiants ont en mathématiques un niveau de première un peu amélioré. Ce livre est une initiation à l'analyse réelle. Son principal intérêt n'est pas son contenu, extrêmement classique (fonctions élémentaires, dérivées, intégrales, séries, fonctions de plusieurs variables) mais sa manière d'aborder les choses.

D'entrée de jeu Lang déclare s'intéresser aux étudiants "moyens" et avoir recherché un compromis entre un exposé constructif du sujet et un texte lisible et significatif directement pour le type d'étudiant visé. Voici un extrait de la préface très symptomatique de sa démarche : "On pense souvent qu'il faut commencer un cours par la théorie des ensembles. Il se trouve que le meilleur point d'attaque du sujet (l'analyse réelle(1)) se situe entre limites et dérivées. En d'autres termes, tout étudiant est prêt à accepter comme évident intuitivement les notions de nombres et de limites et leurs propriétés élémentaires. Pour différentes raisons, il est devenu à la mode de tenir que le meilleur point d'attaque du sujet se trouve entre nombres et limites (topologie de **R***). L'expérience montre que les étudiants *ne sont pas prêts* psychologiquement à accepter cela et résistent farouchement à cette approche."

Ainsi Lang traite-t-il directement de dérivation en admettant comme intuitive la notion de limite et en ignorant les problèmes de continuité (qui sont renvoyés en appendice et pour les bons étudiants). Il cherche aussi à décloisonner les mathématiques et propose de nombreux exercices liés à la physique ou à la géométrie. Rappelons enfin que le terme de "calculus" signifie qu'il s'agit de l'apprentissage du "calcul infinitésimal" et réjouissons-nous de ce qu'un mathématicien de l'envergure de Lang s'intéresse aussi efficacement à un enseignement élémentaire.

Claude JOBERT

(1) Note du rédacteur de cette notice.

WONNACOTT, T.H. - *Calculus : an applied approach* (John Wiley and Sons, 1977).

Un cours de *Calcul,* c'est-à-dire d'analyse élémentaire, par les problèmes : les notions fondamentales (suites convergentes, valeurs limites de fonctions, dérivées, etc.) sont introduites à partir d'exemples et formalisées *ensuite*. Un ouvrage de base pour l'enseignement de l'analyse de la 2nde aux Terminales. Comme dit l'auteur : "faire des mathématiques, ce n'est pas faire du sport en spectateur"....

Pierre TISON

ROSS, Kenneth A. - *Elementary Analysis : the theory of Calculus* (Springer Verlag, Undergraduate Texts in Mathematics, 1980).

Cet ouvrage traite de façon élémentaire et cependant complète des fondements de l'analyse réelle : partant de **N**, il aboutit très rapidement à la *description* de **R** (la construction est d'ailleurs indiquée succintement), puis étudie les suites et les séries à partir d'une *approche numérique ;* la continuité est définie à l'aide des images de suites convergentes. L'auteur fait ensuite une incursion dans les espaces métriques (continuité uniforme, compacité, connexité) puis revient aux variables réelles pour traiter du calcul différentiel et intégral.

Des exercices nombreux et bien choisis agrémentent cet ouvrage de référence *pour le professeur* de lycée.

Pierre TISON

DEMIDOVITCH et MARON - *Eléments de calcul numérique* (Editions de Moscou) (Mir).

Au moment où de nombreux enseignants souhaitent que les activités à proposer aux élèves tiennent une place plus importante que les statuts à donner aux notions mathématiques, ce livre est susceptible de fournir des idées et des exemples d'une mathématique assez concrète et proche des problèmes pratiques posés par le calcul numérique.

On trouve ainsi des chapitres sur :
— Nombres approchés
— Généralités sur les fractions continues
— Calcul des valeurs des fonctions
— Résolution approchée d'équations
— Accélération de la convergence
— Systèmes d'équations linéaires
— Interpolation des fonctions, dérivation et intégration approchées

Grâce à l'utilisation généralisée des calculatrices (et éventuellement des micro-ordinateurs), il est possible d'envisager l'étude de certains de ces thèmes afin de réaliser un enseignement moins formel dans lequel les équations que l'on résoud ne sont pas les seules équations du second degré, les intégrales que l'on calcule ne sont pas uniquement celles calculables par primitive...

