QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LES PRIORITÉS OPÉRATOIRES

I. Introduction

Notre intérêt pour l'enseignement de l'algèbre au collège nous a conduit à nous intéresser aux concepts sur lesquels les concepts algébriques s'enracinent puisque comme l'écrit Vygotski :

> « Un nouveau stade de généralisation ne peut apparaître que sur la base du précédent. Une nouvelle structure de généralisation a pour source non pas une nouvelle généralisation directe des objets à laquelle procéderait la pensée mais la généralisation des objets généralisés dans la structure précédente. Elle apparaît en tant que généralisation de généralisations et non pas simplement comme nouveau mode de généralisation d'objets singuliers. Le précédent travail de la pensée, qui s'est traduit dans les généralisations dominant au stade précédent, n'est pas annulé, n'est pas perdu mais s'intègre à titre de prémisse nécessaire dans le nouveau travail de la pensée. »
> (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 391)

Ainsi nous avons dû examiner plus en détails les concepts de grandeur mesurable, de nombre, d'opération, d'égalité, de calcul, entre autres, et leurs développements, puisque c'est en partie sur ces concepts que les concepts algébriques se fondent. Cela nous a en particulier amenés à définir le « calcul chiffral »[1] pour le distinguer du calcul littéral et à tenter de circonscrire une signification du mot calcul[2]. Et nous avons proposé de « définir » le calcul d'un nombre comme un changement de forme de ce nombre soit en vue de l'écrire sous une forme adaptée au problème dans lequel il intervient, soit de l'écrire sous sa « forme réduite »[3].

Cela nous a également poussés à examiner le concept de « priorités opératoires » conçu dans l'esprit des programmes du collège comme un « préalable au calcul algébrique » et à son enseignement.[4] Ce dernier consiste essentiellement à apprendre aux élèves comment calculer des nombres écrits à l'aide de plusieurs symboles opératoires en vue d'obtenir leur forme réduite. Il

---

[1] Le « calcul chiffral » ne s'effectue qu'avec des nombres écrits à l'aide de chiffres contrairement au calcul littéral où certains nombres peuvent être écrits à l'aide de lettres. (Quelques réflexions sur le calcul, *Éléments 1*, IREM de Toulouse, p. 5)

[2] Quelques réflexions sur le calcul, *Éléments 1*, IREM de Toulouse, pp. 4-18.

[3] Rappelons que nous avons défini la forme réduite d'un nombre comme la forme de ce nombre qui nécessite le moins de signes possible pour l'écrire. (Quelques réflexions sur le calcul, *Éléments 1*, IREM de Toulouse, p. 15)

[4] « L'acquisition des priorités opératoires est un préalable au calcul algébrique. Les questions posées à propos de résultats obtenus à l'aide de calculatrices peuvent offrir une occasion de dégager les priorités opératoires usuelles. » (B.O. spécial du 28 août 2008)

revient le plus souvent à énoncer des « règles » plus ou moins justifiées et à les faire appliquer par les élèves dans diverses situations.

L'analyse de cet enseignement nous a semblé soulever quelques questions tant mathématiques que didactiques. Il nous a poussés à nous interroger sur la nécessité d'un tel enseignement et de la possibilité d'une autre approche de ces questions. C'est ce que nous allons tenter de faire dans cet article. Nous rappelons que notre réflexion s'inscrit dans une approche historico-socio-culturelle de l'apprentissage dont Vygotski est l'un des fondateurs essentiels.

II. Bref examen de l'enseignement « habituel »[5] des priorités opératoires

L'enseignement des priorités opératoires s'effectue au collège en classe de cinquième. Il consiste donc à enseigner aux élèves comment calculer des nombres dans l'écriture desquels apparaissent plusieurs symboles d'opérations, comme dans les nombres $2 + 3 \times 4$ ou $24 \div (12 - 4) -0,5 \times 3$. Il suppose que la plupart des élèves sont incapables de calculer de tels nombres avec leurs connaissances antérieures de l'école primaire et de la classe de sixième.

Pour le vérifier, nous avons demandé à des élèves de deux classes de sixième[6], dès le début de l'année, de calculer les nombres et les grandeurs suivants :

P1. Calculer les nombres suivants en indiquant toutes les étapes des calculs :

$A = 3 \times 4 + 2$	$B = 15 - 2 + 3$	$C = 12 + 4 \div 2$
$D = 2 \times 3 + 5 \times 4 + 1$	$E = 15 + 3 - 2$	$F = 4 \div 2 + 12$
$G = 2 + 3 \times 4$	$H = 2 \times 3 + 1 + 5 \times 4$	

P2. Calculer les grandeurs suivantes en indiquant toutes les étapes des calculs :

A = 3 kg × 4 + 2 kg	B = 15 m - 2 m + 3 m	C = 12 g + 4 g ÷ 2
D = 2 × 3 € + 5 × 4 € + 1 €	E = 15 m + 3 m - 2 m	F = 4 g ÷ 2 + 12 g
G = 2 kg + 3 kg × 4	H = 2 × 3 € + 1 € + 5 × 4 €	

Ces questionnaires ont été distribués sans préparation, alors que nous étudiions les premiers éléments de géométrie et qu'avaient été abordés en tout début d'année l'écriture décimale des

[5] Nous appelons l'enseignement « habituel » des priorités opératoires celui qui est proposé dans tous les manuels de cinquième et effectivement dispensé par l'immense majorité des professeurs. Pour avoir brièvement enquêté auprès de ces derniers dans six collèges de l'académie de Toulouse, tous ont répondu pratiquer ainsi.

[6] Cette activité a été proposée à 48 élèves de 6e au collège V. Hugo de Carmaux en octobre 2011.

nombres décimaux et quelques rappels sur les grandeurs mesurables comme la longueur, la masse, l'aire, entre autres, l'addition et la soustraction. À cette occasion, nous avions réfléchi au problème du calcul et avions défini le calcul comme nous l'avons proposé dans l'introduction de cet article. De plus, ils ont été donnés à une quinzaine de jours d'intervalle, le questionnaire P1 avant le questionnaire P2 dans une classe et le questionnaire P2 avant le questionnaire P1 dans l'autre. Il nous semblait en effet intéressant de voir si les élèves calculaient mieux avec des grandeurs mesurables qu'avec des nombres, ou inversement, et si l'ordre dans lequel ces questionnaires avaient été posés influait sur les réponses.

Finalement nous avons obtenu les résultats suivants :

Nombres	Effectifs	Réponses exactes (en %)
A	44	91,6 %
B	46	95,8 %
C	5	10,4 %
D	31	64,6 %
E	42	87,5 %
F	44	91,6 %
G	15	31,2 %
H	25	52,1 %

Grandeurs	Effectifs	Réponses exactes (en %)
A	42	87,5 %
B	46	95,8 %
C	5	10,4 %
D	34	70,8 %
E	46	95,8 %
F	44	91,6 %
G	11	22,9 %
H	30	62,5 %

Nous avons pu ainsi constaté que l'ordre dans lequel les questionnaires avaient été donnés n'avait pas d'influence notable et que nos élèves calculaient sensiblement de la même manière en grandeur ou en nombre. Pour le questionnaire P1, les calculs des nombres $C = 12 + 4 \div 2$ et $G = 2 + 3 \times 4$ ont été ceux occasionnant le plus d'erreurs. Plus précisément, sur les 48 élèves interrogés, 5 élèves ont trouvé $C = 14$; 40 élèves ont trouvé $C = 8$; un élève a trouvé $C = 9$ ($16 \div 2 = 9$) et 2 n'ont pas répondu. Pour le nombre G, 15 élèves ont trouvé $G = 14$; 31 élèves ont trouvé $G = 20$; un élève $G = 25$ ($5 \times 4 = 25$) et un élève n'a pas répondu. Ce qui signifie que 85,4 % des élèves ont calculé C en effectuant les calculs de gauche à droite et que 66,6 % des élèves ont calculé G de la même manière. Il est à noter que tous les élèves qui ont trouvé que $G = 20$ ont trouvé que $C = 8$ en procédant dans les deux cas de la même façon.

