

LECTURES D'ERREURS COMMUNES

Ceci est le compte rendu d'un atelier d'un de nos stages de formation continue intitulé "Analyse de situations didactiques en mathématiques au collège" qui a eu lieu durant l'année scolaire 2004-2005.

I. Idée “à la base” de cet atelier

On peut multiplier les observations qui permettent de vérifier que des erreurs en mathématiques sont renouvelées sur des “copies” d’élèves, indépendamment du lieu, du milieu socio-professionnel familial, de l’année, de l’établissement, par des élèves dont les bulletins scolaires peuvent être bien différents.

Il n’est donc pas illégitime d’émettre les hypothèses suivantes :

- Ces types d’erreurs caractérisent peut-être des similitudes de contextes didactiques systémiques, bien davantage que des capacités individuelles d’élèves.
- Les élèves qui écrivent ces erreurs suivent des “logiques” procédurales, identifiables, implicites, et “sues” parce qu’elles ont pu paraître efficaces.
- Ces erreurs donnent des indices d’une pensée par “complexes”, certains de ces pré-concepts, parmi les plus communément rencontrés, sont d’une formation assez bien discernable.

II. Le matériel de travail

Il est constitué par quelque quatre-vingts exemplaires du “questionnaire” dont une version est jointe ci-après, renseignés “spontanément” par des élèves de troisième (quatre classes, années différentes, trois établissements non voisins), en temps limité (20/25 min), sans calculatrice, avec brouillon éventuel au verso de la feuille.

III. L’activité dans l’atelier

Individuellement, étude de trois ou quatre productions, en essayant **non pas de décrire les erreurs**, mais de :

- Trouver des “logiques” susceptibles d’être en “résonnance consciencieuse” avec du quotidien scolaire,
- Repérer des “cohérences/incohérences” sur une même copie.

Par groupes, sur affiches, pour l’analyse en commun, présentation du travail ci-dessus pour quelques cas.

La retranscription des “affiches” ci-après sert de base à une lecture *historico-socio-culturelle*, des productions d’élèves qui y ont été consignées et étudiées ; il s’agit d’un essai proposé pour traduire les échanges selon les principaux axes des débats : la *lecture numérique* et les traces de *l’histoire des significations* en jeu pour l’élève.

N° élève	Production(s) de cet(te) élève	Recherche des "logiques" suivies et des "cohérences" : propositions des groupes.
C1	$D = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{1}$	Je barre "en haut" <u>et</u> "en bas" les mêmes chiffres... et autres exemples de la même logique plus ou moins explicitée.
31	$D = \frac{1 + \frac{1}{2}}{-1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{-1} = 0$ $G = \frac{2,009}{10,009}$ $G = \frac{2}{10}$ $I = \frac{633}{1233} = \frac{6}{12}$	
22	$H = \frac{0,0014}{1000}$ $H = \frac{14}{1}$	
26	$H = \frac{0,0014}{1000}$ $H = \frac{14}{1}$ $E = 702 \times 19,5 \times 120$ $E = 702 \times 19,5 \times 120 \times 3900$ $E = 3900 \times 3900$ $E = 3900^2$ $D = \frac{1 + \frac{1}{2}}{-1 + \frac{1}{2}}$ $= \frac{1,5}{-0,5}$ $= 1,5 \times 0,5 = 0,75$	• "<u>quotient</u> de E par 3990" $\Downarrow$ "E × 3900" de même • "<u>quotient</u> de 2500 par 99" $\Downarrow$ 2500 × 99 de même • "<u>quotient</u> de F par 3²⁰⁰" $\Downarrow$ „ F = 3¹⁶¹ × 3⁴⁹ × 3⁴⁰ × 3²⁰⁰ et F = 3⁴⁴⁰ avec la donnée F = 3¹⁶¹ × 3⁴⁹ × 3⁴⁰ • -0, 5 inverse de 0, 5

