D' Engel à Euler

François BERTRAND
Lycée BELLEVUE - Toulouse
francois.bertrand@dbmail.com

Résumé

Dans cet article, on présente la résolution d'un problème diophantien, posé par Euler et popularisé par Engel.

Mots clés

Engel, Equation diophantienne, Corps quadratique

Introduction

Rien n'est, nous semble-t-il, plus mathématiquement stimulant qu'une question dans laquelle se mêlent mystérieusement concision et pouvoir évocateur. On trouvera dans [1] quelques énoncés qui s'approchent de ce subtil dosage. Il en va ainsi du problème suivant, tiré du chapitre 6 de cet ouvrage et que nous noterons (E_n) :

(E_n) : pour $n \geq 3$, $x^2 + 7y^2 = 2^n$ admet une solution $(x ; y) \in \mathbb{N}^2$ avec x et y impairs.

A sa seule lecture, ce fut le coup de foudre. Tout y était : cadre arithmétique élémentaire, analogie multiplicative prometteuse entre les deux membres de (E_n) et ombre de Ramanujan, portée par l'équation diophantienne (dite de Ramanujan-Nagell) :

$$x^2 + 7 = 2^n [2]$$

Confessons aussi que la réponse donnée par Engel [1] n'a pas été consultée ni même regardée, il appartiendra au lecteur de la comparer, s'il le souhaite et si cela le mérite, à la solution donnée ici.

Pour finir signalons qu' Engel fut un pédagogue hors-pair, comme le montre son traité consacré aux probabilités [3] . Il coacha aussi l'équipe allemande en compétition pour les Olympiades Internationales de Mathématiques.

Engel attribue à ce problème une double origine. L'une est académique : cet énoncé figurait dans une épreuve d'Olympiade Mathématique moscovite. L'autre est historique : il semble que ce soit en fait une question posée par Euler, autre facteur motivant, on en conviendra.

Attaque frontale

Consacrons-nous à la résolution en nombres entiers impairs de l'équation (E_{n+3}) dans la mesure où n est un entier naturel.

Définissons pour cela une suite $(x_n; y_n)$ de $\mathbb{Q}^2$ par $(x_0; y_0) = (1; 1)$ et pour tout

$$\text{entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n - 7y_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \end{cases} (*)$$

On s'expliquera plus loin sur ce *deus ex machina*.

Proposition 1

Pour tout entier $n \geq 0$, $(x_n; y_n)$ est solution du problème d'Engel d'ordre n .

Preuve

Montrons, par récurrence, la propriété (P_n) :

$$\begin{cases} i) x_n \text{ et } y_n \text{ impairs} \\ ii) x_n - y_n \equiv 0 \pmod{4} \\ iii) (x_n; y_n) \text{ solution de } (E_{n+3}) \end{cases}$$

(P_0) étant clairement vérifiée, on suppose donc que (P_n) est établie à un rang n donné. Remarquons alors que x_{n+1} et y_{n+1} sont bien des entiers et que $x_{n+1} - y_{n+1} = -4y_n$, ce qui assure le point ii) et le fait que x_{n+1} et y_{n+1} soient de même parité. Notons aussi que $x_{n+1} + y_{n+1} = x_n - 3y_n \equiv 2y_n \pmod{4}$, ce qui interdit à x_{n+1} et y_{n+1} d'être pairs tous les deux puisque, avec ii), $x_{n+1} + y_{n+1}$ serait un multiple de 4 alors que y_n est impair.

Ainsi i) est validé.

Enfin, $x_{n+1}^2 + 7y_{n+1}^2 = \frac{8}{4}(x_n^2 + 7y_n^2) = 2^{n+4}$ d'où (P_{n+1}) , et la récurrence se poursuit.

Si on veut, comme l'énoncé initial l'exigeait une solution à ce même problème mais en entiers naturels, il suffit de considérer $(|x_n|; |y_n|)$.

Contexte

Le lecteur averti aura reconnu en le membre de gauche de (E_n) l'expression de la norme N du corps quadratique $\mathbb{Q}(i\sqrt{7})$ définie par : $N(z) = |z|^2$ pour z dans ce corps.