Michel VIALLARD

Arthur ENGEL. ***Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique*** (traduit de l'allemand par Daniel REISZ). Editions CEDIC (1979)

Je crois ce livre essentiel dans la littérature mathématique de langue française. D'abord par son niveau, si rare en France, niveau intermédiaire entre le lycée et l'université. Ensuite, par une vision des mathématiques beaucoup plus charnue que les squelettes en forme de jeu de construction auxquels nous ont habitués les enseignements secondaire et supérieur des dernières décennies, plus préoccupés par la construction hiérarchique et synthétique des théories que du rôle des problèmes dans la genèse et le fonctionnement des concepts. Enfin, parce qu'il vient à point nommé au moment où l'usage des calculatrices et des mini-ordinateurs donne aux enseignants et aux élèves l'accès à un champ d'activités numériques et algorithmiques exceptionnellement vaste.

Ne nous méprenons pas : il ne s'agit ni d'un traité de mathématiques, ni d'un traité d'informatique. Les situations étudiées ne sont ni purement mathématiques ni purement informatiques, mais au contraire très riches, souvent ouvertes, issues de secteurs aussi variés que la théorie des nombres, la géométrie, la combinatoire, l'analyse, les probabilités, les tris, les jeux, la simulation, les systèmes dynamiques ... On y apprend, dans une démarche très progressive, à construire, à justifier, à comparer des algorithmes numériques. Une telle démarche est, de notre point de vue, fondamentale sur le plan didactique : elle manifeste l'importance de la dialectique entre approfondissement expérimental et approfondissement théorique par un enrichissement progressif et substantiel du champ d'activité mathématique, mais aussi en investissant les résultats théoriques dans le contrôle des algorithmes, dans la construction d'algorithmes plus performants, dans l'analyse de la pertinence des moyens de calcul.

Et c'est là qu'apparaissent les immenses qualités pédagogiques d'Arthur ENGEL. Au lieu d'un catalogue plus ou moins ordonné d'énoncés de problèmes il y a, ô miracle, à la fois une grande continuité dans les objectifs éducatifs et un grand respect de la liberté du lecteur : jamais d'exposé magistral avec une structure imposée, jamais un conseil, une idée qui ne réponde à une demande du lecteur. A travers exemples, exercices et conseils, les idées s'ébauchent, se fortifient ; à telle difficulté, que le lecteur ressent, on trouve quelques pages plus loin une mise au point sous forme d'exercice, d'exemple. Quelle maîtrise sous cette feinte décontraction !

Et que les auteurs et amateurs de traités se rassurent : si cet ouvrage n'est ni un traité de mathématiques ni un traité d'informatique, il donne immanquablement envie de (re)mettre le nez dans telle ou telle théorie. On y trouve même des erreurs, des insuffisances d'ordre mathématique ou informatique, bref de quoi satisfaire tous les appétits. A conseiller en tout cas à la fois à des élèves curieux et voraces et à des enseignants qui veulent renouveler un peu leur vision et leur pratique des mathématiques.

Daniel REISZ

Peter LAX, Samuel BURSTEIN, Aneli LAX. ***Calculus with applications and computing*** (Volume 1). Springer Verlag

Rêvons : le groupe inter-I.R.E.M. d'analyse publie un ouvrage de quelque 500 pages consacrées à l'analyse élémentaire (fonction numérique à une variable) qui concrétise les idées qui se sont fait jour dans le groupe sur l'analyse enseignée dans le secondaire. Hélas, ce n'est qu'un rêve, mais qu'importe puisque le livre existe ! En anglais, écrit par des mathématiciens américains de première grandeur qui, eux, ne pensent pas que c'est s'abaisser que d'écrire un ouvrage de niveau élémentaire. Pour ceux que l'obstacle de la langue arrêtera il ne reste plus qu'à espérer qu'un éditeur francophone s'intéresse à ce qui ne peut être qu'un best-seller.