N° élève	Production(s) de cet(te) élève	Recherche des "logiques" suivies et des "cohérences" : propositions des groupes
39	$100x = x + 12$ $100x + 12 = x$ $100 + 12 = 2x$ $112 = 2x$ $\frac{\sqrt{112}}{2} = x$ $210 - 21x = 0$ $x = 210 + 21$ $x = 231$ $C = \frac{7}{9} \times 17 + \frac{7}{9} \times 64$ on simplifie par $\frac{7}{9}$ $C = 17 + 64$ $C = 81$	Peut-être influence de la propriété de Pythagore. 100 donne l'idée de carré, renforcée par la forme ? Volonté de mettre les "x" et "les nombres" chacun de leur côté (comme précédemment).
A9	$\frac{7}{3} - 7 = 14x$ $\frac{7}{3} - 7 - 14 = x$ $210 - 21x = 0 ; x = 10 \text{ car}$ $21 \times 10 = 210 \text{ et } 210 - 210 = 0$	
8	$H = \frac{0,0014}{1000}$ $H = 0,000014$ $A = 1\,999\,999 \times 236$ $A \approx 236\,000\,000$ $B = \frac{490}{13^2} \times \frac{260}{700} \times 52$ $B = \frac{6752200}{910000} = \frac{67522}{9100}$	Problème avec les simplifications, S'arrête à $x = \frac{12}{99}$; $x = \frac{96}{16}$; $x = \frac{210}{21}$. Ou encore à $D = -\frac{6}{2}$.

N° élève	Production(s) de cet(te) élève	Recherche des "logiques" suivies et des "cohérences" : propositions des groupes
10	$\frac{7}{3} - 7 = 14x$ $\frac{7}{3} - \frac{21}{3} = 14x$ $-\frac{14}{3} = 14x$ $\frac{-14}{3}$ $x = \frac{3}{14}$ $x = -\frac{3}{14} \times 14$ $x = -3$ Nombres à coup sûr différents de "a" dont on sait qu'il est décimal : aucune fraction n'est mentionnée.	• Diviser un nombre en écriture fractionnaire par un nombre en écriture fractionnaire pose un problème. • Sait faire le contraire, mais ne réalise pas que $14 = \frac{14}{1}$ Pour cet(te) élève, une écriture fractionnaire est-elle forcément un décimal ?
10 bis	$100x - x = 12$ $\frac{-100x}{100} - x = \frac{12}{100}$ $x - x = 0, 12$ $0 = 0, 12$ Cette équation n'a pas de solution. Nombres à coup sûr différents de "a" dont on sait qu'il est décimal : $I = \frac{633}{1233}$ $I = \frac{33}{233}$	Il faut que le facteur devant "x" soit 1. Donc 100x, je divise par 100. Par contre "- x", il n'y a pas à diviser. Un entier ne peut être décimal. "Simplification" par 6.

À partir de ces relevés, des exemples de “variantes” sont susceptibles d’être apportés dans l’analyse des productions des élèves, lorsque les lectures tendent à se positionner suivant une “modélisation” historico-socio-culturelle (*inspirée des recherches de Vygotski*) du développement intellectuel.

Deux remarques préalables.

- La démarche porte l’attention principale sur le développement intellectuel de l’auteur des “erreurs” étudiées, sur les possibles/probables mouvements de sa pensée ; non pas sur la description des erreurs en tant que telles, mais plutôt sur le “fil conducteur” de l’enchaînement d’idées dont elles sont le fruit.

Il est alors parfois possible de mettre à jour un travail intellectuel très laborieux, mais les raisonnements n’y ont pu être contrôlés faute de registres de langage appropriés, et il a abouti à des non-sens (quelquefois relevés par leurs auteurs).

- Contrairement à ceux qui appartiennent aux lignées rousseauistes ou piagétienes, un point de vue historico-socio-culturel de l’apprentissage ne fait pas considérer que ce sont les erreurs qui sont formatrices¹¹.

Les erreurs proposées à l’étude dans cet atelier, sont structurelles: elles témoignent d’un mode de pensée.

