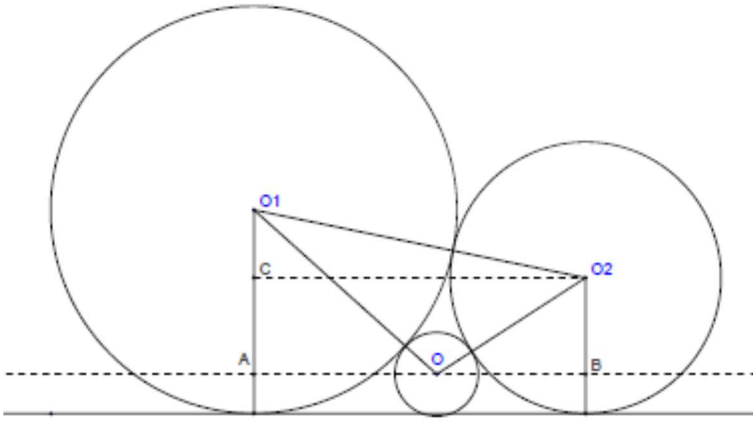
Les trois cercles



Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{R_1}}+\frac{1}{\sqrt{R_2}}=\frac{1}{\sqrt{R}}$$

Chaque cercle est tangent aux deux autres :

$\mathcal{C}_1$ de centre O_1 et de rayon R_1.

$\mathcal{C}_2$ de centre O_2 et de rayon R_2.

$\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R, est le cercle le plus petit.

Dans le triangle AOO_1 rectangle en A :

$O_1A = R_1 – R$, $O_1O = R_1 + R$ et on pose $d_1 = OA$

L'application du théorème de Pythagore donne $O_1O^2 = O_1A^2 + AO^2$ relation qui équivaut à

$(R_1 + R)^2= (R_1 – R)^2 + d_1^2$ qui équivaut à $d_1^2 = 4RR_1$ qui équivaut enfin à : $d_1 = 2\sqrt{RR_1}$ **(1)**

Dans le triangle BOO_2 rectangle en B :

$O_2B = R_2 – R$, $O_2O = R_2 + R$ et on pose $d_2 = OB$

L'application du théorème de Pythagore donne $O_2O^2 = O_2B^2 + BO^2$ relation qui équivaut à

$(R_2 + R)^2= (R_2 – R)^2 + d_2^2$ qui équivaut à $d_2^2 = 4RR_2$ qui équivaut enfin à : $d_2 = 2\sqrt{RR_2}$ **(2)**

Dans le triangle CO_1O_2 rectangle en C :

$O_1O_2 = R_1 + R_2$, $O_1C = R_1 – R_2$ et on pose $d = O_2C = d_1 + d_2$

L'application du théorème de Pythagore donne $O_1O_2^2 = O_1C^2 + O_2C^2$ relation qui équivaut à

$(R_1 + R_2)^2= (R_1 – R_2)^2 + d^2$ qui équivaut à $d^2 = 4R_1R_2$ qui équivaut enfin à : $d = 2\sqrt{R_1R_2}$ **(3)**

En rassemblant **(1)**, **(2)** et **(3)** on obtient : $\sqrt{RR_1}+\sqrt{RR_2}=\sqrt{R_1R_2}$ relation que l'on divise par $\sqrt{RR_1R_2}$ pour établir la relation à démontrer, à savoir :

$$\frac{1}{\sqrt{R_1}}+\frac{1}{\sqrt{R_2}}=\frac{1}{\sqrt{R}}$$