Une introduction de la fonction inverse en classe de SECONDE

Groupe Didactique des Mathématiques de l'IRES de Toulouse.
Recherche élaborée dans le cadre du groupe CDAMPERES soutenu par l'I.N.R.P.
C. Denux, J.P.Loubatières, R. Marquès, Y. Piau, M. Durançon

Résumé

Dans l'activité proposée, l'élève, guidé par l'enseignant, est invité à construire ses propres connaissances. Nous partons de l'idée que la notion d'infiniment grand est communément admise. La notion d'infiniment petit est beaucoup plus difficile à appréhender et est génératrice de difficultés dans l'apprentissage des limites de fonctions et de suites. Nous nous proposons d'aborder dans cette activité, la notion de fonction inverse et d'infiniment petit.

Mots Clés

Fonction – Limite – Infiniment petit – Collège – Lycée – TICE – Tableur – Logiciel de géométrie dynamique

Présentation

Dans le cadre de l'introduction de la notion de fonction inverse en classe de Seconde, nous avons fait le pari qu'une Question, non explicite dans les programmes de cette classe mais à Fort Pouvoir Générateur d'Etude et de Recherche (QFPGER), nous permettrait de motiver les élèves pour étudier l'évolution de deux quantités liées par une relation fonctionnelle.

Dans « De l'esprit géométrique », à partir de ce que nous pouvons appeler une QFPGER, Blaise Pascal a proposé un mécanisme pour faire comprendre l'infiniment petit à un interlocuteur qui admet l'infiniment grand.

Dans l'activité proposée, nous utilisons ce mécanisme au niveau Seconde pour introduire et étudier la fonction inverse.

A partir du texte de Blaise Pascal, on accompagne les élèves vers la découverte d'un lien entre deux grandeurs géométriques. Une relation de dépendance est alors mise en évidence à partir :

- D’un texte historique qui demande à être analysé et illustré.
- D’un logiciel de géométrie dynamique.
- De l'étude de valeurs prises par une quantité.
- De la recherche de l’expression de cette quantité en fonction de la variable.

La définition et les propriétés de la fonction inverse peuvent être alors mises en place.

Thèmes du programme de Seconde abordés dans cette activité

- Fonction.
- Ensemble de définition.
- Représentation graphique, résolution de l'équation f(x) = k dans le cas d'une fonction définie géométriquement.
- Fonction strictement décroissante.
- Fonction inverse.

Déroulement

Ce travail peut être réparti sur plusieurs séquences :

- Travail à la maison : lecture du texte historique et construction d’une figure pour l'illustrer.
- Mise en évidence de la représentation graphique de la fonction étudiée à l’aide d’un logiciel adapté, lecture graphique de propriétés de cette fonction,
- Découverte d’une expression de la fonction étudiée : la fonction inverse.
- Démonstration des conjectures.
- Synthèse.