- En situation de “recherche”, les erreurs sont conjoncturelles¹² et sont formatrices seulement dans la mesure où leur dépassement signe une extension de connaissance, autrement, contrôlables par le sens, elles ne sont ni positives ni négatives : elles sont ! “Naturelles” en somme !

IV. Relevé concernant les élèves référencé(e)s “ C1”, “ 31”, “ 22 ”

(Première affiche dans le compte-rendu).

IV.1. Des formes données aux nombres D, G, H, I

“Logique” possible/probable :

fraction - la même chose en haut et en bas - à barrer.

L’attention porte sur la perception et l’action concrète, pas sur l’activité mathématique qui serait “commandée” par la connaissance de la propriété fondamentale des quotients.

Pour l’élève et l’enseignant la signification de “fraction” semble en coïncidence au niveau du mot, mais cela n’est pas le cas au niveau des actes de pensée: pour l’élève le mot est “chosifié” en deux nombres l’un au-dessus de l’autre, séparés par un trait horizontal.

¹¹ Voir à ce propos, *Pensée & langage*, page 305, édition La dispute, 1997.

¹² Cette catégorisation des erreurs – structurelles et conjoncturelles – est empruntée à Stella Baruk.

Il ne semble pas illicite d'affirmer que les mots "*fraction*", "*simplifier*", "*mêmes nombres-chiffres-chose*", "*pareil-en-haut-en-bas-trait*", "*barrer-enlever*", "*numérateur et dénominateur*", ... forment pour ces élèves (avec dans chaque cas des nuances, plus ou moins systématiques comme plus ou moins aléatoires) un complexe-collection tel que le définit Vygotski :

"... une généralisation des choses sur la base de leur participation à une opération pratique unique, sur la base de leur collaboration fonctionnelle."¹³

V. Relevé concernant l'élève référencé "26"

(Deuxième affiche dans le compte rendu).

V.1. La filiation "multiplication $\mapsto$ division"

La plupart du temps, bien au-delà du collège, les concepts de nombre, d'opération, de forme numérique ne sont pas advenus en tant que concepts de plein exercice¹⁴, et sont rigoureusement caractérisables par les propriétés de deux phases du mode de pensée par complexes; celle du complexe en chaîne

"qui se construit selon le principe de la réunion dynamique et temporaire de maillons isolés en une chaîne unique et du transfert de signification d'un maillon de la chaîne à un autre",¹⁵

et celle du complexe diffus qui réunit

"à l'aide de liaisons diffuses des groupes intuitifs-concrets d'images ou d'objets"¹⁶.

Dans ces zigzags de pensée incertaine, les mots "plus", "multiplié" ou "divisé", ... n'appellent pas une liaison par acte de pensée mathématique entre les nombres engagés dans l'opération évoquée, mais une liaison associative, par une gestuelle concrète entre "choses-nombres" perçues, gestuelle automatisée avec plus ou moins de fidélité.

PRENONS, PAR EXEMPLE, LE CONCEPT DE MULTIPLICATION.

En tendance¹⁷, il s'enracine graduellement dans l'entraînement à suivre pas à pas une procédure de calcul ritualisée, davantage que par une distanciation relative à des expériences mentales d'additions particulières, initiant des activités d'abstraction et de généralisation.

Les échanges d'expérience enseignante, à partir du quotidien scolaire, tendraient à montrer que l'appréhension des notions de "multiplicande/multiplicateur" est souvent court-circuitée au profit d'une "algébrisation" prématurée des calculs, avec l'objectif d'obtenir rapidement des calculs "justes", en quelque sorte sans obligation de sens :

¹³ Vygotski, *Pensée & langage*, page 220, éditions La Dispute, 1997.

¹⁴ Ils ne peuvent pas se dire en adaptation volontaire au contexte, selon le recours maîtrisé à leurs relations avec d'autres concepts ; à la phase où ils sont, ils ne peuvent se dire que par eux-mêmes.