Quitte à décevoir mes amis mathématiciens, je trouve en général les livres de mathématiques austères, voire rebutants. J'ai pourtant lu celui-ci avec un énorme plaisir. Il faut dire qu'il y a de la chair autour de l'os ! Dans un style plaisant, avec parfois beaucoup d'humour, les auteurs ont voulu montrer que l'analyse est le domaine privilégié pour montrer l'interaction entre les mathématiques et les autres disciplines, l'interaction entre les différents secteurs des mathématiques, l'interaction entre approfondissement théorique et résolution de problèmes. Ils ne se contentent pas de montrer que l'outil mathématique est utile pour résoudre tel ou tel problème, mais ils montrent comment les mathématiques procèdent des problèmes et que son axe principal est cette constante dialectique entre problèmes et mises au point théoriques. Inutile de préciser que dans un tel contexte les auteurs soulignent l'importance fondamentale des méthodes numériques, de l'aspect quantitatif, sans pour autant rejeter l'aspect qualitatif. De nombreux exercices numériques, toujours accessibles à la main ou avec une calculatrice programmable de poche montrent, si besoin en était, tout ce qu'un exemple numérique peut apporter : confirmation d'une idée, exemple crucial, conjectures,...

Certes une telle conception rompt délibérément avec les exposés classiques, d'influence bourbakisante, où l'analyse sort du néant, se monte comme un jeu de construction et où il ne saurait être question d'aborder le moindre problème sans avoir au préalable fixé le statut de tous les concepts nécessaires. Une telle attitude est qualifiée par les auteurs de pudibonderie victorienne...

Et pourtant, sans être pédant, ce livre est néanmoins rigoureux. Après un chapitre sur les nombres réels, on étudie les fonctions comme outil fondamental pour la description de la liaison entre deux quantités. La continuité, quitte à choquer nos habitudes bien françaises, est abordée par l'aspect le plus proche de notre intuition : la continuité uniforme sur un intervalle. On ne se refuse pas non plus, ô horreur, à faire converger uniformément une famille de fonctions. Et toujours dans cette optique on montre l'intérêt fondamental de la démarche algorithmique : construction d'algorithmes, efficacité comparée de différents algorithmes, etc...

Le chapitre "Dérivation" repose essentiellement sur le principe de Lagrange (dérivée positive $\Longleftrightarrow$ fonction croissante) d'où l'on déduit très simplement le théorème des accroissements finis (dans une perspective autrement plus intéressante que ce que nous avons l'habitude de voir dans la plupart des ouvrages), la formule de Taylor et la caractérisation des extremums.

Dans le chapitre "Intégration" tout repose sur les deux propriétés suivantes :

(1) $I(f, S_1 \cup S_2) = I(f, S_1) + I(f, S_2)$

(2) $\left.\begin{array}{l}\text{Pour tout } t \text{ de } S \\ m \leq f(t) \leq M\end{array}\right\} \Longrightarrow m|S| \leq I(f,S) \leq M|S|$

où I (f,S) désigne l'intégrale de f sur l'intervalle S et S_1 et S_2 deux intervalles disjoints. Ces deux propriétés ont évidemment été dégagées par l'étude de quelques problèmes.

Les chapitres suivants mériteraient aussi d'être analysés, mais la place manque et les titres parlent d'eux-mêmes :

• Croître et décroître (fonctions exponentielles et logarithmes)

• Probabilités et applications

• Rotations et fonctions trigonométriques

• Vibrations

• Dynamique des populations et réactions chimiques

• Quelques programmes en FORTRAN.