Texte à lire à la maison et à illustrer à l'aide d'une figure

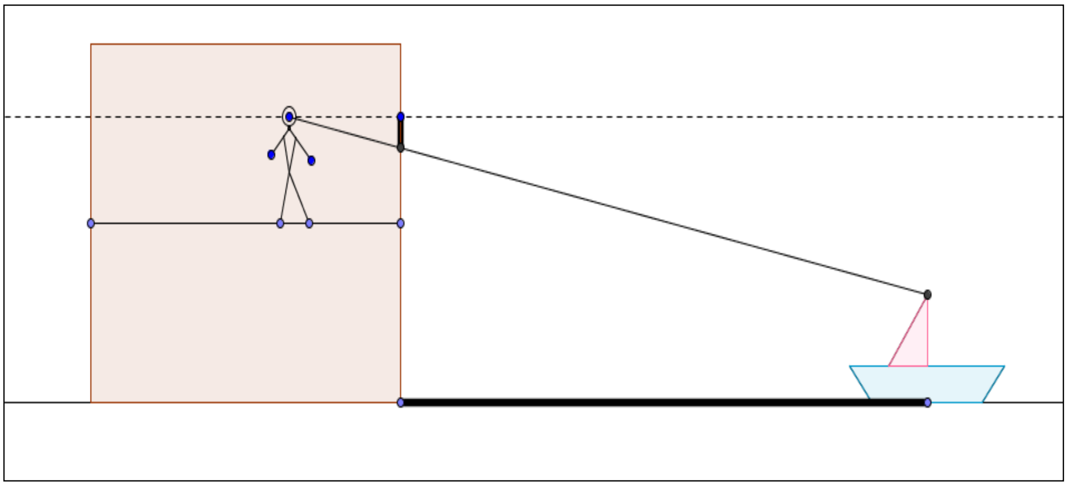
Un bateau s'éloigne du rivage

Il y a des segments de droite de toutes les longueurs. Il y en a donc de très petits. Et si un segment est extrêmement petit, au point peut-être qu'on ne le voit pas, peut-on toujours en trouver un plus petit ? C'est une question dont les philosophes ont débattu depuis l'Antiquité. Pascal était convaincu qu'on peut toujours en trouver un plus petit. Voici un argument qu'il a utilisé pour convaincre de cela une personne persuadée du contraire, mais admettant par ailleurs qu'il existe des segments aussi grands que l'on veut :

*« Et dans l'espace le même rapport se voit entre ces deux infinis contraires ; c'est-à-dire que, de ce qu'**un espace peut être infiniment prolongé**, il s'ensuit qu'**il peut être infiniment diminué**, comme il paraît en cet exemple : si on regarde au travers d'un verre(une vitre d'une fenêtre) un vaisseau qui s' éloigne toujours directement, il est clair que le lieu du diaphane(la vitre) où l'on remarque un point tel qu'on voudra du navire haussera toujours par un flux continuel, à mesure que le vaisseau fuit(s' éloigne). Donc, si la course du vaisseau est toujours allongée et jusqu'à l'infini, ce point haussera continuellement ; et cependant il n'arrivera jamais à celui où tombera le rayon horizontal mené de l'œil au verre, de sorte qu'il en approchera toujours sans y arriver jamais, divisant sans cesse l'espace qui restera sous ce point horizontal, sans y arriver jamais. D'où l'on voit la conséquence nécessaire qui se tire de l'infinité de l'étendue du cours du vaisseau, à la division infinie et infiniment petite de ce petit espace restant au dessous de ce point horizontal. »*

Compte-rendu en classe

Les travaux des élèves ont permis au professeur d'élaborer un fichier dynamique GEOGEBRA, ce fichier est alors montré à la classe.
On y voit le bateau qui s'éloigne, les grandeurs évoquées par Pascal sont mises en évidence. Le texte de Pascal est alors éclairé de manière significative.