¹⁵ Vygotski, *Pensée & langage*, page 221, éditions La Dispute, 1997)

¹⁶ Vygotski, *Pensée & langage*, page 223-224, éditions La Dispute, 1997)

¹⁷ Le réalisé d'humanité est lié à l'histoire particulière de chaque individu, non duplicable et infiniment varié ; ses descriptions ne peuvent être vraies qu'en tendance, données suivant des lignes générales, en cohérence avec des choix qui les orientent.

c'est ainsi que l'on arrive à exhiber "une règle de priorité" qui apparaît littéralement "*conventionnelle*" au lieu de THÉORIQUEMENT FONDÉE, et à des écritures "remparts d'erreurs" qui exonèrent de la maîtrise dans l'activité de LECTURE/ÉCRITURE NUMÉRIQUE.

Si la notion de "produit" comme nombre au singulier, (son écriture le rappelant comme formé à partir d'autres nombres grâce à la multiplication, cette formation possédant des propriétés caractéristiques fonctionnelles en calcul) n'a été ni "décollée" des situations concrètes "illustratives" (celles-ci pouvant même se retrouver insuffisamment nombreuses et variées), ni abstraite des cheminements de calcul, et qu'arrive la définition rigoureuse qui dit :

"*a et b étant des nombres quelconques (sauf que b n'est pas zéro), le quotient de a par b est le nombre dont le produit par b égale a*",

MÊME SI L'ON N'OMET NI L'ÉTUDE GRAMMATICALE, NI LES VARIATIONS DANS LA RÉDACTION, on conçoit facilement que cette définition a peu de chance de véritablement constituer une "*zone de proche développement*" au concept de quotient de deux nombres.

Lorsque les préconcepts de "produit" et de "quotient" sont regroupés, à l'aide de *liaisons diffuses*, sous le vocable "résultat", il s'établit un *transfert de signification* entre "opération" et "calcul", une *chaîne* de sens, ou plutôt *du sens enchaîné*, qui fait obstacle à une extension de généralisation et d'abstraction pourtant nécessaire, par exemple pour que se spécifie le calcul littéral ; la définition évoquée provoque alors des réflexions d'élèves présentant les marques d'une pensée par complexes, où un seul mot de la phrase convoque un amalgame à géométrie variable, dans lequel sombre l'idée exprimée :

- **si on ne connaît pas a et b , on ne peut pas les diviser ;**
- **un quotient c'est (avec) une division, pas une multiplication.**

ou, en langage pour soi,

"logique" possible/probable pour "26" (élève de troisième¹⁸, donc qui a "appris" que *diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse*) :

- E divisé par 3900, ça fait "fois 3900"¹⁹

$$E = 702 \times 19,5 \times 120 \times 3900.$$

- 19,5 ... la moitié de 39

- ... 702 x ... on fait 2 ... "fois 19,5",

- ... deux zéros, "12 ... 7 ... 19", ... "02"²⁰ ... 19,5" ; ...

$$E = 3900 \times 3900$$

- ... je sais ...

$$E = 3900^2$$

comme dans :

¹⁸ Dont les résultats scolaires ont permis une admission en seconde générale, comme pour tous les autres élèves de la classe (leurs productions sont répertoriées par les numéros simples qui vont de 1 à 26).

¹⁹ Il est notable que des élèves de plus en plus nombreux formulent des réponses sur ce registre : "j'ai fait fois trois"; l'abstraction de multiplicateur/multiplicande et, a fortiori, celle de facteurs ne sont alors certainement pas advenues.

²⁰ Littéralement "entendu" comme 0, 2 (zéro deux) et lui-même "compris" comme $\frac{1}{2}$.

$$H = \frac{0,0014}{1000}$$

• ... trois zéros au-dessus, trois zéros en dessous, faut barrer

$$\bullet H = \frac{14}{1}$$

ou dans :

$$D = \frac{1 + \frac{1}{2}}{-1 + \frac{1}{2}} = \frac{1,5}{-0,5}$$

• ... - 0,5 dessous ... ça fait “fois” sans le moins ...
 $= 1,5 \times 0,5 = 0,75$

VI. Relevé concernant les élèves référencé(e)s “ 39 ” et “ 8 ”, (troisième et quatrième affiches dans le compte-rendu)

VI.1. Des résolutions d'équations

On retrouve encore manifestement les sillages d'une *pensée par complexes* où s'enchevêtrent *complexes diffus* et *complexes en chaîne*.

$$100x = x + 12$$

- on met les “nombres” du même côté ... $100x + 12 = x$
- on met les x du même côté ... $100 + 12 = 2x$

Et là, l'examen de la “copie” de “39” tend bien à faire reconnaître que cet(te) élève a lu “la somme de deux carrés” dans une présentation familière, comme l'ont suggéré les collègues auteurs des notes portées par l'affiche.

Là où il est demandé de calculer B avec

$$B = \frac{490}{13^2} \times \frac{260}{700} \times 52$$

l'élève “39” a enchaîné par $B = \frac{490}{109} \times \frac{260}{700} \times 52$

ce qui montre 13^2 lu comme $10^2 + 3^2$ ce qui pour cet(te) élève évoque fortement le “100 + 12 ” comme “devant être revêtu” d'un “ $\sqrt{\quad} \equiv \dots$ ce que l'on cherche”, c'est-à-dire x ; ... $2x$? ... alors “il faut” diviser par deux.

L'ensemble de sa copie fait apparaître que cet(te) élève a bien retenu un imbroglio d'éléments de “leçons apprises” sans lien les uns avec les autres, associés à des graphies spécifiques perçues, pas à des signes mathématiques parlants; ainsi :

- à la suite de $x^2 = -8$
 $x = \sqrt{-8}$ l'élève a écrit “cette équation est fausse car les racines carrées ne sont pas négatives” ;

- comme indiqué sur l'affiche, à

$$C = \frac{7}{9} \times 17 + \frac{7}{9} \times 64 \text{ l'élève a écrit " on simplifie par } \frac{7}{9} "$$

- “Logique” possible/probable : “ fractions, pareil, ça s’en va, simplifier ”

• à “donner l’encadrement par deux entiers consécutifs du quotient de 2500 par 99 “,

ce sont encore des bribes de procédure “apprise” (un algorithme de calcul du PGDC de deux entiers) qui semblent appelées par des mots dont les évocations qu’ils provoquent viennent “bout à bout” ... *quotients, division, ... entiers, ... plus grand, plus petit, ... restes, ... différences* ,

puisque cet(te) élève a répondu

$$2500 - 99 = 2401$$

$$2401 - 99 = 2302$$

.....

.....

$$124 - 99 = 25$$

où ce 25 est “encadré” dans un rectangle ... en tant que “réponse”.

Au vu de la copie de “39” il ne semble pas impossible d’affirmer qu’il y a eu MISE EN COHÉRENCE DES RÉPONSES entre les deux résolutions d’équations abordées puisqu’on y trouve :

$$210 - 21x = 0$$

$$210 = + 21x$$

valant pour “je fais passer 21x de l’autre côté en changeant le moins”, puis, comme pour la précédente équation examinée ci-dessus, remplacé par :

$$x = 210 + 21$$

l’élève “ a fait passer les nombres du même côté, en changeant le moins ”

... il y a bien une différence à propos du changement de signe, mais si on essaie de se placer dans une “logique” de *pensée par complexes* on peut y reconnaître comme une confirmation de primauté de la lecture de 100 en tant que carré parfait, suggérée précédemment selon

***“le principe de la réunion dynamique et temporaire
de maillons isolés en une chaîne unique***

et du transfert de signification d’un maillon de la chaîne à un autre “.

- La lecture numérique en pensée par complexes donne des erreurs similaires caractérisant sans doute davantage des similitudes de CONTEXTES DIDACTIQUES SYSTÉMIQUES que des capacités individuelles d’élèves,

Les élèves référencés “ 39 ” et “ 8 ” n’appartenaient ni au même établissement, ni à la même promotion, ni au même département.