De même pour le questionnaire P2, les calculs des grandeurs $C = 12\text{ g} + 4\text{ g} \div 2$ et

$G = 2$ kg + 3 kg × 4 ont été ceux causant le plus d'erreurs. Sur 48 élèves, 5 ont trouvé C = 14 g ; 37 ont écrit C = 8 g ; 1 élève a trouvé C = 7 g (12 – 2 = 10 ; 10 + 4 = 14 ; 14 ÷ 2 = 7) ; 1 élève a trouvé C = 16,2 g (16 ÷ 2 = 16,2) ; 1 élève a trouvé C = 24 g (12 + 4 = 16 ÷ 2 = 8 + 16) ; 3 élèves n'ont rien répondu. Pour la grandeur G, 11 élèves ont répondu G = 14 kg ; 31 élèves ont trouvé G = 20 kg ; 3 élèves ont écrit G = 24 kg (2 + 3 = 6 × 4 ou 2 × 3 = 6 × 4) ; 1 élève a trouvé G = 25 kg (4 × 5 = 25) ; 1 élève a trouvé G = 32 kg (2 + 3 = 8 × 4 = 32) ; 1 élève a trouvé G = 17 kg (5 + 12). Donc, 79,2 % des élèves ont calculé C en effectuant les calculs de gauche à droite et 75 % d'entre eux ont fait de même pour le calcul de G. Il faut noter que 87 % des élèves qui ont écrit G = 20 kg, en calculant de gauche à droite, ont trouvé C = 8 g en calculant de la même façon et qu'il semble que le calcul en grandeur ait désarçonné certains d'entre eux, sans doute par manque d'habitude ou de pratique.

Quoi qu'il en soit, cette brève enquête montre avec évidence qu'un enseignement est nécessaire quant à l'apprentissage de tels calculs, ce à quoi semble répondre la notion de priorités opératoires.

Pour cela, les manuels de cinquième proposent d'établir quelques « règles », qu'ils présentent le plus souvent comme des conventions[7] et qu'ils énoncent pratiquement tous de la manière suivante :

> R1 : « Dans une expression **sans parenthèses** ne comportant que des additions et des soustractions, on effectue les opérations **de la gauche vers la droite**. »[8]
>
> R2 : « Dans une expression **sans parenthèses**, les multiplications et les divisions sont **prioritaires** sur les additions et les soustractions.
>
> R3 : « Dans une expression **avec parenthèses**, on effectue en priorité les calculs entre les parenthèses les plus intérieures. [9] »

De cette façon, lorsqu'un élève aura à calculer un nombre comme 2 + 3 × 4, appliquant la règle R2, il pourra écrire 2 + 3 × 4 = 2 + 12 puisque les « multiplications sont prioritaires sur les additions » et que le calcul de la somme 2 + 3 ne peut donc être effectué d'abord.

---

[7] Certains manuels définissent le mot convention. Par exemple, le manuel de 5e de la collection Transmath édité par Hachette la définit ainsi : « C'est une règle de conduite adoptée par un groupe, ici les mathématiciens. »

[8] Il est à noter qu'à la lumière de cette enquête, une règle comme la règle R1 paraît moins s'imposer vus les pourcentages de calculs exacts des nombres B et E.

[9] Mathématiques 5e, *Collection Déclic*, Hachette Livre, 2010.
On trouve des formulations équivalentes dans la plupart des manuels de 5e, le mot "expression" étant parfois remplacé par le mot "calcul" ou par "suite d'opérations" ou par des tournures comme "Pour calculer une expression numérique…".
(Voir : Collection Transmath, Nathan, 2010 ; Collection Myriade, Bordas, 2010 ; Collection Triangle, Hatier, 2010 ; Collection Nouveau Prisme, Belin, 2010 ; Collection Phare, Hachette, 2010…)

II.1. Quelques questions soulevées par un tel enseignement

Un tel enseignement ainsi présenté très succinctement soulève quelques questions dont nous voudrions rapidement rendre compte.

Tout d'abord les formulations choisies indiquent une forme de confusion entre le concept d'opération et celui de calcul, en particulier dans l'expression « on effectue les opérations de gauche à droite ».

> « Il arrive […] toujours, à quelque niveau que ce soit, et plus ou moins rapidement, un moment où il faut procéder à une élucidation essentielle au sens de tout le complexe numérique : celle de la différence entre une opération et un calcul. » (S. BARUK , *Si 7 = 0*)

Rappelons en effet qu'une opération sur un ensemble de nombres, IR par exemple, est une loi de composition interne sur cet ensemble IR, qui à deux nombres réels, leur associe un nombre réel qui peut être leur somme (si l'opération est l'addition), leur différence (si l'opération est la soustraction), leur produit (si l'opération est la multiplication) ou leur quotient (si l'opération est la division et que le deuxième nombre n'est pas nul), puisque seules ces opérations sont étudiées au collège. Cela signifie donc que lorsqu'on écrit le nombre 13 – 7 l'opération soustraction a été effectuée, qu'aux nombres 13 et 7 a déjà été associé leur différence 13 – 7 : le symbole « – » en est en quelque sorte la preuve, montrant ainsi que 13 et 7 sont liés par soustraction et non par une autre relation. Sans ce symbole, nous ne pourrions savoir ce qui relie 13 et 7, si 13 et 7 sont liés par addition, soustraction ou par une autre opération. Le symbole « – » entre 13 et 7 dans l'écriture du nombre 13 – 7 atteste donc bien que l'opération n'est plus à « effectuer » puisqu'elle a déjà été « faite ». C'est pourquoi, lorsque nous écrivons par exemple le nombre 13 – 7 + 5, nous ne pouvons pas « effectuer les opérations de gauche à droite » puisque les symboles « – » et « + » attestent que la soustraction et l'addition ont déjà été faites.

Par contre, le nombre 13 – 7 + 5 peut être calculé, c'est-à-dire que nous pouvons l'écrire sous une autre forme comme 6 + 5 ou 13 – 2 ou bien encore 11, qui est sa forme réduite, ou sous tout autre forme. Nous disons parfois à nos élèves qu'un symbole opératoire comme le symbole « – » est la « cicatrice » de l'opération par métaphore avec l'opération chirurgicale. Ce terme de « cicatrice » leur permet de mieux différencier le concept d'opération et celui de calcul. Il nous semble en conséquence qu'une formulation où il serait dit « on calcule de gauche à droite » aurait été préférable.

Ensuite, ces règles données ci-dessus posent un problème mathématique dans leur expression même puisque, écrites telles quelles, elles ne peuvent être comprises ni comme des conditions nécessaires ni comme des conditions suffisantes. En effet lorsque la règle R1, par exemple, est énoncée ainsi : « on effectue les opérations de gauche à droite », nous ne pouvons savoir s'il faut lire « il faut effectuer les opérations (plutôt les calculs) de gauche à droite » ou plutôt « il suffit d'effectuer les calculs de gauche à droite pour que le calcul soit exact » ? La formulation choisie par les manuels reste imprécise et ne permet pas de trancher. Or, si la règle R1 doit être lue comme une condition nécessaire, elle est fausse puisqu'on peut calculer correctement le nombre $A = 15 - 5 - 2$ de la façon suivante : $A = 15 - 5 - 2 = 15 - 7 = 8$ même si, dans ce cas, les calculs n'ont pas été effectués de gauche à droite. Il ne faut donc pas, nécessairement, « dans une expression **sans parenthèses** ne comportant que des additions et des soustractions, effectuer les opérations (calculs) **de la gauche vers la droite**. » En conséquence, cette règle ne peut être, comprise que comme une condition suffisante, c'est-à-dire qu'elle indique comment il suffit de calculer pour qu'un tel calcul soit exact. Mais, dans ce cas, la règle R1 est impuissante à justifier le calcul du nombre A tel qu'il a été mené ci-dessus, ce qui laisse ce calcul exact sans justification possible et l'enseignant dans une position délicate.