L'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(i\sqrt{7})$ étant $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \stackrel{def}{=} \theta\right]$, on peut donc poser

$\theta^{n+1} = \frac{x_n + i y_n \sqrt{7}}{2}$ (***) où x_n et y_n sont des entiers de même parité, ce pour tout

$n \in \mathbb{N}$. Dès lors l'égalité $\theta^{n+2} = \theta \times \theta^{n+1}$ donne la relation (*) et on retrouve les suites du paragraphe précédent. Par ailleurs l'action de N sur chaque membre de (***) montre, sans calcul, que $(x_n; y_n)$ s'en trouve solution de (E_{n+3}) . Voilà pour quelques justifications a posteriori concernant la solution proposée plus haut ; le cadre algébrique utilisé pour cela permet toutefois d'en dire plus.

Problème d'unicité

Proposition 2

Soit n un entier naturel. $(x; y)$ est solution au problème d' Engel d'ordre n si et seulement si : $\exists(\varepsilon, \varepsilon') \in \{-1, 1\}$, $x = \varepsilon x_n$ et $y = \varepsilon' y_n$

Preuve : Nous nous appuyerons sur les résultats élémentaires suivants.

Lemme

L'anneau $\mathbb{Z}(\theta)$ est euclidien (pour la norme).

Preuve

Montrons donc que pour tout z de $\mathbb{Q}(i\sqrt{7})$ il existe $\alpha \in \mathbb{Z}(\theta)$ tel que $N(z-\alpha) < 1$.

En posant $z = x + iy\sqrt{7}$ avec x et y rationnels, on définit q comme l'entier le plus proche de $2y$, et p celui de $[2x]$ ou $[2x]+1$ qui possède la même parité que q puis $\alpha = \frac{p}{2} + i\frac{q}{2}\sqrt{7}$.

Alors il vient : $N(z-\alpha) = \frac{1}{4}((2x-p)^2 + (2y-q)^2) \leq \frac{1}{4}(1 + \frac{7}{4}) < 1$

Définition

On note Δ l'ensemble des éléments $a + ib\sqrt{7}$ de $\mathbb{Z}(\theta)$, irréductibles, tels que $a \in \mathbb{N}^*$ ou $a = 0$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Par exemple $\theta \in \Delta$, et si π est un irréductible de $\mathbb{Z}(\theta)$, on dispose de l'alternative $\pi \in \Delta$ ou $-\pi \in \Delta$.

Corollaire

On peut donc développer une arithmétique similaire à celle de $\mathbb{Z}$ dans l'anneau $\mathbb{Z}(\theta)$ et affirmer que pour tout α non nul de $\mathbb{Z}(\theta)$ il existe une unique décomposition du type :

$$\alpha = \varepsilon \prod_{i=1}^s \pi_i^{m_i} \text{ où } s \in \mathbb{N}, (m_1, \dots, m_s) \in (\mathbb{N}^*)^s, \varepsilon \in \{-1, 1\}, (\pi_1, \dots, \pi_s) \in \Delta^*.$$

Donnons nous désormais x et y entiers impairs tels que :

$$x^2 + 7y^2 = 2^{n+3} \text{ ou encore } N(\alpha) = 2^{n+1} \text{ avec } \alpha = \frac{x}{2} + i \frac{y}{2} \sqrt{7} \in \mathbb{Z}(\theta).$$

Comme la décomposition en produit de facteurs d'irréductibles de $2^{n+1} = \theta^{n+1} \bar{\theta}^{n+1}$, on en déduit que $\alpha = \varepsilon \theta^i \bar{\theta}^j$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}, 0 \leq i \leq j$, quitte à changer α en son conjugué, et $i+j=n+1$. Si $i \geq 1$, alors 2 divise α ce qui est incompatible avec l'imparité de x (ou de y) ainsi $i = 0$ donc $\alpha = \varepsilon \bar{\theta}^{n+1}$ ou $\alpha = \varepsilon \theta^{n+1}$ d'où la proposition 2 (dans sa partie substantielle) grâce à (**).

Références

- [1] Arthur Engel, "Problem solving strategies (Springer)
Une traduction est disponible sous le titre "Solutions d'expert"
- [2] Ramanujan, " Collected papers " page 327 (Chelsea)
- [3] Arthur Engel, Les certitudes du hasard (Aléas)