Ils(elles) n’ont donc pas bénéficié des mêmes professeurs, mais ont manifestement “entendu”, “retenu” des cours analogues; leurs erreurs ne sont pas “*n’importe quoi*” : on peut y reconnaître, jusque dans le détail non remarquable au premier coup d’œil, les mêmes “scories” langagières de leçons “ordinaires”.

COMPARONS :

$$H = \frac{0,0014}{1000}$$

les réponses sont différentes mais les mouvements de pensée analogues :

- dans le premier cas ... trois zéros au-dessus, trois zéros en dessous, faut barrer

$$H = \frac{14}{1}$$

- dans le deuxième cas ... rajouter trois zéros après la virgule ... mais attention ... celui devant la virgule ne compte pas ...

$$H = 0,000014 ;$$

dans les deux cas on compte, barre ou place des “zéros” qui ne sont que des signes graphiques.

Aucune intervention des concepts médiateurs d’une *lecture/écriture décimale* ²¹ des nombres en jeu.

$$B = \frac{490}{13^2} \times \frac{260}{700} \times 52$$

“ 8 ” a produit

$$B = \frac{6752200}{910000} = \frac{67522}{9100} \text{ avec “brouillon” de calcul au verso :}$$

$$\begin{array}{r} 700 \quad 490 \quad 127400 \\ \times 13 \quad \times 260 \quad \times 52 \quad 6624800 \\ \hline 2100 \quad 29400 \quad 254800 \quad + \quad 127400 \\ 7000 \quad 98000 \quad 6370000 \quad 6752200 \\ \hline 9100 \quad 127400 \quad 6624800 \end{array}$$

“Logiques” possibles/probables :

- des fractions à multiplier, ... ? (transformer 52 en fraction en ajoutant un 1)
- multiplier tout ce qui est en haut avec ce qui est en haut, (je me rappelle, “ça peut pas être plus simple” dit par le prof.) et ce qui est en bas avec tout ce qui est en bas ;
- 700 ... fois 13 ... résultat 9100 ; ... avec un carré ... et deux zéros, faut rajouter deux zéros ; ... 910000 en bas ;
- 490 ... fois 260 ... résultat 127400 ... fois 52 ... résultat 6624800
variante 1)
mes deux résultats ça fait 6752200 en haut ;

²¹ Cf analyse de “10” et “10 bis”.

- ou bien variante 2)
oui mais faut le rajouter une fois à cause du 1 pour transformer 52 en fraction ... 6752200 en haut ;
- deux zéros à la fin ... en haut et en bas ... barrer.

Il ne s'agit évidemment pas de "deviner" ce qu'a pensé EXACTEMENT l'élève.

Mais, si l'on veut bien faire l'hypothèse que les similitudes qui peuvent être repérées À RÉPÉTITION ne doivent rien au hasard, que les ÉLÈVES ŒUVRENT INTELLECTUELLEMENT ET QU'ILS NE SAVENT PAS RIEN pour répondre aux exercices qui leur sont proposés, il apparaît clairement une certaine adéquation entre leurs *registres langagiers* et des *actes de pensée par complexes*.

Une réalité qui ne devrait pas être, encore et toujours, considérée à priori comme indépendante des situations langagières vécues avant tout dans le quotidien scolaire.

VII. Relevé concernant l'élève "10" et "10 bis"

(cinquième et sixième affiches dans le compte-rendu)

- La signification de "nombre décimal" se présente le plus souvent comme un complexe-collection .