De même pour la règle R3 : si la règle R3 doit être comprise comme une condition nécessaire, elle s'avère fausse car on peut débuter le calcul du nombre $B = 6 \times (14 - 5) + 3 \times 2$ par $B = 6 \times (14 - 5) + 6$ et même le continuer en écrivant $B = 6 \times (14 - 5 + 1)$, sans respecter la règle R3 lue comme une condition nécessaire. Il n'est donc pas nécessaire « dans une expression **avec parenthèses**, d'effectuer en priorité les calculs entre les parenthèses les plus intérieures ». Comme la règle R1, la règle R3 ne peut donc être entendue comme une condition nécessaire : elle ne peut l'être que comme condition suffisante, ce qui la rend, elle aussi incapable de justifier le calcul du nombre B tel qu'il a été conduit plus haut.

Enfin ces règles ont essentiellement un caractère prescriptif et indiquent, comme le mot règle le signifie, ce qui doit être fait dans un cas déterminé [10]. Elles ne semblent pas pouvoir se déduire de connaissances antérieures, rompent ainsi le fil du sens, et ne sont donc pas justifiées, puisqu'elles sont vues comme des conventions arbitraires. Comme on peut lire dans un manuel de cinquième :

> « Comme en navigation fluviale, les priorités dans les calculs sont des conventions, c'est-à-dire que l'on s'est mis d'accord pour que ce soit comme cela. Une convention ne se prouve pas. » (Manuel de 5e, collection Myriade, Bordas, p. 13)

Pourtant d'autres manuels, peut-être sensibles au fait qu'un tel enseignement puissent être senti comme une rupture dans l'édifice hypothético-déductif des mathématiques, semblent tenter de convaincre les élèves que ces règles sont bien valides par l'utilisation de la calculatrice comme les programmes le suggèrent. Mais il est évident que l'usage de la calculatrice ne peut en aucun cas faire office de preuve ni même de « justification » puisque les calculatrices ont été construites pour respecter ces mêmes principes.

---

[10] Rappelons ici la définition du mot "règle" donnée par A. Lalande : « Formule indiquant ou prescrivant ce qui doit être fait dans un cas déterminé. » A. LALANDE, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, P.U.F, 2006

II.2. La question du sens

Malgré les quelques réserves rapidement évoquées plus haut, on peut concéder qu'un tel enseignement puisse permettre à un certain nombre d'élèves, avec un entraînement intensif, de répondre « juste », c'est-à-dire en l'occurrence de calculer exactement dans les cas évoqués précédemment, du moins au moment de cet apprentissage. Mais quel sens peut revêtir pour eux un tel apprentissage ? Que leur permet-il de comprendre ? Comment un telle présentation peut-elle s'articuler avec les connaissances de l'élève sur les nombres, sur les opérations et leur sens, sur tous les concepts arithmétiques élaborés au cours de sa scolarité ?

Pour examiner ces questions, il faut peut-être commencer par nous arrêter un instant sur la signification de l'expression « donner un sens » ou du mot « comprendre ».

Comme le rappelle G. Deniau, dans son ouvrage *Qu'est-ce que comprendre ?* :

> « Comprendre, c'est voir des connexions, et voir des connexions, c'est saisir un sens. Les connexions saisies dans la compréhension sont signifiantes. » (G. DENIAU, *Qu'est-ce que comprendre ?*, p. 27)

Or, comme l'écrit P. Ricœur dans son article Signe et sens du *Dictionnaire de la philosophie* :

> « Pour Émile Benveniste, dans *Problèmes de linguistique générale*, le fonctionnement du langage repose sur deux sortes d'unités irréductibles l'une à l'autre : les unités sémiologiques ou signes, les unités sémantiques, qui se ramènent à une seule sorte, la phrase. Le sens est du côté de la phrase et non du signe. Le sens n'est donc pas une annexe du signifié et du signe. [...] au contraire, le sens de la phrase, que l'on appellerait mieux l'« intenté » que le signifié, est un contenu global de pensée que l'on peut se proposer de dire autrement à l'intérieur de la même langue, ou de traduire dans une autre langue ; alors que le signifié est intraduisible, l'intenté est éminemment traduisible. »
> (P. Ricœur, Signe et sens, pp. 1875-1876)

Ce qui signifie que comprendre quelque chose, lui donner un sens, pourrait se manifester par le fait d'être capable de le dire autrement, de le traduire, de l'expliquer d'une autre manière, avec d'autres mots, à partir de différents points de départ conceptuels ou en mobilisant d'autres représentations sémiotiques, par exemple. [11]

On retrouve en fait ici ce qu'exprime Vygotski dans *Pensée & langage,* en particulier dans le chapitre VI : lorsque qu'un domaine de connaissances est maîtrisé, c'est-à-dire compris, que ces connaissances prennent tout leur sens, ces dernières étant pensées dans une structure de

[11] Cette conception de la compréhension rejoint, dans une certaine mesure, celle exprimée par Wittgenstein dans ces *Remarques philosophiques* : « Nous parlons de la compréhension d'une phrase au sens où la phrase peut être remplacée par une autre qui dit la même chose… » (L. Wittgenstein, *Remarques philosophes, § 531*) ; ou celle de Duval : « Il n'y a pas de compréhension en mathématiques sans la capacité de changer de type de représentation (sémiotique). »
(R. Duval, *La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée*)

généralisation [12] par concepts, la loi d'équivalence des concepts [13] permet l'expression d'une idée de façons extrêmement variées. De plus, l'expression même de cette idée devient, à mesure du développement, de moins en moins dépendante de toute forme particulière de formulation.

> « Au fur et à mesure du développement des rapports de généralité augmente l'indépendance du concept à l'égard du mot, du sens à l'égard de son expression et les opérations portant sur le sens deviennent de plus en plus libres en elles-mêmes et dans leur expression verbale. » (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 389)

C'est sans doute pour cela qu'un enseignant, voulant s'assurer qu'un élève a compris un certain domaine de connaissances et le maîtrise correctement, lui demandera de reformuler de plusieurs manières diverses relations entre concepts de ce domaine de connaissances. De même il pourra lui demander d'expliquer un point particulier de ce domaine, car :

> « « savoir expliquer » c'est être capable d'effectuer un parcours parmi d'autres dans un système de relations entre des concepts en choisissant son point de départ en fonction des questions que se pose l'interlocuteur. » (M. Brossard, *Vygotski. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, p. 136)

À la lumière de ces considérations, il nous semble difficile d'exprimer ce qu'un élève pourrait bien avoir compris, lorsqu'on lui enseigne « les priorités opératoires » à l'aide de telles règles. En effet, puisque comprendre revient à dire autrement, avec d'autres mots, en « choisissant son point de départ », il nous apparaît peu probable qu'un élève, de lui-même, puisse expliquer un quelconque calcul autrement qu'en répétant les règles utilisées dans des formulations proches de celles données plus haut. De plus, la formulation même de ces règles induit une pensée par complexes, c'est-à-dire un mode de généralisation qui s'effectue de proche en proche, suivant une perception « d'aspects » communs, sans le « fil conducteur » des significations, en quelque sorte. La dynamique de ce mode de pensée ne naît pas alors d'une reconnaissance de relations d'après le sens, mais plutôt d'une élaboration de traits d'union entre éléments de ressemblance. L'élève, grâce à la perception de certains symboles opératoires, devra savoir comment organiser son calcul : lorsqu'il percevra le symbole « × » dans le nombre $2 + 3 \times 4$ à calculer, il saura qu'il lui faut calculer d'abord 3×4 sans qu'une quelconque lecture du nombre lui soit réellement nécessaire. Son attention sera toute entière accaparée par cette reconnaissance de symboles particuliers (parenthèses, symboles opératoires) sans se soucier de lire le nombre à calculer, à se demander si c'est une somme ou un produit, s'il pourrait s'écrire autrement par exemple. Cet enseignement semble donc figer la dynamique de pensée dans une pratique de type « mécanique », renforçant

---

[12] Un structure de généralisation est un mode de généralisation dans un certain domaine de pensée. Vygotski distingue plusieurs structures de généralisation : pensée syncrétique, pensée par complexes, par préconcepts, par concepts.

[13] « La substance de cette loi est que *tout concept peut être désigné à l'aide d'autres concepts selon un nombre infini de procédés*. » (L. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 385)

l'idée que tout calcul est mécanique, alors qu'un calcul n'est qu'un changement de forme du nombre calculé en vue de répondre à une question qui n'est pas toujours celle de la forme réduite d'un nombre.

En outre, puisqu'un tel enseignement est conçu comme un préalable « au calcul algébrique », il nous est difficile d'entrevoir comment les élèves pourraient édifier leurs concepts algébriques sur une telle pratique du calcul fondée en grande partie sur la vision et qui semble s'exempter d'une nécessaire lecture du nombre, le mot lecture étant compris comme une activité qui permet de « donner une signification à des signes » [14]. D'ailleurs certains auteurs de manuels, comme les concepteurs des programmes des collèges, semblent ressentir cette difficulté, car ils proposent des activités ou des exercices sous la rubrique « vocabulaire » où il s'agit de :

> « traduire chaque phrase par une expression mathématique : 1) A est la somme de treize et du produit de trois par deux… » (Collection Déclic, éd. Hachette, 2008, p. 19.)

ou de :

> « traduire, par une phrase, chaque expression : **a.** 27 – 3 × 4… » (Collection Myriade, éd. Bordas, 2008, p. 15.)

rejoignant ainsi dans une certaine mesure une recommandation des concepteurs des programmes concernant les expressions algébriques :

> « La prise en compte de l'aspect « structural » d'une expression dans l'enseignement est moins « visible » pour les élèves que l'aspect « procédural ». […] Plusieurs activités peuvent aider les élèves à faire la distinction entre ces deux aspects d'une expression algébrique : • La description en langue naturelle d'une expression algébrique conduit à la considérer sous son aspect « structural » : par exemple, énoncer que $(3x – 1) (x^2 + 2)$ est le produit d'une différence et d'une somme… »
> (Documents d'accompagnement, *Du numérique au littéral*, Ministère de l'Éducation nationale, 2008)

Il s'agit bien dans ce type d'activités ou d'exercices d'apprendre à lire des nombres, ce que l'utilisation des règles R1, R2, R3 n'enseignent pas, mais cette lecture semble s'effectuer en quelque sorte en marge, séparée des problèmes de calcul, comme si savoir lire un nombre ne permettait pas de le calculer. On pourrait à cet égard se demander si l'adoption par les concepteurs des programmes des thèses de Sfard qui, s'appuyant sur une analyse historique de l'algèbre, affirme l'« antériorité de l'approche opérationnelle sur l'approche structurale des concepts mathématiques » [15], ne conduit pas à favoriser l'aspect procédural des expressions numériques qui peut être à l'origine de nombreuses erreurs tant en calcul chiffral que littéral :

---

[14] Voir Une activité en classe de cinquième, *Éléments 0*, IREM de Toulouse, pp. 29-32.

[15] Bardini, C., *Le rapport au symbolique algébrique : une approche didactique et épistémologique*.

« Ainsi, le registre usuel favorise la conception procédurale, et à défaut de la conception structurale, elle peut être à l'origine des erreurs typiques liées à la lecture linéaire de gauche à droite (par exemple : $3 + 2 \times 5 = 5 \times 5 = 25$ ou $7 - 3(x + 1) = 4(x + 1)$). » (H. Chaachoua, J. Trgalova, *Représentation sous forme d'arbre d'expressions algébriques : un scénario pédagogique avec le logiciel Aplusix*)

III. Une enquête

Pour mieux approcher comment nos élèves lisaient le nombre $G = 2 + 3 \times 4$ ou la grandeur $G = 2$ kg + 3 kg × 4 et comment ils les calculaient, nous leur avons proposé deux problèmes à environ deux semaines d'intervalle. Pour cela, nous leur avons distribué chaque fois une feuille où était écrit le problème, sans préparation, sans les prévenir, chaque fois au moment où nous étudiions des notions géométriques Nous leur avons posé les problèmes suivants :

P3. Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.
a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.
b) Calculer la masse totale du sac.

P4. Soit la grandeur G = 2 kg + 3 kg × 4. Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur G est solution. Résoudre ce problème.

Il faut préciser que jusque-là nous avions étudié l'écriture décimale des nombres décimaux, les grandeurs plus en détail que lors de l'enquête précédente, l'addition et la soustraction et défini le calcul comme changement de forme d'un nombre lié à une intention. Nous avions à cette occasion expliqué la différence entre opérer et calculer pour qu'ils puissent comprendre ce que signifiait pour nous l'expression « sans calculer ». Nous n'avions pas étudié la multiplication.

Pour le problème P3, pour la question b), le calcul de la masse totale du sac, nous avons obtenu :

Réponses	Effectifs	Pourcentages
14 kg ou 14	41	85,4 %
9 kg (2 + 3 + 4)	4	8,3 %
11 (2 + 3 + 3 + 3)	1	2,1 %
12 kg (2 + (4 × 3)) ou 15 (12 + 3)	2	4,2 %

Il est à noter que les deux élèves qui ont répondu respectivement 12 kg ou 15 ont raisonné correctement puisqu'ils ont répondu à la question a) "2 + (4 × 3)" pour l'un et "2 kg + 4 paquets de 3 kg" pour l'autre. Mais ils ont commis une erreur de calcul, l'un écrivant 12 kg = 2 + (4 × 3) et l'autre écrivant 4 × 3 = 12 et 12 + 3 = 15. On peut donc considérer que près de 90 % des élèves résolvent correctement ce problème.

Pour la question a) du problème P3, nous avons obtenu :

Réponses	Effectifs	Pourcentages
2 + 4 × 3 ou 2 kg + 4 × 3 ou 2 kg + 4 × 3 kg	21	43,8 %
4 × 3 kg + 2 kg	2	4,2 %
2 kg + (4 × 3 kg) ou 2 + (4 × 3)	7	14,6 %
(4 × 3) + 2	3	6, 2 %
Pas de réponse ou réponse incorrecte	15	31, 2 %

Nous avons donc 68,8 % des élèves qui répondent correctement à la question a), c'est-à-dire qui sont capables d'écrire exactement, sans calcul, à l'aide d'expressions diverses, la masse ou la mesure de la masse du sac plein. De plus, 43, 8 % des élèves expriment cette masse ou cette mesure de la masse en écrivant l'expression du nombre G (2 + 4 × 3) ou de la grandeur G (2 kg + 3 kg × 4) [16] que nous leur avions demandé de calculer dans la première enquête. Il est même remarquable de constater que, sur les 21 élèves qui donnent la réponse 2 + 4 × 3 ou 2 kg + 4 × 3 ou 2 kg + 4 × 3 kg, 17 d'entre eux avaient mal calculé G = 2 kg + 3 kg × 4 et 12 d'entre eux avaient mal calculé G = 2 + 4 × 3. Nous nous attarderons plus loin sur ce point qui méritera quelques éclaircissements et une tentative d'explication.

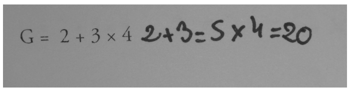
[16] Il faut remarquer qu'aucun élève n'a écrit 2 kg + 3 kg × 4 mais plutôt 2 kg + 4 × 3 kg , les notions de multiplicande et de multiplicateur n'étant pas connues des élèves.

Mais regardons auparavant, les réponses obtenues au problème P4 :

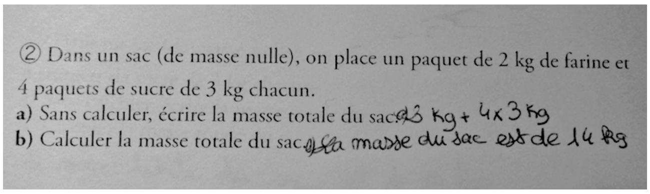
Réponses	Texte cohérent avec l'énoncé proposé	Texte cohérent avec la réponse fausse	Texte incohérent	Pas de texte	
14 kg ou 14	8	0	1	0	9 (18,8%)
20 kg ou 20	0	20	6	3	29 (60,4%)
Pas de réponse	2	0		4	6 (12,5%)
3kg ou 10 kg ou 26 kg ou 32 €	0	0	3	1	4 (8,3%)
	10 (20,8%)	20 (41,7%)	10 (20,8%)	8 (16,6%)	48 (100%)

Il faut noter ici que seul 20,8 % proposent un énoncé qui suppose une lecture correcte de la masse G = 2 kg + 3 kg × 4, ce qui est à comparer avec les 22,9 % qui la calculent correctement en dehors de tout contexte autre que celui du calcul « pur ». Mais seuls 4 élèves ou 8,3 % des élèves calculent correctement G et écrivent à la fois un énoncé cohérent avec la solution G = 2 kg + 3 kg × 4. Cela semble indiquer que la lecture d'un nombre ou plus précisément d'une valeur d'une grandeur est encore souvent dépendante du contexte dans lequel cette valeur intervient, montrant par là-même que la lecture de tels nombres ou grandeurs n'est pas maîtrisée par la plupart des élèves. Ceci n'est en fait guère surprenant puisque cet apprentissage n'a pas encore eu lieu. Mais cela ne signifie pas pour autant qu'ils soient incapables de toute lecture, comme le montrent les réponses au problème P3. Pour préciser encore davantage ce point, il aurait sans doute été opportun de s'entretenir avec les élèves individuellement pour tenter de cerner ce qui, dans ces variations de contextes, aurait pu induire ces lectures de nombres ou de grandeurs différentes, contradictoires en apparence, et ces calculs erronés. Mais, dans le cadre normal d'une classe de collège, cela n'a pas été possible.

III.1. Quelques réponses d'élèves



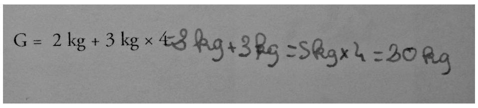
$G = 2 + 3 \times 4$ $2+3=5\times4=20$



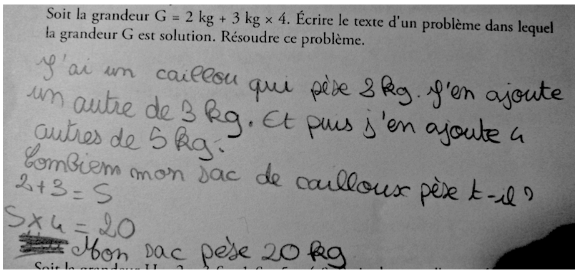
② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.

a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac. 3 kg + 4x3 kg

b) Calculer la masse totale du sac. la masse du sac est de 14 kg



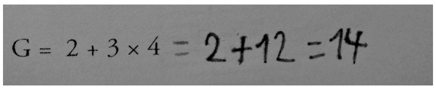
$G = 2\text{ kg} + 3\text{ kg} \times 4$ 3 kg+3 kg = 5 kg x 4 = 20 kg



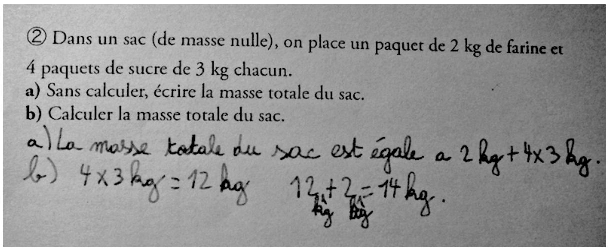
Soit la grandeur G = 2 kg + 3 kg × 4. Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur G est solution. Résoudre ce problème.

J'ai un caillou qui pèse 3 kg. J'en ajoute un autre de 3 kg. Et puis j'en ajoute 4 autres de 5 kg.
Combiem mon sac de cailloux pèse t-il ?
2+3 = 5
5x4 = 20
Mon sac pèse 20 kg

Réponses de l'élève E1 aux 4 questions P1, P2, P3, P4.



$G = 2 + 3 \times 4 = 2+12 = 14$

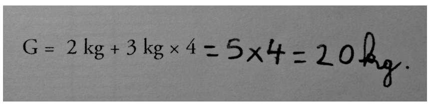


② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.

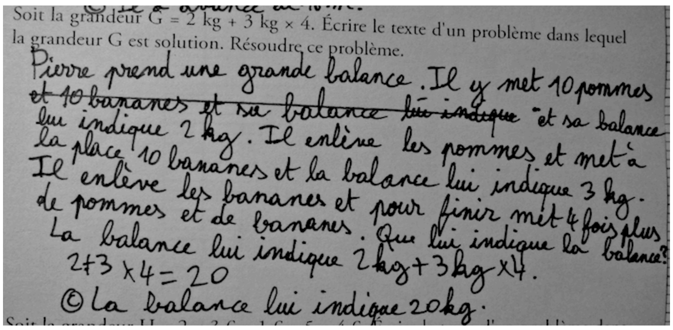
a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.

b) Calculer la masse totale du sac.

a) La masse totale du sac est égale a 2 kg + 4x3 kg.
b) 4x3 kg = 12 kg   12 kg + 2 kg = 14 kg.



$G = 2\text{ kg} + 3\text{ kg} \times 4 = 5\times4 = 20\text{ kg}.$



Soit la grandeur G = 2 kg + 3 kg × 4. Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur G est solution. Résoudre ce problème.

Pierre prend une grande balance. Il y met 10 pommes ~~et 10 bananes et sa balance lui indique~~ et sa balance lui indique 2 kg. Il enlève les pommes et met à la place 10 bananes et la balance lui indique 3 kg. Il enlève les bananes et pour finir met 4 fois plus de pommes et de bananes. Que lui indique la balance ?
La balance lui indique 2 kg + 3 kg x4.
2+3 x4 = 20
© La balance lui indique 20 kg.

Réponses de l'élève E2 aux 4 questions P1, P2, P3, P4.

G = 2 + 3 × 4 = 2 + 3 = 5 / 5 × 4 = 20

② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.
a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.
b) Calculer la masse totale du sac.

a) ~~la~~ la masse totale du sac est 2 kg + (4 × 3 kg).

b) 4 × 3 kg = 12 kg / 12 kg + 2 kg = 14 kg.

G = 2 kg + 3 kg × 4 = 3 × 4 = 12 / 12 kg + 2 kg = 14 kg.

Soit la grandeur G = 2 kg + 3 kg × 4. Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur G est solution. Résoudre ce problème.

Dans un parc, il y a 2 bassin dans le 1er bassin on peu mettre 2 kg d'eau par min. dans le 2ième bassin on peu mettre 3 kg d'eau par min. On les laisse ouvert 4 mins. Combien de kg d'eau est-je gaspillé ?

2 kg + 3 kg = 5 kg × 4 = 20.

Réponses de l'élève E3 aux 4 questionsP1, P2, P3, P4.

G = 2 + 3 × 4   2 + 3 = 5   5 × 4 = 20

② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.
a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.
b) Calculer la masse totale du sac.

a) 2 kg + 3 × 4

b) 2 + 3 × 4 = 14

G = 2 kg + 3 kg × 4

3 × 4 = 12
12 + 2 = 14

14 kg | ou | 20 kg

2 + 3 = 5
5 × 4 = 20

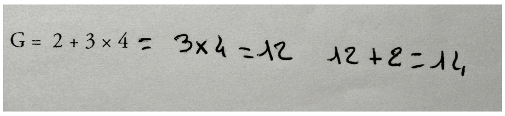
Soit la grandeur G = 2 kg + 3 kg × 4. Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur G est solution. Résoudre ce problème.

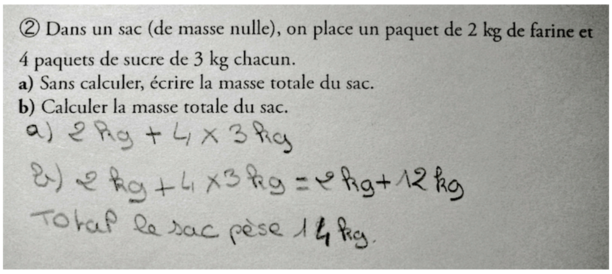
Un sac de farine pèse 2 kg. On rajoute 4 sac de 3 kg sur la balance. Combien indiquera la balance ?

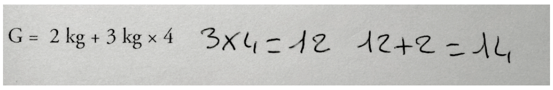
Elle indiquera 2 kg + 3 kg × 4 donc 14 kg

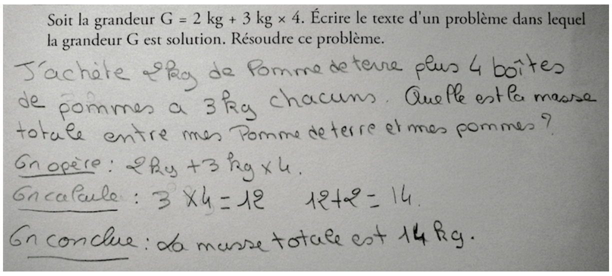
2 kg + 3 kg × 4 = 14 kg

Réponses de l'élève E4 aux 4 questionsP1, P2, P3, P4.


G = 2 + 3 × 4 = 3×4 = 12   12 + 2 = 14


② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.
a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.
b) Calculer la masse totale du sac.
a) 2 kg + 4 × 3 kg
b) 2 kg + 4 × 3 kg = 2 kg + 12 kg
Total le sac pèse 14 kg.


G = 2 kg + 3 kg × 4   3×4 = 12   12+2 = 14


Soit la grandeur G = 2 kg + 3 kg × 4. Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur G est solution. Résoudre ce problème.
J'achète 2kg de Pomme de terre plus 4 boîtes de pommes a 3kg chacuns. Quelle est la masse totale entre mes Pomme de terre et mes pommes ?
On opère : 2kg + 3 kg × 4.
On calcule : 3 × 4 = 12   12+2 = 14.
On conclue : la masse totale est 14 kg.

Réponses de l'élève E5 aux 4 questionsP1, P2, P3, P4.

Ces travaux d'élèves ici exposés montrent la diversité de leurs réponses et leurs cohérences semblent parfois difficile à établir, du moins de prime abord. Par exemple, l'élève E1 calcule « de gauche à droite » le nombre et la masse G dans les exercices P1 et P2 ; il lit incorrectement la masse G = 2 kg + 3 kg × 4 dans l'exercice P4 ; mais, dans l'exercice P3, il écrit 2 kg + 4 × 3 kg, lorsqu'on lui demande d'écrire sans calcul la masse du sac plein et calcule cette masse correctement ; pourtant, il avait calculé G = 2 kg + 3 kg × 4, qui est exprimé presque de façon identique (3 kg × 4 est remplacé par 4 × 3 kg), incorrectement dans l'exercice P2.

L'élève E2 calcule correctement le nombre G mais pas la masse G et, comme l'élève E1, résout correctement l'exercice P3, en écrivant bien que la masse totale du sac plein est 2 kg + 4 × 3 kg. Mais il lit mal G = 2 kg + 3 kg × 4 dans l'exercice P4.

L'élève E3 calcule mal le nombre G mais bien la masse G = 2 kg + 3 kg × 4. Mais, dans l'exercice P4, quand il s'agit de lire de nouveau la masse G, exprimée exactement de la même manière que dans l'exercice P2, il la lit incorrectement. Par contre, il réussit l'exercice P3.

L'élève E4 se trompe dans les calculs du nombre G et de la masse G. Par contre, il réussit les exercices P3 et P4, montrant ainsi une lecture correcte de la masse G = 2 kg + 3 kg × 4 qu'il n'a pas su calculer précédemment et la calcule bien.

L'élève E5 répond correctement à tous les exercices.

III.2. Une tentative d'interprétation

Il nous faut maintenant revenir sur le fait, apparemment quelque peu contradictoire, que, bien qu'une grande majorité des élèves ne sachent pas calculer la masse G = 2 kg + 3 kg × 4 (22,9 % de calculs justes), ils soient capables, à partir d'un texte de problème (P3), d'écrire la masse G comme solution du problème (43,8 % des élèves) et de la calculer correctement, l'expression de cette masse ne différant que de peu avec celle donnée sans problème préalable. Pour cela, il nous semble que les notions de concepts quotidiens et de concepts scientifiques développées par Vygotski peuvent nous aider à mieux appréhender ce phénomène. Dans le chapitre 6 de *Pensée & langage*, il développe la distinction entre concepts quotidiens et concepts scientifiques, ce qui permet de mieux comprendre la place primordiale qu'il assigne à l'école dont le rôle essentiel est l'enseignement d'un système de connaissances scientifiques.

Par concepts spontanés, Vygotski entend des formes de pensés qui ne se développent pas dans le cadre institutionnel de l'enseignement, mais qui se construisent dans le processus de l'activité pratique de l'enfant et dans sa communication immédiate avec l'environnement. Ils se forment donc dans l'expérience de l'enfant, dans le contact direct avec le monde ce qui explique leur faible niveau d'abstraction.

Au contraire, les concepts scientifiques sont des généralisations de généralisations et la référence au monde qu'ils opèrent n'est jamais immédiate et directe mais toujours médiatisée par d'autres concepts, en particulier par des concepts quotidiens.

> « On peut dire que l'assimilation des concepts scientifiques s'appuie autant sur les concepts élaborés dans le processus de l'expérience propre de l'enfant que l'étude d'une langue étrangère s'appuie sur la sémantique de sa langue maternelle. De même que ce dernier cas implique l'existence d'un système déjà développé de significations de mots, de même dans le premier cas la maîtrise d'un système de concepts scientifiques suppose un tissu conceptuel déjà largement élaboré, qui s'est développé grâce à l'activité spontanée de la pensée enfantine. Et, tout comme l'assimilation d'une nouvelle langue ne s'effectue pas à l'aide d'une relation nouvelle avec le monde des objets ni par la répétition d'un processus de développement déjà accompli une fois mais se fait par l'intermédiaire d'un autre système verbal, assimilé auparavant, qui s'interpose entre la nouvelle langue que l'enfant assimile et le monde des choses, de même l'assimilation d'un système de concepts scientifiques n'est possible que par un rapport également médiatisé avec le monde des objets, que par l'intermédiaire d'autres concepts, élaborés au préalable. Et une telle formation des concepts nécessite de tout autre actes de pensée, liés à un libre mouvement dans le système des concepts, à la généralisation des généralisations déjà formées, à un maniement plus conscient et plus volontaire des anciens concepts. » (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 297)

Les concepts scientifiques ne peuvent exister qu'à l'intérieur d'un système de concepts, ce qui n'est pas le cas des concepts spontanés.

> « […] *la caractéristique la plus décisive qui distingue les concepts spontanés des concepts non spontanés, en particulier scientifiques, c'est qu'ils se présentent en dehors d'un système.* »
> (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 318)

Leur développement suit en quelque sorte une voie opposée à celui des concepts quotidiens. Si les concepts quotidiens se développent comme happés par des champs de forces que les concepts scientifiques rendent possibles, les concepts scientifiques se développent en prenant pour ainsi dire racine dans le terreau des concepts quotidiens.

> « Si l'on désigne les propriétés du concept qui viennent à maturité plus tôt, qui sont plus élémentaires, plus simples, comme des propriétés inférieures et celles plus complexes et liées à un maniement conscient et volontaire, comme des propriétés supérieures, on pourrait dire conventionnellement que *le concept spontané de l'enfant se développe de bas en haut, des propriétés plus élémentaires et inférieures aux propriétés supérieures, alors que les concepts scientifiques se développent de haut en bas, des propriétés plus complexes et supérieures aux propriétés plus élémentaires et inférieures.* »
> ((L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 368)

À la lumière de ces deux notions essentielles ainsi rapidement présentées, nous pouvons peut-être tenter un début d'explication au phénomène évoqué plus haut : en effet, lorsqu'on demande à un élève de sixième de calculer directement la masse G = 2 kg + 3 kg × 4, calcul nouveau pour lui, il ne peut le rattacher à quelque concept quotidien que ce soit, cette écriture ne pouvant être mise en relation avec aucun contexte qui permettrait qu'elle prenne sens pour lui. On pourrait dire en quelque sorte que cette écriture est trop « abstraite » pour lui, c'est-à-dire coupée, sans relation possible avec ses concepts quotidiens. Et, devant cette absence de sens, il calcule comme il en a le plus l'habitude, de gauche à droite. Par contre, le problème P3 mobilise ses concepts quotidiens par le contexte qu'il précise. En lien avec ces derniers, l'élève peut alors plus aisément écrire la masse du sac plein, à peu près de la même manière qu'elle lui était proposée dans le problème P2, les signes écrits prenant sens pour lui par leur relation même avec le contexte. Et dans ces conditions, le calcul devient d'une certaine manière « naturel ». Il est d'ailleurs à noter qu'aucun des élèves qui donnent une expression correcte de la masse ne la calcule fautivement. En schématisant un peu, on pourrait affirmer que les significations circulent mieux dans le sens concepts quotidiens / concepts scientifiques que dans le sens concepts scientifiques / concepts quotidiens, les concepts scientifiques nécessaires à la lecture de la masse G = 2 kg + 3 kg × 4 manquant pour ainsi dire de "chair" pour que le sens de cette grandeur émerge et, en conséquence, la possibilité de son calcul. Cette remarque nous paraît importante et nous devrons sans aucun doute en tenir compte quand nous aurons à imaginer des séquences d'activités pour nos élèves.

IV. Une autre proposition d'enseignement

Devant les difficultés que pose l'enseignement habituel des priorités, conjuguées à celles qu'occasionne celui de l'algèbre élémentaire, nous nous sommes posé la question de savoir comment concevoir et organiser un enseignement qui permettrait d'atténuer ces obstacles au collège. Sans entrer dans les détails, nos recherches et nos expérimentations en classe nous ont tout d'abord convaincus que l'enseignement du calcul littéral ne pouvait être abordé qu'après avoir structuré le plus solidement possible les concepts de nombre, d'opération, de calcul, d'égalité, entre autres. Elles nous ont aussi conduits à penser qu'aborder la notion de nombre, de son écriture et de sa lecture, à partir des concepts de grandeurs mesurables et de leur mesure permettait aux élèves de « garder le sens » en quelque sorte, puisque le concept de grandeur mesurable était fortement ancré dans leur expérience quotidienne et constituait en cela un terreau fertile pour enraciner les notions de nombre, d'opération, de calcul étendues aux nombres, même si ces concepts de grandeur et de mesure étaient encore pensés comme des complexes au sens de Vygotski. La séquence d'activités relatée dans l'article *Des grandeurs aux nombres* de cette même brochure a été conçue dans ce sens.

C'est d'ailleurs l'activité 1 de cette séquence qui a initié notre travail sur les grandeurs mesurables et les nombres au cours de l'année de sixième. Ce travail [17], dont nous n'indiquerons que les grandes lignes, s'est poursuivi par des activités [18] sur des grandeurs mesurables ou des nombres où les concepts d'opération, de calcul, d'égalité étaient mobilisés, afin d'en permettre une structuration plus systématique. Cela nous a amené à nous poser la question de la signification plus particulièrement des concepts d'opération, de calcul et d'égalité. Nous avons ainsi été conduits, au cours de ces activités, à tenter « définir » le calcul sur les grandeurs mesurables ou sur les nombres [19], c'est-à-dire d'essayer d'en circonscrire le sens, insistant sur le fait qu'un calcul est toujours un changement de forme de la grandeur ou du nombre, ce changement répondant à une intention soit d'obtenir une forme plus adaptée au problème dans lequel la grandeur ou le nombre intervient, soit une « forme réduite », qui correspond à la forme dite « achevée » du calcul. Dans un même temps, nous avons travaillé la notion d'opération, vue comme une action sur deux grandeurs mesurables ou deux nombres, elle aussi répondant, le plus souvent, à une intention, de trouver une grandeur ou un nombre solution d'un problème, dans diverses situations. Il n'était en effet pas question de définir mathématiquement une opération comme loi de composition interne en classe de sixième. Ce travail nous a permis de distinguer clairement le moment où nous devions opérer et celui où nous devions calculer, le calcul se réalisant toujours sur des grandeurs mesurables ou des nombres résultant d'opérations sur d'autres grandeurs ou nombres, l'antériorité de ces opérations étant marquées par les « cicatrices » des

---

[17] Ce travail a été mené dans une ou deux classes de sixième, de façon voisine à celle décrite ici, durant les années scolaires 2008-2009, 2009-2010, 2010-2011 et 2011-2012.

[18] Toute cette étude s'est effectuée au travers d'activités de verbalisation orale et écrite, recherchées en groupes de deux ou trois élèves, conçues sur la notion de dialogisme tirée des écrits de Bakhtine, Voloshinov et Medvedev, dans un esprit analogue à celui décrit dans l'article *Des grandeurs aux nombres* de cette même brochure auquel nous renvoyons.

[19] Quelques réflexions sur le calcul, *Éléments 1*, IREM de Toulouse, pp. 4-18.

opérations effectuées que sont les symboles opératoires. Et nous avons demandé aux élèves, lors de la rédaction de solutions de problèmes de distinguer ces deux moments de la résolution. Par exemple, nous avons proposé, en fin de premier trimestre, l'énoncé suivant à nos classes de sixième :

Sur un marché, j'achète 2,5 m de tissu à 6 € le mètre et 2 bobines de fil à 3,5 € l'une.

Après un bref examen des questions que l'on pouvait se poser à la lecture d'un tel énoncé et auxquelles on pouvait répondre, sont apparues trois questions pour les élèves :

- Quel est-le prix des 2,5 m de tissu ?
- Quel est le prix des deux bobines de fil ?
- Quel est le prix total ?

Lors de la rédaction d'une solution, nous avons donc fini par écrire, après quelques débats, que nous pouvions obtenir le prix du tissu par multiplication, c'est-à-dire que le prix du tissu était 6 € × 2,5, marquant ainsi le moment de l'opération. Il est à noter que, dans un premier temps, des élèves ont considéré qu'une telle écriture était d'une certaine façon « incorrecte », parce que « ce n'était pas fini », ce qui a occasionné des discussions intenses, cette écriture restant pour certains élèves celle d'une « opération » et non d'une somme d'argent. D'autres élèves ont préféré l'écriture 2,5 × 6 € que nous avons acceptée : cela nous a permis de rappeler que « 2 fois 3 » (3 + 3) et « 2 multiplié par 3 » (2 + 2 + 2) ne signifiaient pas la même chose mais étaient des nombres égaux. Dans certaines classes, cette même écriture a soulevé d'autres interrogations, des élèves se demandant où étaient passés les « mètres » dans l'écriture 6 € × 2,5. Nous avons alors été obligés de préciser que le prix du tissu devait s'écrire plus précisément 6 €/m × 2,5 m, mais sans insister sur cette dernière écriture, disant en quelque sorte que d'une certaine manière la première expression « suffisait ». Ainsi, nous avons également écrit que le prix des deux bobines étaient de 3,5 € × 2. Puis nous sommes passés au calcul, demandant aux élèves dans un premier temps d'écrire ce mot « calcul » sur leur cahier, avant de l'effectuer.

Pour la question « Quel est le prix total ? » nous avons fini par écrire :

Le prix total est 6 € × 2,5 + 3,5 € × 2 .

Calcul : 6 € × 2,5 + 3,5 € × 2 = 15 € + 7 € = 22 €.

Ou, si le calcul s'effectuait en euros, 6 × 2,5 + 3,5 × 2 = 15 + 7 = 22.

Nous avons ainsi pu introduire des écritures de grandeurs mesurables ou de mesures de ces grandeurs comportant plusieurs symboles opératoires.

Ces activités se sont poursuivies tout au long de l'année, sur des problèmes de plus en plus complexes, faisant intervenir les quatre opérations. Elles se sont également accompagnées d'autres types d'activités variées parfois plus théoriques, et, en particulier, de problèmes, qui, à partir d'expressions de grandeurs mesurables ou de nombres, conduisaient à l'écriture d'énoncés de problèmes en langue naturelle. Par exemple, au troisième trimestre de la classe de sixième, nous avons pu soumettre l'énoncé suivant à nos élèves :

> Soit la longueur 4m × 5 + 3m ÷ 2. Écrire le texte d'un problème où cette longueur serait solution du problème posé.

Il est à noter que cet exercice n'a guère posé de difficultés à plus de 50 % des élèves durant les quatre années où ce travail a été expérimenté, ce taux dépassant 70 % lors de certaines années. La même proportion d'élèves a été capable en fin d'année de sixième de résoudre correctement des problèmes du type :

> On remplit à moitié 8 verres d'une contenance de 6 cl avec une bouteille d'eau de 75 cl. Sans aucun calcul, écrire le volume d'eau qui reste dans la bouteille. Sans aucun calcul, écrire la mesure du volume restant dans la bouteille en cl. Calculer cette mesure.

Ou encore :

> Sur un marché, j'achète 0,350 kg d'olives à 12,80 € le kg et 2,4 kg d'oranges à 1,9 € le kg. Je donne un billet de 20 €. Combien va-t-on me rendre ?

Il faut ici remarquer que, pour ce dernier problème, nous avons rencontré, à plusieurs reprises, comme expression de la somme rendue, l'écriture 0,35 × 12,8 € + 2,4 × 1,9 € – 20 €. Le calcul écrit qui suivait aboutissait à l'expression 9,04 € – 20 € qui était égalée à 10,96 €, ce qui est la somme exacte rendue. Cela semble montrer que l'aspect chronologique des actions représentées dans ce problème étaient encore présentes à l'esprit de l'élève, l'expression de cette somme suivant d'une certaine façon strictement l'action : j'achète les olives puis les oranges et finalement je paie en donnant un billet de 20 €. La solution paraît donc encore fortement liée à la perception de la situation concrète, même si le début d'un processus d'abstraction est identifiable. Le concept de différence semble encore pensé comme un pseudo-concept au sens de Vygotski.

V. Conclusion

Il serait trop long de présenter l'ensemble des activités effectuées sur ce sujet, surtout dans le cadre d'un article. Ce serait même précisément impossible puisque nous n'avons effectué aucun enregistrement video ou audio d'une quelconque séance et qu'un certain nombre de ces activités ont émergé de discussions durant les cours, « bricolées » dans l'instant, dictées par des questions d'élèves, souvent inattendues et imprévisibles [20]. Mais ce travail mené tout au long de l'année, durant plusieurs années scolaires, nous a semblé porter ses fruits, même si une enquête plus approfondie et plus rigoureuse aurait été nécessaire. De façon générale, nous avons pu observer que la plupart des élèves qui avaient suivi un tel enseignement en classe de sixième, n'ont guère montré de difficultés quand, en cinquième, la question des priorités opératoires s'est posée. Plus précisément, selon les classes et les années scolaires, entre 30 % et 40 % des élèves que nous avions eus en sixième, ont montré, dès le début de la séquence sur les calculs en cinquième, qu'ils étaient capables de lire et d'écrire des nombres qui s'écrivaient à l'aide de plusieurs symboles opératoires et de les calculer correctement. Pour les autres, des activités en partie analogues à celles exposées dans cet article ont été proposées, activités qui rappelaient comment s'écrivent et se lisent des nombres dans l'écriture desquels apparaissent plusieurs symboles opératoires et des parenthèses parfois. Ces activités visaient en particulier à souligner la « cohérence » de ces écritures avec les connaissances antérieures et à montrer que tout calcul nécessite une lecture attentive du nombre à calculer avant toute action de calcul, lecture essentielle qui, une fois effectuée, dépouille en quelque sorte le calcul de la plupart de ses difficultés. Dans toutes nos classes de cinquième, nous avons constaté, qu'après une à deux semaines de ce travail succinctement décrit, entre 60 % et 80 % des élèves, selon les classes, [21] calculaient correctement des nombres comme $7 + 3 \times 8$ ou $(8 - 3) \times 4,5 + 2$ sans qu'aucune « règle de priorité » n'est été énoncée. Il faut aussi préciser que parmi ceux qui ont échoué à calculer de tels nombres, se trouvaient une majorité d'élèves qui, ayant découvert les « règles de priorités » exposées plus haut, soit en feuilletant leur manuel, soit par un parent, soit à l'étude du soir, voulaient coûte que coûte les appliquer sans se donner la peine de lire le nombre à calculer.

Ces résultats mériteraient certes confirmation. Mais ils semblent montrer qu'un enseignement des priorités opératoires est possible, sans avoir recours à ces règles habituelles qui ne vont pas sans poser de nombreux problèmes, en particulier celui de rendre la construction de certains concepts mobilisés dans le calcul littéral incertaine.

---

[20] Faire cours se fait en cours, durant le cours, et non avant. Préparer un cours ne consiste peut-être qu'à tenter d'être « prêt » pour l'émergence de questions que seul le cours « en cours » révèlera, si l'on favorise la parole de l'élève et qu'il peut ou sait s'en saisir.

[21] Pour établir ces statistiques, nous nous sommes appuyés sur les évaluations effectuées en classe, dans le cadre « normal » d'un cours de mathématiques au collège, après les séances d'enseignement sur le sujet. Il faut noter que ces pourcentages de réussite ont baissé, sensiblement de moitié, à la fin de l'année, lors d'une évaluation annuelle.

Références bibliographiques

BARDINI, C. (2003), *Le rapport au symbolique algébrique : une approche didactique et épistémologique*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

BARUK, S. (2004), *Si 7 = 0*, Paris, Odile Jacob.

BOURDIER-SAVIOZ F. (2008), *L'erreur n'est pas une faute*, Paris, L'Harmattan.

BROSSARD, M. (2004), *VYGOTSKI. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires du Septentrion.

CHAACHOUA, H., TRGALOVA, J. (2009), Représentation sous forme d'arbre d'expressions algébriques : un scénario pédagogique avec le logiciel Aplusix, *EMF*, 6-10 avril 2009, Dakar (Sénégal).

DENIAU, G. (2008), *Qu'est-ce que comprendre ?*, coll. Chemins Philosophiques, Paris, Vrin.

DUVAL, R. (2007), La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée, *Conversion*, coll. Du mot au concept, Grenoble, P.U.G.

FRIEDRICH, J. (2010), *Lev Vygotski : médiation, apprentissage et développement*, Genève, Carnets des sciences de l'éducation, Université de Genève.

LALANDE, A. (2006), *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Paris, PUF.

RICŒUR, P. (2006), Signe et sens, *Dictionnaire de la philosophie*, Paris, Universalis.

SFARD, A. (1991). On the dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics 22*(1), 1-36.

TODOROV T. (1981), *Mikhail Bakhtine, le principe dialogique*, Paris, Seuil.

VYGOTSKI, L. S. (2003), *Conscience, inconscient, émotion*, Paris, La Dispute.

VYGOTSKI, L. S. (1997), *Pensée & langage*, Paris, La Dispute.

WITTGENSTEIN, L. (2004), *Recherches philosophiques*, Paris, Gallimard.