Essentiel pour tous les collègues qui enseignent l'analyse dans le second cycle, il n'est pas du tout exclu de mettre ce livre dans des bibliothèques d'élèves de classes terminales. Ils auront peut être une vision des mathématiques différente de celle que nous leur donnons dans nos cours. Ce livre ne sera pas non plus déplacé dans les bibliothèques du DEUG qu'il égayera un peu. Un second volume (fonctions à plusieurs variables) est prévu.

Daniel REISZ

ADRESSES ET BULLETINS DES IREM

BESANÇON — **Jean-Claude FONTAINE**
Faculté des Sciences et des Techniques
25030 BESANÇON CEDEX
Tél. : (81) 50.59.30.
Bulletin de liaison de l'IREM de Besançon.
5 numéros par an (tous les 2 mois pendant l'année scolaire).
25 F + 21,50 F pour frais de port.

BORDEAUX — **Pierre DAMEY**
351, cours de la Libération — 33405 TALENCE CEDEX
Tél. : (56) 80.74.42
Annexes de l'IREM :
— en Martinique (responsable M. PRUDENT)
IREM, Bât. N6 — Rez-de-chaussée —
E.N. Pointe des Nègres
97200 FORT-DE-FRANCE
— en Guadeloupe (responsable M. RANGUIN)
Section Guadeloupéenne
Bât. P — 3e étage — B.P. 17
97110 POINTE-A-PITRE
— en Guyane (responsable M. RICHARD)
Lycée d'Etat Mixte Félix Eboué
97300 CAYENNE
— en Polynésie (responsable M. BONTEMPS)
B.P. 33.40
TAHITI Polynésie française

BREST — **André TREGUER**
Faculté des Sciences et Techniques, 6 avenue V. Le Gorgeu
29283 BREST CEDEX
Tél. : (98) 03.16.94 (poste 488)
Taol Lagad
1 par mois ; pour les personnes de l'académie : gratuit ;
pour les personnes extérieures : s'adresser à l'IREM.

CAEN (ou Basse-Normandie) — **François COUCHOT**
I.U.T., Boulevard Maréchal Juin — 14000 CAEN
Tél. : (31) 94.67.83
La Godasse
2 ou 3 par an ; gratuit pour les personnes de l'académie.

CLERMONT-FERRAND — **Paul-Louis HENNEQUIN**
B.P. 45 — 63170 AUBIERE
Tél. : (73) 26.41.10 (poste 33.10)
Bulletin de liaison de l'IREM de Clermont-Ferrand
Trimestriel ; gratuit pour les personnes de l'académie.
Abonnement à l'ensemble des publications de l'IREM : 140 F.

DIJON — **François MARCHIVIE**
Université de DIJON — IREM B.P. 138 — 21004 DIJON CEDEX
Tél. : (80) 66.64.13 (poste 641)
Feuille de Vigne.
Tous les deux mois ; gratuit.

GRENOBLE — **Jean-René JOLY**
B.P. 41 — 38401 SAINT MARTIN D'HERES
Tél. : (76) 54.81.45 (poste 502)
Feuille de Chou
Tous les 15 jours ; gratuit.

LILLE — **P. TISON**
Faculté des Sciences et Techniques
B.P. 36 — 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX
Tél. : (20) 91.92.22 (poste 2482)

LIMOGES — **Jésus EZQUERRA**
123, rue Albert Thomas — 87060 LIMOGES CEDEX
Tél. : (55) 79.24.12
Bulletin de l'IREM
Trimestriel ; gratuit pour les personnes de l'académie ;
pour les personnes extérieures : 10 F.

LORRAINE — **Jean-Louis CLERC**
Université Nancy I — Faculté des Sciences
Case officielle n° 140 — 54037 NANCY CEDEX
Tél. : (8) 327.55.51

LYON — **Jean-Marc BRAEMER**
Université Claude Bernard — 43, bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX
Tél. : (7) 889.84.55 - (7) 889.81.24 (poste 37.24).
Sans Tambour ni Trompette (IREM + A.P.M.E.P. Régionale)
Trimestriel
Ce bulletin est diffusé dans les établissements et aux adhérents A.P.M.E.P. de l'Académie.
Abonnements Individuels aux publications IREM : 100 F
(bulletin + bulletin Inter-IREM...)

MARSEILLE — **M. BERGMAN**
U.E.R. de Marseille Luminy, 70 Route Léon Lachamp, case 901
13288 MARSEILLE CEDEX 2
Tél. : (91) 41.39.40 - (91) 41.01.40 (poste 32.10)
Annexe : La Réunion

MONTPELLIER — **Ch. ROUMIEU**
Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
Place Bataillon — 34060 MONTPELLIER CEDEX
Tél. : (67) 63.42.14 ou (67) 63.91.44 (poste 383)

NANTES — **Jean-Pierre LETOURNEUX**
2 chemin de la Houssinière — 44072 NANTES CEDEX
Tél. : (40) 74.50.70 (poste 398)
Bulletin de liaison ; et *collection Nanta Iremica*
3 numéros par an.
Vente au numéro, comme la collection Nanta Iremica.
Annexes : ANGERS ; LE MANS.

NICE **M. LABROUSSE**
Université de Nice, Département de Mathématique,
Parc Valrose — 06034 NICE CEDEX
Tél. : (93) 51.91.00 (poste 372)

ORLEANS **R. CHARPENTIER**
Université — Domaine Universitaire de la Source
45045 ORLEANS CEDEX
Tél. : (38) 63.22.16 (postes 624-638)

PARIS NORD **Michel BOURBION**
Université Paris-Nord — Avenue J.-B. Clément
93430 VILLETANEUSE
Tél. : (1) 821.61.70 (poste 4390 à 4394)
Panirem
Mensuel ; gratuit.

PARIS SUD **André DELEDICQ**
Université Paris VII — 2, place Jussieu, Tour 56 — 75005 PARIS
Tél. : (1) 336.25.25 (poste 5383)
Circulaire IREM
6 par an ; gratuit.
Abonnement aux brochures IREM (10 par an) : 150 F.

PICARDIE **Jean-Luc CHABERT**
48 rue Raspail — BC 619 — 02100 SAINT-QUENTIN
Tél. : (23) 67.06.18 et (23) 62.62.98
Pas de bulletin régulier.

POITIERS **Raymond BARRA**
40, Avenue du Recteur Pineau — 86022 POITIERS CEDEX
Tél. : (49) 46.27.35

REIMS **Julianne UNTERBERGER**
Moulin de la Housse — B.P. 347 — 51062 REIMS CEDEX
Tél. : (26) 85.12.21
Bulletin de liaison de l'IREM.
2 par an ; gratuit.

RENNES **Michel VIALLARD**
Avenue du Gl Leclerc — Rennes-Beaulieu — 35042 RENNES CEDEX
Tél. : (99) 36.48.15
Bulletin d'Information de l'IREM de Rennes
4 par an ; gratuit.

ROUEN **Y. CELANIRE**
B.P. 27 — 76310 MONT SAINT AIGNAN
Tél. : (35) 70.42.73 - (35) 74.03.32 (poste 86)

STRASBOURG **François PLUVINAGE**
10 rue du Général Zimmer — 67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : (88) 61.48.20
L'Ouvert Organe d'information et d'échange de la régionale A.P.M.E.P. d'Alsace
et de l'IREM de Strasbourg.
Trimestriel (4 numéros par an).
Expédié gratuitement aux membres de la régionale A.P.M.E.P.
Le numéro : 10 F ; abonnement annuel : 40 F.

TOULOUSE **Line MAILHOS**
UER MIG. Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne
31062 TOULOUSE CEDEX
Tél. : (61) 52.14.14
L'Autan et *Bulletin de l'IREM de Toulouse*.
L'Autan est mensuel ; le Bulletin est semestriel.
Gratuit pour les personnes de l'académie.
Bulletin : 10 F pour les personnes extérieures.