"Logiques" possibles/probables :

- si "a" est un décimal ce n'est pas un nombre rond, ...

alors "a" est à coup sûr différent de $\frac{32}{8}$, $\frac{49}{7}$, $\frac{333}{111}$ (élève réf. 10 bis)

- si "a" est un décimal c'est un nombre "qui tombe juste" ou alors "qu'il faut une virgule", ...

donc "a" est à coup sûr différent de π et de $\sqrt{3}$ (élève réf. 10)

- j'entoure d'abord les "a" possibles à coup sûr :

$\frac{13}{4}$; $\frac{32}{8}$; 3,14 ; $\frac{49}{7}$; $\frac{22}{7}$; c'est comme 3,14 ... *remplace* π , $\frac{333}{111}$;

... les à coup sûr différents de "a" : $\sqrt{3}$; π ; ... une puissance

pour $\frac{7}{3}$ je ne sais pas, après la virgule, ça fait 333333 à l'infini, ... ? (élève réf. 22)²²

- si "a" est un décimal c'est un nombre "à virgule" ...

donc "a" est à coup sûr différent de $\frac{13}{4}$, $(-53)^3$, $\frac{7}{3}$, π , $\sqrt{3}$, $\frac{22}{7}$. (élève réf. 8).

Il n'y a pas de prise de conscience qu'un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire exactement dans le système décimal de numération. C'est sur la graphie du

²² Les exemples ne sont pris que dans des "questionnaires" distingués sur les affiches ; AUCUN DE CES NEUFS "TESTS" NE PORTE UNE RÉPONSE EXACTE ET COMPLÈTE.

“nombre-objet-perçu” que porte l’attention.

Deux remarques.

1°) L’efficacité des décalages de la virgule ou du comptage des zéros est aléatoire sur chacune des “copies” de ces élèves.

Ainsi “ 10 bis ” a produit :

$$\text{d'une part } \begin{cases} H = \frac{0,0014}{1000} \\ H = 0,0014 \times 10^{-3} \end{cases}$$

$$\text{et d'autre part } \begin{cases} A = 1999999 \times 2396 \\ = 2000000 \times 200 + 35 \\ = 400000000 + 35 \\ = 400000035 \end{cases}$$

mais encore, déjà relevé sur l’affiche :

$$\begin{cases} 100x - x = 12 \\ \frac{100x}{100} - x = \frac{12}{100} \\ x - x = 0,12 \\ 0 = 0,12 \\ \text{Cette équation n'a pas de solution.} \end{cases}$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 32 = \frac{16}{3}x & \frac{2}{\frac{1}{3}} = x \\ \frac{32}{\frac{16}{3}} = \frac{\cancel{\frac{16}{3}}x}{\cancel{\frac{16}{3}}} & \frac{2}{3} = x \end{array} \right. \quad \text{La solution de l'équation est } \frac{2}{3}$$

On a une illustration du fait que des réponses “justes”, voire “savantes”, ne signifient pas maîtrise conceptuelle : elles sont loin d’engager des vérifications de cohérence qui la signifieraient (chiffre des unités pour un produit d’entiers calculé, remplacement de la variable par la valeur trouvée, ...).²³

Si le contexte langagier est appauvri, les liens entre catégorisations perceptives restent associatifs; si les médiations langagières ne sont pas à la hauteur au plan de

²³ Il conviendrait donc de s’interroger sur les “bonnes notes” qu’elles encourrent, et aussi relativiser les “mauvaises” ; de ne plus les considérer, ni les unes ni les autres, comme critères indispensables et incontournables d’orientation scolaire.

l'abstraction, les processus d'évolution des propriétés relationnelles générales des concepts languissent.

2°) Une remarque se rapportant à l'histoire scolaire de l'expression "nombre décimal".

“Et ce n'est qu'à la fin du XIXème siècle que des mathématiciens comme Cantor, repensant les fondements des mathématiques, élaborèrent une théorisation des décimaux, après que ces derniers eurent été longtemps réduits à un rôle pratique.”²⁴

Le rôle pratique des décimaux, c'était de remplacer dans le quotidien l'écriture fractionnaire des non-entiers ; la tâche, ardue, fut dévolue à l'École, aux instituteurs ; elle a duré plus d'un siècle.

Dans l'École, L'ÉCRITURE DÉCIMALE S'OPPOSE DONC À L'ÉCRITURE FRACTIONNAIRE DES MESURES NON-ENTIÈRES.

Or, progressivement n'a plus subsisté que la désignation de l'un des termes de l'opposition et, au fur et à mesure, les fractions devenaient de moins en moins des nombres ordinaires tandis que les décimaux les remplaçaient dans le fractionnement des unités.

Si aujourd'hui, au quotidien aussi bien que pour nos élèves, décimal s'oppose à entier, cela manifeste UN GLISSEMENT DE SENS DANS UN COMBAT SCOLAIRE mené avec un "zèle éclairé" ; LES ABUS DE LANGAGE SONT FONCTIONNELS, MAIS s'ils ne peuvent pas être conscients, ils sont susceptibles d'altérer les significations, de bloquer les mises en cohérence, et, par exemple, ... D'EMPÊCHER DE RECONNAÎTRE "10 " COMME UN DÉCIMAL.

VIII. Quels axes éventuels pour nos pratiques d'enseignement?

- Nécessité d'une prise de conscience de nos représentations de l'apprentissage, pour une meilleure maîtrise de la cohérence de l'enchaînement des cours, de leurs liens, tant avec les acquis qu'avec les perspectives d'étude à venir.

²⁴ BASSIS O., MATHÉMATIQUES, les enfants prennent le pouvoir, p 75, éd Nathan, 1984.

Odette Bassis souligne que « c'est un choix politique (...) qui a accéléré définitivement la pratique de l'écriture décimale ».

(Ce choix est celui du système métrique (facilitation du commerce; devenu légal en 1840 seulement), système voulu décimal et dont il a été aussi voulu qu'il rattache les diverses sortes de grandeurs à l'unité de longueur, elle-même voulue, suivant l'esprit révolutionnaire d'après 1789, « naturelle, invariable, dont la détermination ne renferme rien d'arbitraire, ni de particulier à la situation d'aucun peuple du globe ».)

Odette Bassis cite un discours de Laplace aux formateurs des instituteurs, en floréal de l'an VII (1799) : « Il est permis d'espérer qu'un jour ce nouveau système sera généralement adopté, (...), il présentera beaucoup moins de difficultés à l'enfance. Vous en éprouverez à le faire entendre aux instituteurs, (...); car l'homme est naturellement porté à rejeter sur la complication des choses, la peine que ses préjugés et ses habitudes lui donnent à les concevoir: mais votre zèle éclairé surmontera ces obstacles... »

- Les mouvements de pensée par complexes et par concepts n'obéissent pas aux mêmes dynamiques ;

- * dans la pensée par complexes les significations sont, en quelque sorte, discrétisées et "rebondissent" par association les unes par rapport aux autres; les complexes restent en lien direct avec la réalité qu'ils évoquent, ils ne peuvent être désignés que par eux mêmes ;

- * dans la pensée conceptuelle, le sens peut circuler parce qu'un concept isolé n'existe pas; tout concept est intégré dans un système de voisinages conceptuels subordonnés suivant la hiérarchie de leurs niveaux d'abstraction: tout concept peut s'exprimer d'une infinité de façons par la médiation d'autres concepts, entre lui et la réalité qu'il convoque.

- Les élèves en "difficulté" seront d'autant mieux "aidés" que seront multipliées les situations dans lesquelles on aura pu rendre incontournables les prises de recul, le détachement des liens directs et spécifiques d'avec les idées qu'elles font naître ; autrement dit, d'autant mieux, que la tendance "re-médiatrice" cultivera l'aptitude à l'abstraction (*plutôt que l'obtention de "résultats" concrets observables et a minima théoriques*) ; chaque élève est irrémédiablement unique et se trouve dans une dynamique d'évolution dont des indices sont perceptibles, mais qui reste essentiellement inatteignable ; une aide individuelle ne peut donc se concevoir que dans la variété pour tous, la richesse et la rigueur langagières pour tous ; (*les réactions individuelles profitant à tous, à condition qu'elles puissent être distinguées par chacun et par l'enseignant(e), ce qui impose des contraintes d'effectifs et de temps*).