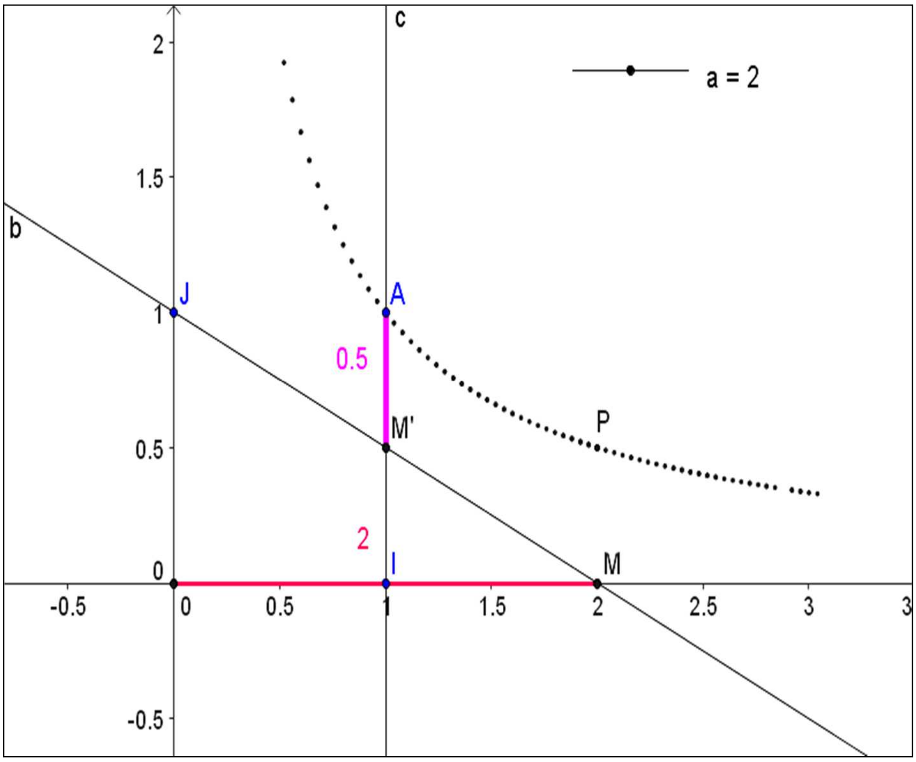


Activité en salle informatique

En prolongement de l'activité précédente, on propose aux élèves d'élaborer un fichier de géométrie dynamique qui va nous permettre de traduire le discours de Blaise Pascal en quelques mots en utilisant le vocabulaire des fonctions.

Dans le repère orthogonal proposé par le logiciel GEOGEBRA, on considère les points I(1 ;0) ; J(0 ;1) ;A(1 ;1) ;M(x ;0) avec x réel positif. Le point M est donc un point mobile sur la demi-droite [OI).
Quand il existe, on note M' le point d'intersection des droites (JM) et (AI).
Faire une figure complète, mettre en évidence les segments [OM] et [AM'].
Faire le lien avec le texte de Pascal.
Quelle est la fonction f qui à x associe AM' ? Dessiner sa représentation graphique.
Quel est son ensemble de définition ? Son sens de variation ?
A l'aide des notations de la figure et du vocabulaire des fonctions, réécrire en quelques mots le discours de Blaise Pascal.

La figure obtenue est la suivante. La trace obtenue est celle du point P de coordonnées (OM ; AM').



Pour répondre à la question « Quelle est la fonction f qui à x associe AM' ? », on attend des élèves une conjecture dans un premier temps.
Si nécessaire, on peut proposer des jokers du type :
Quelle est la position de *M* pour $AM' = 2 \text{ ou } \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{4}$?

Dans un deuxième temps, la simplicité de la conjecture $AM' = \frac{1}{x}$ rend plus motivante la démonstration de ce résultat.
Une démarche analytique peut être utilisée, cela dépend des pré-requis.
Si besoin, une configuration de Thalès de type « papillon » pourra être mise en évidence, ce qui facilitera la tâche des élèves dans le cas d'une démonstration non analytique.

Il y a plusieurs façons de représenter graphiquement f, la plus simple est d'écrire $f(x) = \frac{1}{x}$ dans la fenêtre SAISIE du logiciel. Les élèves peuvent vérifier que la courbe obtenue contient la trace du point P.
L'ensemble de définition de la fonction définie dans l'exercice est l'ensemble

des réels strictement positifs.
Exemples de réécriture du texte de Blaise Pascal :

- Lorsque le point M (d'abscisse x) représentant le vaisseau s'éloigne du port, la distance AM' (égale à $\frac{1}{x}$) devient de plus en plus petite.
- Lorsque le nombre x devient de plus en plus grand, son image par la fonction inverse devient de plus en plus proche de zéro.

Synthèse en classe

- Terminer les démonstrations des conjectures :
  - AM' = $\frac{1}{x}$
  - La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle des réels strictement positifs.

- Effectuer un bilan qui indique notamment que le sens de variation et la représentation graphique de la fonction inverse font partie des connaissances exigibles du programme.

Conclusion

La notion d'infiniment petit a été un moteur pour l'étude de relation entre deux grandeurs et pour introduire en Seconde la notion de fonction dans un cas non affine. L'étude de la fonction inverse est alors apparue plus naturelle.

Pour aller plus loin

Vous pouvez découvrir des activités autour de la notion de l'infiniment petit dans la brochure éditée par l'I.R.E.M de Toulouse : *Limites et infiniment petit.*

Retrouvez le groupe Didactique des Mathématiques de l'IRES de Toulouse sur le site de l'IRES de Toulouse : *irem.ups-tlse.fr*

et d'autres ressources en ligne sur le site

http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes