L'Autan

numéro 2

sommaire

BERNARD MON AMI, NOTRE AMI

C'est un honneur pour moi de t'adresser ce message.
En tout premier lieu, voici les mots qui viennent à l'esprit de tous ceux qui t'ont connu dans le milieu professionnel :

Gentillesse, Amour des maths et de la recherche, Disponibilité

Ta gentillesse : nous nous sommes rencontrés en 1973 dans le cadre de l'IREM, institut de recherche et de formation continue où tu es très actif depuis sa création en 1972. Malgré ton investissement et ton implication dans de nombreux domaines (rappelons entre autres tes fonctions de Directeur adjoint depuis de nombreuses années), je n'ai jamais entendu une seule remarque désobligeante à ton égard. Cette qualité a également été appréciée sur le plan national ; en tant que membre fondateur de la commission inter IREM « Géométrie », à laquelle tu as toujours participé, tu as su jouer un rôle important, non seulement scientifique mais aussi modérateur.

Ton amour des mathématiques et de la recherche : il est vraiment exceptionnel qu'un professeur de lycée ait une activité de recherche pédagogique et de publication de travaux aussi importante (plusieurs centaines de publications répertoriées sur Internet). Ta dernière brochure sur la géométrie, publiée par l'association des professeurs de mathématiques, est encore utilisée et très appréciée.

Je te suis très reconnaissant pour ta participation à la rédaction de livres scolaires ; participation active, sérieuse et très efficace. C'est dans ce cadre que, depuis plus de dix ans, nous avons passé des centaines d'heures ensemble, dans un climat de travail toujours convivial et amical. Je me souviens de ton enthousiasme, de ton plaisir de chercher. Je te revois arrivant chez moi, sonnant à la porte d'entrée, toujours ponctuel Je te revois également, lorsque nous n'avions pas terminé, me demander « tu permets que j'appelle Danielle, mon épouse, pour la prévenir que j'aurai du retard », ou encore pour lui dire « je reste manger avec André ». A ce sujet, je n'ai appris qu'hier ce que tu disais en rentrant chez toi : « j'ai encore eu droit à l'omelette », en précisant gentiment que je la faisais très bien.

Ta disponibilité : dans le cadre de ces nombreuses activités, tu as toujours su te rendre disponible, en répondant « présent » à toutes les sollicitations de l'IREM. Cette grande qualité est également reconnue et appréciée par tous.

Je terminerai par quelques points que m'a signalé notre ami Henri Bareil : tu animais des stages de formation continue d'enseignants avant la création des IREM ; par exemple, en 1970, tu as fait partie du groupe de six enseignants chargés par l'Inspection de la formation des PEGC de l'Académie. Autre point que j'ignorais : lors de la création de l'IREM, tu as été l'un des initiateurs des calculatrices Olivetti (elles pesaient 15 kg chacune). Ainsi, tout t'intéressait, pas seulement la géométrie, domaine où tu es reconnu internationalement.

Bernard, tu as eu une vraie vie de chercheur très compétent et toujours plein d'enthousiasme. On a souvent tendance dans ce genre de discours à manquer d'objectivité en mettant trop en relief les qualités de l'ami disparu. Dans ton cas, cher Bernard, c'est différent : je suis sûr que j'en ai oubliées.

André ANTIBI, Samedi 9 Juin 2007

La pureté mathématique en questions

Hélène KOEHL
IREM de Toulouse

Dans les années 70, qui se lançait dans l'étude des mathématiques choisissait entre un cursus en mathématiques pures et un cursus en mathématiques appliquées. Le distinguo amusait les jeunes étudiants dont j'étais, heureux de choisir la « *pureté* » et d'éviter ainsi d'être confrontés à une réalité pratique jugée « d*angereuse* », car échappant à une systématisation immédiate. Les mathématiques pures paraissaient plus simples et s'accordaient à l'esprit de l'époque, qui honnissait tout ce qui pouvait ressortir à une « *compromission* » avec le monde, entendre le monde de l'économie et des finances, des privilèges, de la course aux armements et des expérimentations douteuses.

Les enjeux politiques, idéologiques et sociaux ont changé. Le panorama scientifique a subi, lui aussi, de profondes modifications ; l'informatique a envahi tous les domaines réservés. La « *pureté* » fait de la résistance. Nombre d'universités continuent à offrir des cursus spécifiques en mathématiques pures. Cette année, l'université Paul Sabatier à Toulouse propose deux cours de mathématiques distincts aux étudiants fraîchement bacheliers, l'un généraliste, l'autre à l'intention de futurs mathématiciens. Distinction toute naturelle, mais dont l'explication donnée en réunion pédagogique m'a apporté la preuve inattendue qu'il existait une gradation en matière de pureté mathématique : dans le premier cas, des mathématiques dites concrètes, attachées au monde « *réel* », de fait des fondamentaux de l'analyse, dans l'autre, des mathématiques d'essence pure, partant des fondements logiques de la théorie des ensembles. La pureté mathématique n'est donc pas un simple qualificatif, elle est une valeur. Le lexique mathématique ne serait donc pas aussi neutre qu'il y paraît. De par son existence même, l'expression « *mathématiques pures* » est, comme toute autre expression du domaine public, le jouet des variations de la mode langagière et du contexte idéologique. Elle l'est depuis son introduction dans la nomenclature. Une fois attachée aux mathématiques, la pureté n'est pas restée cantonnée au domaine réservé où on l'avait conviée, elle a colorié l'objet du sens fluctuant qu'elle revêt dans la symbolique humaine. C'est dire que l'expression a une existence propre : elle n'est pas la propriété exclusive des mathématiciens ; sa signification s'est modifiée depuis son apparition au 18ème siècle, à l'image de la société. Une distorsion existe entre le projet initial qui sous-tend l'expression, la signification que lui donnent les mathématiciens aujourd'hui et le sens qu'elle véhicule dans la société ambiante.

S'intéresser à cette problématique n'est pas original. Le nombre des ouvrages et articles qui lui sont consacrés le prouve. Un TPE intitulé « *La frontière entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées* » a été préparé par quatre élèves de Terminale au Lycée Sarda Garriga de Saint-André (la Réunion) en 2004, puis publié sur le net à l'initiative de l'IREM de la Réunion. En introduction, les professeurs qui ont encadré ce travail notent que, d'un retour sur le 18ème siècle et les travaux de d'Alembert et Condorcet, « *les élèves sont bien vite passés à une interrogation plus générale concernant les mathématiques aujourd'hui, leur classification possible, les paradoxes engendrés par la manière dont les mathématiciens pratiquent et conçoivent leur science* », se demandant si « *cette frontière supposée entre les 'mathématiques pures' et les 'mathématiques appliquées* [était] *réellement nécessaire* ». Et de conclure que « *s'il faut continuer de parler d'une frontière entre les 'mathématiques pures' et les 'mathématiques appliquées' (...) cette frontière est et doit être poreuse* »[1]. Le faut-il ?

1- Naissance d'une expression :

1-1- Une expression née au 18ème siècle :

Selon Wikipedia qui a réponse à tout, « *les mathématiques pures (ou mathématiques fondamentales) sont la branche des mathématiques motivées par des raisons autres que celles de l'application pratique* »[2]. Le dictionnaire interactif situe au 18ème siècle le moment où les mathématiques pures sont devenues une branche reconnue de l'activité mathématique, parfois dites « *mathématiques spéculatives* ». En déconnectant les mathématiques pures de toute motivation pratique, la définition donnée par Wikipedia les inscrivent dans le domaine de l'esthétique, de l'« *art pour l'art* », voire de la gratuité, ce qui n'est pas neutre. Dans la France du 18ème siècle, la question occupait d'Alembert (1717-1783) et Condorcet (1743-1794) qui travaillaient à l'Encyclopédie ; les deux savants distinguaient mathématiques « *pures* » et « *mixtes* », voire « *sociales* » pour Condorcet[3].

1-2- Une spécialité née de l'algèbre :

En 1701, Lady Sadleir faisait à l'Université de Cambridge un legs destiné à créer une chaire exclusivement dédiée à l'étude de l'algèbre. En 1857, les pairs de l'Université de Cambridge rebaptisaient « *the Sadleirian Chair* » en « *Professorship of Pure Mathematics* », afin d'inclure les développements de l'analyse dans le programme de l'enseignement dispensé par son titulaire. Le premier fut Arthur Cayley (1821-1895), par ailleurs célèbre algébriste[4]. Cette modification entérinait une nouvelle classification des champs mathématiques distinguant non plus les domaines d'investigation, mais les développements formels et les applications pratiques, qui tenait compte de l'évolution des mathématiques et des avancées de la recherche théorique, selon un processus qui n'a cessé de s'amplifier depuis lors.

1-3- Les mathématiques pures vues par un analyste appliqué :

En introduction au manuel d'analyse appliquée qu'il publiait en 1956 le mathématicien hongrois Cornelius Lanczos (1893-1974), soucieux de cerner le domaine des « *mathématiques pures* », se livrait à une démarche intéressante, parce que moins conceptuelle que procédurale[5]. L'auteur expliquait que les « *mathématiques pures* » participent initialement d'un processus analytique en trois phases, au cours duquel elles interagissent avec le monde « *réel* » :

1. Un problème physique donné est transcrit dans l'univers des nombres.
2. Certains résultats mathématiques sont obtenus par des opérations purement formelles.
3. Ces résultats sont transcrits en retour dans le monde physique réel.

Au cours de l'histoire des mathématiques, la phase 2 est devenue une entreprise indépendante : il est possible de se concentrer sur des processus formels d'analyse, sans s'interroger sur leur éventuelle finalité physique, comme d'interrompre le processus analytique décrit ci-dessus à sa phase 2. L'habitude a été prise de traduire cet affranchissement au moyen des qualificatifs « *pur* » et « *appliqué* », constatait l'auteur qui déplorait l'échelle de valeurs qu'instaure la différentiation. S'il est vrai que ce qui n'est pas physique échappe aux lois de la pesanteur, les « *mathématiques pures* » relèvent de l'intellect et du monde supérieur des idées cher à Platon et à ses disciples. La notion de pureté vaut donc bien une analyse à part entière.

2- De la pureté :

1-1- L'épreuve du feu :

La terminologie mathématique connaît bon nombre d'expressions à forte signification philosophique ou éthique. Le commun des mortels est en droit de se demander si la *négativité* est la tare cachée de certains nombres et la *discrétion*, une vertu partagée par certains ensembles. *Rationalité* et *irrationalité* sont incompatibles dans un univers *réel* que la dimension *imaginaire* complexifie. Les mathématiques affirment que la *transcendance* est une composante du *réel*. Comment nier dans ces conditions qu'il s'agit d'ésotérisme ?

C'est dans ce contexte chargé idéologiquement qu'intervient le qualificatif « *pur* ». Par-delà son antécédent latin « *purus* », le vocable remonte au grec « *pur* » qui signifie « f*eu* ». Les dérivés de la racine n'ont pas tous la même portée symbolique. On peut ainsi affirmer qu'il est purement ridicule de débiter de pures inepties, sans convoquer un arsenal de représentations métaphysiques. Mais lorsque le français place l'adjectif après le substantif, il en renforce le poids : de pures inepties ne sont pas nécessairement des inepties pures. De même, de pures mathématiques ne sont pas nécessairement des mathématiques pures. Dans cette dernière expression, le qualificatif convoque l'image du feu dégageant de sa gangue la quintessence de la construction mathématique.

L'épreuve du feu qui sépare le pur de l'impur relève de la sémantique religieuse universelle. En ce sens, la simple convocation du vocable pur, indépendamment de toute antithèse, induit l'idée de frontière sur laquelle se sont penchés les jeunes lycéens de la Réunion. Frontière entre le pur et l'impur, entre le sacré et le profane, entre le pur et le mixte (ou le mélangé). De même entre le pur et l'appliqué, disent les gardiens du temple mathématique, utilisant le même schéma de représentation, fondant leur doctrine sur une axiomatique dont l'adoption est un acte de foi. Constat à faire grincer des dents de bon nombre de mathématiciens de bonne foi, convaincus d'avoir rompu avec l'opium du peuple.

1-2- Le mythe du pôle idéal :

Dans un article édité en ligne en 2004, Philippe Lacour développe la réflexion historique du philosophe Gilles-Gaston Granger. Il fait un parallèle avec l'approche mathématique, tiraillée comme la recherche historique entre « *la fiction d'un pôle idéal et l'effectivité d'une pratique* ». « *L'idée d'une connaissance* [historique] *purement informe de l'individuel est aussi fictive (ou 'mythique') que celle d'une connaissance* [mathématique] *purement formelle et sans contenu empirique* », écrit-il. Les mathématiques « *paraissent se réduire à un pur langage, parce que l'élément syntaxique y dévore l'élément sémantique* », expliquait Granger[6].

Force est de reconnaître que la polysémie du lexique utilisé en mathématiques ne tourmente pas le mathématicien. A l'intérieur de l'enceinte mathématique, « *imaginaire* » ne rime pas avec « *imagination* », « *transcendant* » ne s'oppose pas à « *immanent* » et un ensemble « *discret* » ne risque pas de pécher par excès de « *timidité* ». Cependant la discipline lexicale cesse à la porte du bastion. Ce qui est valable à l'intérieur ne fait plus force de loi à l'extérieur. La « *pureté* », comme qualificatif des mathématiques, sort du domaine réservé et n'est donc pas soumise à la règle de la syntaxe toute-puissante.

Le mythe d'une syntaxe indépendante de la sémantique entretient la croyance en une science « *pure* », protégée des inflexions que risque le lexique à l'extérieur de l'enceinte sacrée, alors qu'il s'agit de systématique plus que de pureté. Qu'à cela ne tienne : le mythe des mathématiques comme pôle idéal du savoir lui fait écho dans la société, faisant de la maîtrise de la syntaxe mathématique le paradigme de l'intelligence et l'instrument privilégié de la sélection des jeunes élites.

1-3- La supériorité de l'ascète :

En se libérant des contingences matérielles, l'ascète gagne en supériorité face aux simples mortels soumis à la chair et à la pesanteur. Sa recherche est un chemin de purification. Sa discipline doit faire de lui un pur esprit. L'ascèse mathématique est une quête infinie. C'est pourquoi « *les mathématiciens expriment plus de satisfaction devant les démonstrations posant de nouvelles questions que devant celles parachevant la résolution d'un problème* », note Didier Nordon dans un pamphlet en ligne épinglant la confiance excessive dans le savoir[7].

La revendication de pureté fait du mathématicien un être à part. Attribuée, elle participe à la construction de l'image d'un idéaliste irréaliste, voire asocial. Assumée, elle l'intègre à la cléricature d'une société hiératique, répondant à un modèle immuable codifié et hiérarchisé. Dans ce schéma de représentation, les « *mathématiques pures* » sont supérieures aux autres qu'on les nomme mixtes, mélangées ou appliquées. J'ose croire que ce n'est pas ce que veut le praticien de la mathématique, qu'il l'apprécie pure ou la préfère mixte.

2- Les mathématiques pures, un concept périmé ?

2-1- Inventaire :
Un examen des revues mathématiques exposées sur les présentoirs de la salle de lecture de la bibliothèque du Département de Mathématiques de l'Université Paul Sabatier à Toulouse a donné quatre titres juxtaposant les qualificatifs « *pur* » et « *appliqué* »[8] :

- *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Gauthier-Villars, Paris : le journal fondé par Joseph Liouville en 1836 en est à sa 172ème année de parution ; après Jacques-Louis Lions et Paul Malliavin, son actuel rédacteur en chef est Pierre-Louis Lions.

- *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, publiée par l'Académie roumaine, Bucarest : le tome LI est sorti en 2006 ; les échanges entre analystes complexes finnois et roumains initiés par Rolf Nevanlinna et Simion Stoilow l'ont vu naître.

- *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Wiley-Interscience, NJ : le Courant Institute of Mathematical Sciences vient de sortir le volume LX du journal fondé par Richard Courant. En précisant en première page de couverture : « *the journal (...) is devoted to mathematical contributions to the sciences ; both theoretical and applied papers, of original or expository type, are included* », le comité de rédaction opte pour l'interdisciplinarité.

- *Communications on Pure and Applied Mathematics*, American Institute of Mathematical Science, Missouri, & Shangai Jiao Tong University, avec six volumes publiés, « *in all major areas of analysis (...) theoretical and numeric (...)* ».

Chaque fois, la juxtaposition des deux qualificatifs procède d'un souci d'interaction. Dans les deux derniers cas, le qualificatif « *pur* » est actualisé en « *théorique* ». A l'opposé de cette démarche, le *Journal de l'Institut de Math de Jussieu* créé en 2002 revendique la publication d'« *articles de haut niveau en mathématiques pures* »[9]. Ainsi adeptes du purisme et militants de la mixité continuent à cohabiter dans le paysage éditorial des mathématiques contemporaines.

2-2- La pureté dangereuse :
Didier Nordon parle avec délectation de ces congénères baby-boomers qui se sont lancés dans l'abstraction « *en espérant par là, entre autres, se tenir à l'écart des vilenies humaines* », faisant de la pureté de leurs mathématiques un rempart à l'abri duquel il leur était possible de constater les terribles compromissions de leurs collègues physiciens ou généticiens, soumis pour leur part aux diktats du monde « *réel* ». Et voilà que, informatique aidant, certaines recherches parmi les plus abstraites ont trouvé des débouchés insoupçonnables, que la théorie des nombres s'est déployée en cryptographie aux multiples applications économiques et fiduciaires[10]. Les puristes d'hier, oubliant leurs scrupules, ne boudent pas les applications de leurs recherches fondamentales. L'évolution suit celle des mentalités qui, aujourd'hui, se méfient de la pureté, dangereuse quand elle conduit à l'épuration, tandis que l'idéal sociétal est à la mixité[11].

2-3- Rallye mathématique et ébauche de conclusion :

A l'IREM de Toulouse, les organisateurs du Rallye mathématique savent que dans leur grande majorité, les jeunes participants, collégiens et lycéens, préfèrent résoudre des exercices non habillés dans une situation concrète, alors qu'un public moins rompu aux exercices mathématiques se passionnera pour les énigmes tirées de la vie courante[12]. L'habillage masque la méthode, oblige une mise en perspective, allonge la démarche. Les jeunes experts en syntaxe mathématique préfèrent jouer sans ces préliminaires. Ils cherchent la faille, adaptent la mécanique et mettent le pied sur l'accélérateur. Parmi eux se cachent de futurs praticiens des mathématiques théoriques ou systématiques, qui n'ont pas besoin d'être qualifiées de « *mathématiques pures* » pour exister. L'expression a eu son heure de gloire, elle mérite de figurer aujourd'hui au rayon des antiquités, ce qui aura l'avantage de limiter les risques de contresens.

[1] http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/telecharger/Gombaud/TPE_Frontiere.doc

[2] http://fr.wikipedia.org/wiki/Math%C3%A9matiques_pures

[3] Christian Gilain, Professeur à l'Université Paris VI, a beaucoup écrit sur d'Alembert et Condorcet ; pour la liste de ses travaux : http://www.institut.math.jussieu.fr/~gilain/publis.html

[4] Prof. H. T. H. Piaggio, « Three Sadleirian Professors : A. R. Forsyth, E. W. Hobson, G. H. Hardy », The Mathematical Gazette 15, 215 (1931), pp. 461-465.
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Extras/Sadleirian_Professors.html

[5] Cornelius Lanczos, Applied Analysis, Courier Dover Publications, 1988 (1956[1]), pp. 1-2.
http://books.google.com/books?id=6E85hExIqHYC&dq=applied+analysis+lanczos&hl=fr

[6] http://www.espacestemps.net/document556.html
Philippe Lacour, « Le concept d'histoire dans la philosophie de Gilles-Gaston Granger », EspacesTemps.net, textuel, 20.03.2004, cite Gilles-Gaston Granger : Pensée Formelle et science de l'homme, Paris, Aubier, 1960, ch. 1.

[7] Didier Nordon, « Méfions-nous du savoir ! », Le Mensuel de l'Université 2 (Janvier - Février 2006).
http://www.lemensuel.net/Mefions-nous-du-savoir.html
Aussi de Didier Nordon, Les Mathématiques pures n'existent pas !, Paris, Actes Sud, 1993 (1981[1]).

[8] Ces journaux ne sont pas les seuls. Par exemple, Imhotel, Journal africain de Mathématiques pures et appliquées, est publié à Yaoundé depuis 1997. David Békollé en est le rédacteur en chef.

[9] http://www.institut.math.jussieu.fr/JIMJ/

[10] Henri Cohen & Gerhard Frey, Handbook of Elliptic and Hyperelliptic Curve Crytography. Discrete Mathematics and Its Applications, Londres, Chapman & Hall, 2005.

[11] Bernard-Henri Lévy, La pureté dangereuse, Paris, Grasset, 1994.

[12] Cf. Intervention de Jean Bichara (IREM Antilles-Guyane), Colloque Rallyes et Jeux Mathématiques, organisé par la commission Inter-IREM « Rallyes et Jeux Mathématiques », Toulouse, 8-9septembre 2007.

Interdisciplinarité mathématiques et sciences physiques.

Un exemple : la radioactivité en terminale S.

Groupe Mathématiques et Sciences Physiques au Lycée
IREM de Toulouse
Michèle Fauré, Pierre López, Monique Mandleur, Monique Sosset

Introduction.

Dans le cadre d'un travail de réflexion sur les programmes de terminale S, nous avons été naturellement amenés à étudier le cas de la radioactivité qui occupe une place privilégiée dans les programmes.

En effet, elle fait l'objet d'un enseignement en sciences de la vie et de la Terre et en sciences physiques.

En mathématiques, elle a motivé une organisation nouvelle de l'enseignement de certaines notions du programme. On peut lire dans les textes officiels :

> II - ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE
> Il est demandé d'introduire la fonction exponentielle très tôt dans l'année, dans un souci de cohérence entre les enseignements de mathématiques, de physique-chimie et de sciences de la vie et de la Terre. Pour l'introduction des autres concepts, l'enseignant reste libre de l'ordre de présentation.
> (B.O. n°4 du 30 août 2001 hs série page 64)

On remarque aussi, que dans la partie du document d'accompagnement des programmes consacrée à la classe de terminale S, il y a une **seule** annexe, et elle est consacrée à la radioactivité !

Citons le document d'accompagnement :

> Une annexe, sur l'étude de la radioactivité complète cette partie consacrée à la classe terminale : elle illustre la volonté d'introduire certains objets mathématiques (fonction exponentielle, lois de probabilité à densité continue) à travers l'étude de ce phénomène.
> (document d'accompagnement des programmes de terminale, introduction page 6)

Dans la modélisation de ce phénomène les mathématiques s'imposent fortement. Elles interviennent dans des registres variés (numérique, graphique, fonctionnel).

Notre approche interdisciplinaire[1] nous a amenés à remettre en cause certains présupposés, notamment, sur :

- la place de la fonction exponentielle et de l'équation différentielle qui lui est associée,
- l'enseignement des probabilités.

Dans cet article, nous présentons les conséquences pédagogiques de ce travail.

Nous avons élaboré une progression constituée de séances de mathématiques et de sciences physiques tenant *réellement* compte de l'aspect interdisciplinaire de la radioactivité en terminale S.

Nous commençons par présenter le premier T.P. fait en classe de physique qui étudie le phénomène à *un instant*[2].

Il est suivi d'un travail mathématique de modélisation où les probabilités ont un rôle prépondérant.

Pour passer à l'étude *expérimentale* de la radioactivité *dans le temps*, on s'est rendu compte qu'il était nécessaire de faire précéder le second T.P. de physique par une seconde modélisation mathématiques où la place occupée par l'équation différentielle est inattendue.

Malgré sa longueur, le texte qui suit, n'est qu'un résumé. Il est prévu d'éditer à l'IREM de Toulouse une brochure qui détaillera tous les points, permettant d'éclairer ceux qui pourraient paraître obscurs.

Ce travail a fait l'objet d'une présentation à la commission inter-IREM « mathématiques et sciences expérimentales » au printemps 2006, d'une « conférence du mercredi » en janvier 2007 et d'un atelier aux journées nationales de l'APMEP en octobre 2007[3].

Nous remercions M. Pierre Ettinger et M. Antoine Rossignol pour leur relecture attentive et leurs conseils.

A. Premier T.P. de physique.

I . Objectif.

Il s’agit d’évaluer, **à partir d’un instant donné de date t, le nombre de désintégrations se produisant pendant une durée déterminée (Δt)** dans un échantillon d’un élément radioactif.

La démarche expérimentale conduit à effectuer plusieurs mesures.

Cependant il y a impossibilité de répéter plusieurs fois une mesure à un **même instant** de date t.

On choisit alors l’élément Césium 137 car la lenteur de sa désintégration permet de considérer que l’***activité*** de cet élément n’est pas modifiée sur la durée du T.P..

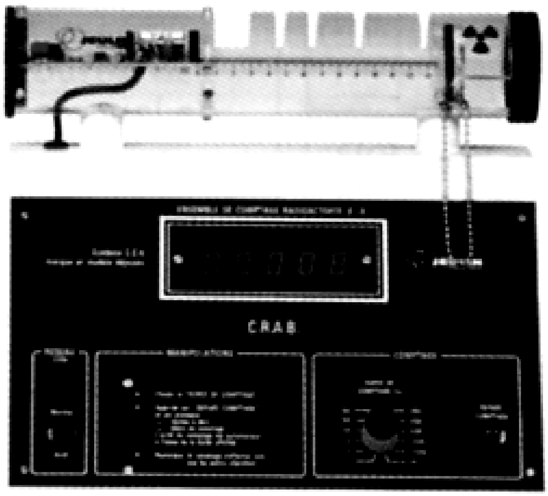
Ainsi, on admet que toutes les mesures, faites nécessairement à des **instants différents**, correspondent à des comptages à la **même date t**.

II . Dispositif expérimental.

La désintégration du Césium se fait selon la réaction d’équation

$$^{137}_{55}\mathrm{Cs} \longrightarrow {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + {}^{137}_{56}\mathrm{Ba} + \gamma$$

Le matériel utilisé (C.R.A.B.)[4] est représenté et décrit ci-dessous.



Une source de Césium 137 (à droite dans le tube) émetteur d’électrons accompagnés de rayonnement γ ;

un détecteur de radioactivité (à gauche dans le tube) ;

un compteur d’impulsions (partie inférieure).

Le détecteur ne reçoit qu’une petite quantité du rayonnement émis. De plus, rien ne permet d’affirmer que le détecteur est efficace à 100%. Il réagit à des paquets de « radiations ». Le nombre d’impulsions affiché n’est donc pas égal au nombre de noyaux désintégrés.

Mais, on considère que le **nombre réel** de désintégrations est **proportionnel** au **nombre affiché** par l’appareil.

III . Manipulation.

On fixe la distance D de la source au détecteur (4,5 cm) et la durée du comptage ($\Delta t = 2s$).

1 . Mesures.

On lance le comptage. Les élèves effectuent des séries de dix mesures.

Dans le tableau suivant, figurent quatre séries de comptages réalisées dans une classe de terminale S :

Série 1	Série 2	Série 3	Série 4
8	7	6	6
10	4	7	7
5	7	6	8
8	6	7	7
6	5	7	8
9	8	2	8
5	6	7	8
8	8	10	15
8	9	8	6
5	9	4	6

2 . Interprétation.

La dispersion des mesures déconcerte et intrigue fortement les élèves. Ceux-ci proposent des interprétations très diverses. En particulier certains émettent l'idée que l'appareil de comptage est défectueux, d'autres ont l'impression que c'est « n'importe quoi » !

Le professeur doit invalider les interprétations erronées et amener l'idée de phénomène aléatoire qui est le premier objectif de ce T.P..

Cette phase est particulièrement importante : pour les élèves elle constitue la première rencontre avec ce type de phénomène.

L'enseignant guide alors les élèves vers un traitement statistique. Mais cela nécessite de faire appel à un très grand nombre de comptages.

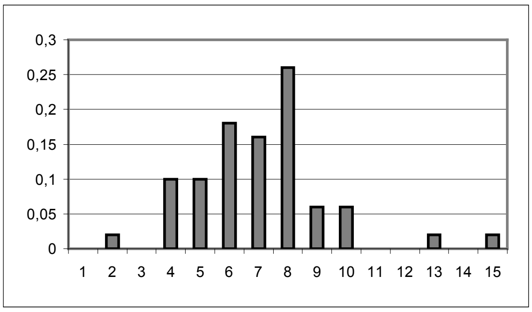
Un fichier contenant le résultat de 1000 comptages est exploité.

IV . Traitement statistique de séries de comptages.

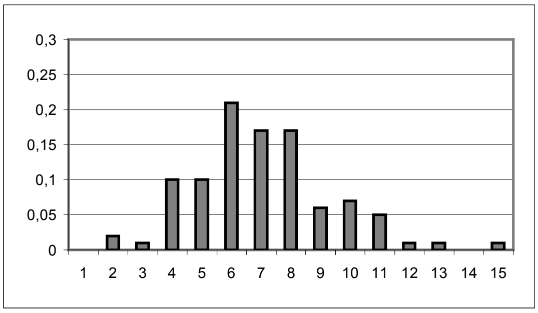
Les élèves construisent les diagrammes en bâtons (fréquences en ordonnées et classes en abscisses) correspondant à 50, 100, 200, 400, 500, 700 et 1000 comptages.

Les diagrammes figurant ci-dessous ont été faits avec le logiciel ©Généris 5+.

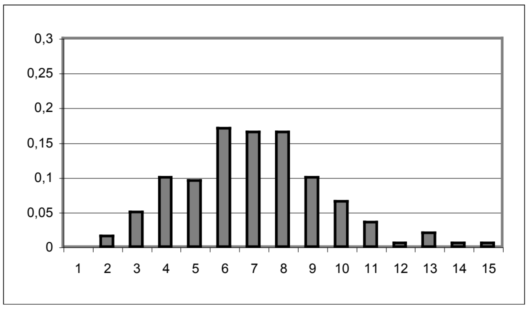
50 comptages



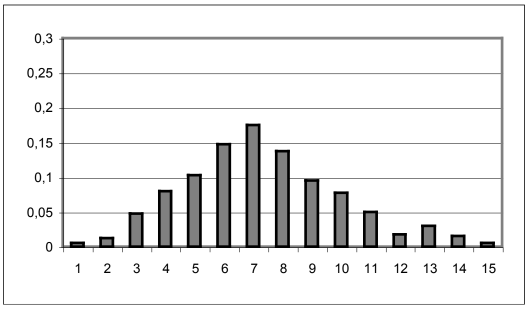
100 comptages



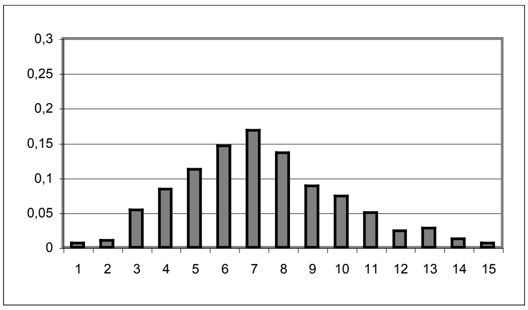
200 comptages



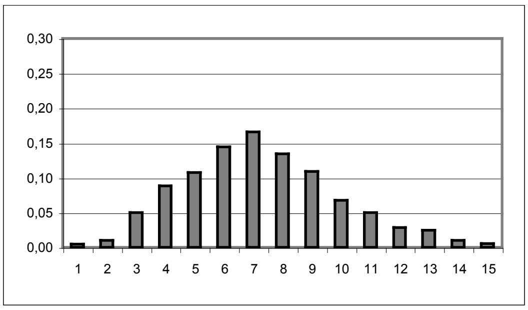
400 comptages



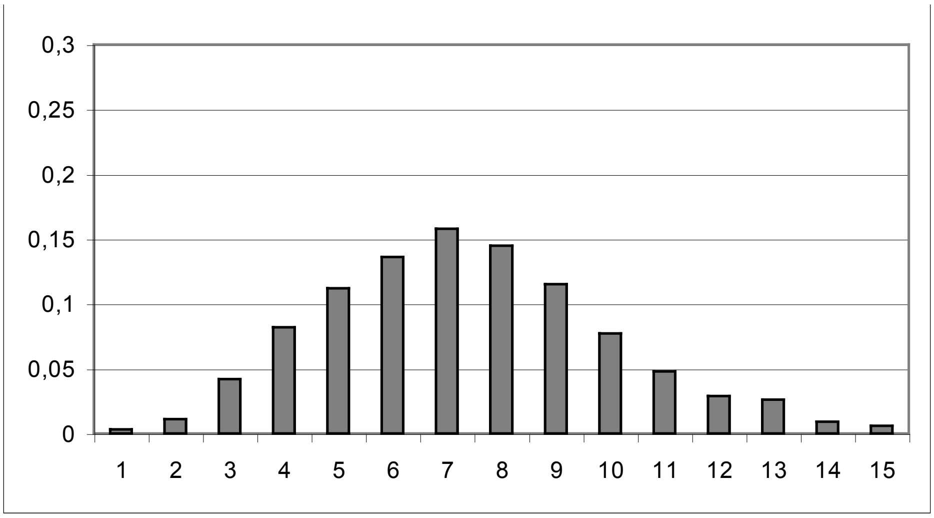
500 comptages



700 comptages

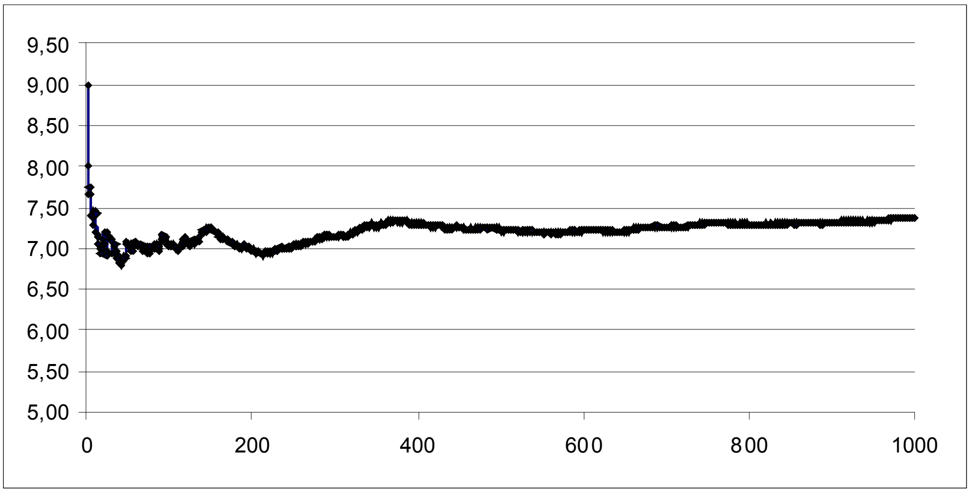


1000 comptages



A partir de 400 comptages, l'allure des diagrammes en bâtons semble se stabiliser. Le « n'importe quoi » a une « forme organisée ». On constate que la valeur la plus fréquente du nombre de désintégrations est 7.

On étudie ensuite l'évolution du nombre moyen de désintégrations selon le nombre de comptages. La courbe représentative est donnée ci-dessous.



On constate que la moyenne tend à se stabiliser à une valeur légèrement inférieure à 7,5, ce qui est proche de la valeur la plus fréquente. On peut préciser la moyenne : 7,37, et l'écart type 2,61.

V . Conclusion.

Le **phénomène de désintégration radioactive** qui pouvait paraître au départ imprévisible est à la fin considéré comme un **phénomène aléatoire**.

Les résultats expérimentaux permettent de dire qu'à un instant de date t, on peut parler du nombre de désintégrations **le plus probable** (ici égal à 7), proche du nombre **moyen** (ici égal à 7,37).

A ce stade, citons le document d'accompagnement du programme de physique :

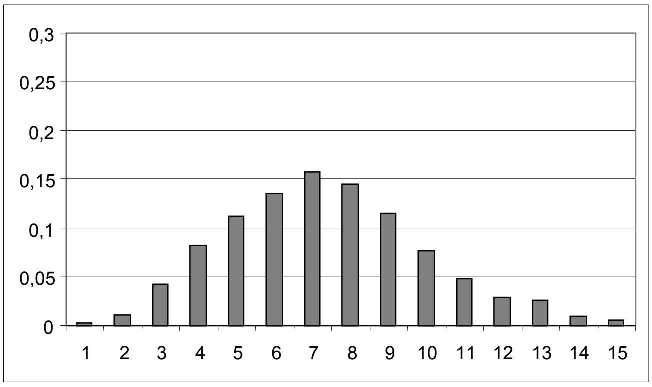
> « Au sens strict, on ne peut parler de phénomène aléatoire que lorsqu'on peut définir une variable aléatoire caractérisée par une loi de probabilité »
>
> *(document d'accompagnement de physique page 31 note 6)*

On notera que la préoccupation immédiate est probabiliste. La fonction exponentielle (et son équation différentielle) n'est pas utile à ce stade.

Lors d'un cours de mathématiques suivant ce T.P., on montre qu'il est possible de produire un modèle probabiliste en accord avec les résultats expérimentaux de physique.

B. Première modélisation mathématique.

L'objectif est de produire un modèle mathématique basé sur les probabilités qui rende compte des relevés expérimentaux, en particulier du graphique et des calculs suivants :



Moyenne : 7,37

Ecart type : 2,61

Pour cela on fait des *hypothèses*.

Première hypothèse :

La désintégration d'un noyau d'un élément radioactif est un **phénomène aléatoire**.

A partir d'un instant t fixé, pendant une unité de temps Δt, un noyau de césium 137 a une **probabilité p** de se désintégrer.

Deuxième hypothèse :

Pour continuer « confortablement », les noyaux de césium n'interagissent pas entre eux, c'est-à-dire qu'au cours d'une unité de temps, chaque noyau de césium va se comporter **indépendamment** des autres.

Il faut souligner le caractère arbitraire de cette dernière hypothèse. Comme toute hypothèse ! Mais on peut ici faire allusion au *domaine de validité* d'un modèle. Cette hypothèse n'a sûrement pas lieu d'être dans un réacteur nucléaire, et encore moins une bombe atomique.

On montre alors que si on note N le nombre de noyaux à l'instant de date t, la probabilité d'avoir k désintégrations est égale à :

$$\binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

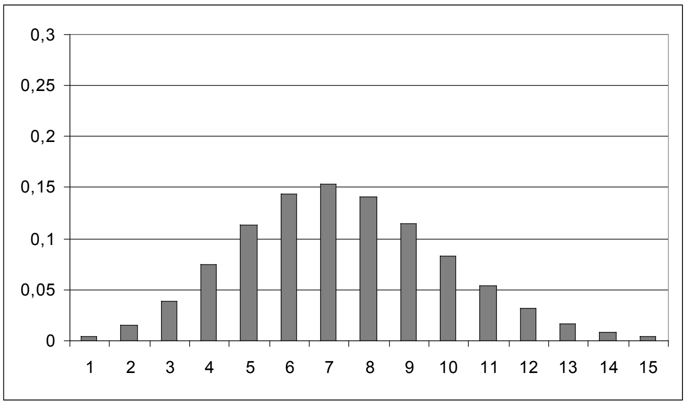
Il suffit de considérer que ce qui se passe à partir d'un instant t, pendant une unité de temps, est la répétition N fois, de manière indépendante, de l'événement « un noyau se désintègre », c'est-à-dire que l'on a une loi binomiale de paramètres N et p dont l'espérance mathématique est égale à N.p et l'écart type $\sqrt{N.p.(1-p)}$.

Ceci est parfaitement possible dans le cadre du programme de mathématiques à condition de ne pas renvoyer l'étude des lois de probabilités en fin d'année[6] au prétexte d' « introduire la fonction exponentielle très tôt dans l'année »[7] et son équation différentielle, qui n'ont toujours pas servi !

On va tester alors ce modèle en faisant une simulation.

On rappelle que l'on veut rendre compte de l'expérience physique avec une moyenne du nombre de désintégrations qui est égale à 7,37.

Pour la simulation on fait le choix de prendre N = 100 et p = 0,0737. On obtient alors le graphique suivant (ceci peut se faire avec une calculatrice) :



avec un écart type de 2,61

A ce stade une réflexion « philosophique » est sûrement nécessaire[8]. On peut se contenter du « minimum épistémologique » en disant que l'accord avec les données expérimentales valide les hypothèses, notamment confirme le caractère aléatoire du phénomène.

On pourrait s'étonner d'un accord « si parfait ».

En effet, prendre un nombre de noyaux de l'ordre de la centaine est peu *réaliste*. Cependant, en se rappelant les principes d'approximation de la loi binomiale, on se rend compte que l'on est dans un cas d'approximation par une loi de Poisson[9] qui ne dépend que d'un paramètre λ = N.p., ce qui fait que dans notre simulation, il est inutile d'augmenter N (il ne faut pas le diminuer !) car alors p serait modifié pour avoir toujours N.p = 7,37, donc, comme N.p = λ , λ serait inchangé.

C. Justification de la progression choisie.

Il s'agit de passer maintenant à l'étude de l'évolution du nombre N de noyaux radioactifs **au cours du temps**.

Pour comprendre la nécessité d'une nouvelle modélisation mathématique il faut regarder ce que le physicien fait comme expérience pour cette étude.

Le programme de physique suggère deux types d'expérience. L'une est l'étude d'un élément radioactif, le radon 220, et l'autre une simulation (par exemple avec des dés).

Si on est convaincu spontanément qu'une simulation nécessite une modélisation préalable, il est intéressant de voir que même l'approche « physique » par l'étude du radon ne va pas de soi.

En effet (comme on le détaillera au paragraphe E), au cours d'un T.P. de physique, les élèves mesurent[10] toutes les 7 secondes les nombres de désintégrations pendant une durée de 5 secondes que l'on notera $\Delta N(t)$.

Ensuite, les élèves calculent et représentent les rapports $-\dfrac{\Delta N}{\Delta t}(t)$ (appelé activité et noté A(t)).

A l'aide d'un logiciel[11] qui leur permet de tester plusieurs « modèles »[12], ils arrivent à choisir le modèle exponentiel et écrivent $A(t) = A(0)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

Le physicien dit alors : N(t) et A(t) sont proportionnels. On en déduit que $N(t) = N(0)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

Cependant on aura noté que l'égalité $-\dfrac{\Delta N}{\Delta t}(t) = k\,N(t)$ n'est pas « montrée » expérimentalement.

Elle est un présupposé pour *lire* les résultats de l'expérience et arriver à la conclusion *voulue*.

Il apparaît clairement qu'il y a un « chaînon manquant ».

C'est l'objet de la seconde modélisation mathématique.

Pour finir ce paragraphe, citons à nouveau les textes officiels :

> *Conformément aux objectifs de cette activité, les élèves sont amenés ici à confronter à des résultats expérimentaux les prédictions d'un modèle théorique : celui de la désintégration radioactive. On s'attachera à bien séparer l'aspect théorique de l'aspect expérimental.*
> *Pour l'aspect théorique, l'hypothèse d'une loi de décroissance exponentielle d'une population macroscopique N d'atomes radioactifs a été émise et discutée lors d'une activité précédente.*
> *(document d'accompagnement de physique page 36)*

D. Seconde modélisation mathématique.

A la suite de la première modélisation, on attache une probabilité p à la désintégration d'un noyau pendant une durée Δt à partir d'un instant de date t.

A priori, p dépend de t, de N et de Δt.

Pour continuer nous allons faire de nouvelles hypothèses.

Hypothèse 1 :

à N et t fixés, la probabilité de désintégration est proportionnelle à Δt : $p = \lambda.\Delta t$.

Hypothèse 2 :

la probabilité p ne dépend pas du nombre de noyaux : λ ne dépend pas de N.

Hypothèse 3 :

la désintégration radioactive se fait « sans vieillissement » : λ ne dépend pas de t.

Chacune de ces trois hypothèses nécessiterait un commentaire approfondi que l'on ne fait pas ici pour des questions de place[13].

On se contentera de remarquer que les deux premières qui peuvent paraître assez « intuitives », posent à nouveau la question du domaine de validité du modèle, et que la dernière est « plus arbitraire ».

On arrive donc à supposer que **$p = \lambda\ .\ \Delta t$ avec λ indépendant de N et de t**.

On remarquera que p est la probabilité qu'un noyau se désintègre pendant la durée Δt, *sachant que le noyau n'est pas désintégré à l'instant t* !

Pour faire l'étude de l'évolution d'une population de N noyaux, on regarde d'abord ce qui se passe pour UN noyau[14] :

à $t_1 = \Delta t$, la probabilité qu'il <u>ne soit pas</u> désintégré est $(1 - \lambda\,\Delta t)$

à $t_2 = 2.\,\Delta t$, la probabilité qu'il <u>ne soit pas</u> désintégré est $(1 - \lambda\,\Delta t)^2$;

…

à $t_n = n.\,\Delta t$, la probabilité qu'il <u>ne soit pas</u> désintégré est $(1 - \lambda\,\Delta t)^n$, que l'on peut écrire $\left(1 - \lambda\dfrac{t_n}{n}\right)^n$.

Donc pour un noyau, on peut définir une variable aléatoire de Bernoulli X avec :

$$P(X = 1) = \left(1 - \frac{\lambda\, t_n}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{\lambda\, t_n}{n}\right)^n .$$

L'évolution d'une population de N noyaux peut être considérée comme la répétition N fois, de manière indépendante, de ce qui se passe pour un noyau.

Donc le nombre de noyaux restant à l'instant n.Δt est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres N et $\left(1-\frac{\lambda\, t_n}{n}\right)^n$.

Il faut remarquer que le nombre de noyaux restant à l'instant $t_n = n.\,\Delta t$ est aléatoire !

On convient alors de s'intéresser au nombre moyen.

Celui-ci sera considéré comme **LE** nombre de noyau restants à l'instant $t_n = n.\,\Delta t$:

$$N(t_n) = N\left(1-\frac{\lambda\, t_n}{n}\right)^n .$$

Jusqu'ici, nous avons travaillé avec des temps *discrets*. L'instant t ne peut être qu'un multiple de Δt. Pour avoir un « maillage » du temps plus fin, on choisit un Δt plus petit. Ce qui fait que pour un t fixé, n devra être « assez grand ».

On s'intéresse donc à $\lim\limits_{n\to+\infty} N\left(1-\frac{\lambda.t}{n}\right)^n$.

Or une activité[15] permet de montre que cette limite est $N\,e^{-\lambda t}$. D'où la conclusion :

la désintégration radioactive se modélise dans le temps par $N(t) = N\,e^{-\lambda t}$.

A partir de là, on dit que cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$y' = -\lambda\, y.$$

En passant à la différentielle, on écrit :

$$dN(t) = -\lambda\, N(t)\, dt.$$

et on énonce :

« la variation du nombre de noyau à l'instant t est proportionnelle au nombre de noyau présents à l'instant t et à la durée dt considérée ».

En appliquant les différentielles aux accroissements $\Delta N(t) = -\lambda\, N(t)\, \Delta t$, donc :

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}(t) = -\lambda\, N(t) .$$

Sachant que toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda\, y$ sont de la forme $y(t) = C\,e^{-\lambda t}$, on peut alors retourner vers l'expérience et tester le modèle par l'étude du radon 220 selon le mode expérimental évoqué plus haut et décrit en détails ci-dessous.

D. Second T.P. de physique.

I . Objectifs :

On étudie l'évolution du nombre de noyaux radioactifs dans le temps.

II . Etude expérimentale de la désintégration radioactive du radon 220.

1. Principe de l'expérience.

Soit N(t) le nombre de noyaux radioactifs dans l'échantillon à l'instant de date t.

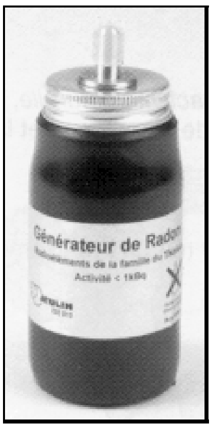
Aucun dispositif expérimental ne permettant d'atteindre directement cette valeur, on utilise la conclusion de la modélisation mathématique précédente : $\Delta N(t) = - \lambda\ N(t)\ \Delta t$.

Le rapport $-\Delta N(t)/\ \Delta t$, appelé « activité » et noté A(t), donne une valeur proportionnelle à N(t) : $A(t) = \lambda\ N(t)$.

En résumé, pour **étudier expérimentalement l'évolution d'une population N(t)** de noyaux radioactifs, **on mesure ΔN(t)** (ou plutôt un nombre qui lui est proportionnel), puis **on calcule et étudie l'évolution de l'activité A(t)** de cet échantillon au cours du temps.

2 . Mise en oeuvre de l'expérience.

a. Description du matériel utilisé et du protocole.

• Le générateur de radon est une fiole étanche (voir ci-contre 1) On considère que la concentration de radon 220 dans cette fiole est constante. • On crée une dépression dans une deuxième fiole de même volume, dite fiole scintillante. On met en communication le générateur de radon et la fiole scintillante. La dépression aspire des noyaux de radon dans la fiole scintillante. • On désolidarise les deux fioles. La fiole scintillante est alors placée dans la chambre d'un photomultiplicateur (voir ci-contre 2) qui détecte des décharges électriques. Pendant une durée Δt , le nombre d'évènements détectés est **proportionnel** au nombre de noyaux transmutés.	 1) Générateur de radon.	 2) La fiole scintillante placée dans la chambre à photomultiplicateur.

b. Manipulation.

Le protocole expérimental est conçu de sorte que le nombre de noyaux de radon 220 introduits dans la fiole scintillante est proportionnel à la dépression ΔP réalisée.

Nous ne nous attarderons pas ici sur la justification de cette affirmation.

Cependant, il nous paraît important de souligner la force de toutes les « astuces » expérimentales : pour connaître N(t), on mesure une autre grandeur, A(t), que l'on considère proportionnelle, proportionnalité établie dans une théorie préalable.

On mesure le nombre de désintégrations lors de deux prélèvements successifs de radon 220, l'une à -50 kPa, l'autre -70 kPa.

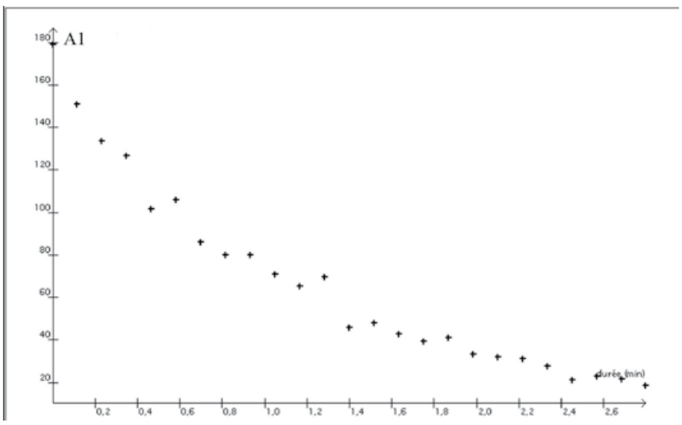
Pour chaque expérience, les comptages sont démarrés toutes les 7 secondes. La durée de chaque comptage est de 5 secondes (les 2 secondes restantes permettant de réinitialiser le compteur).

3 . Traitement des mesures.

a . Etude de la désintégration sous –50 kPa.

α. Représentations graphiques.

A partir d'un fichier de relevés expérimentaux fourni, les élèves calculent les rapports
$- \Delta N(t)/ \Delta t = A_1(t)$. Ils représentent alors le nuage de points $(t ; A_1(t))$:



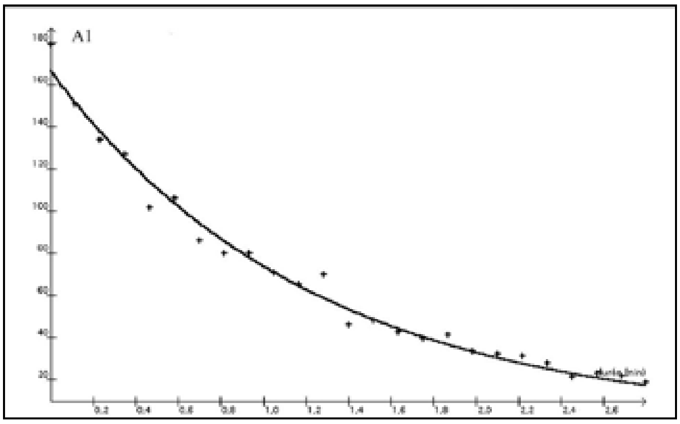
Le logiciel[16] utilisé permet la recherche d'une modélisation du nuage de points par une courbe, et il offre la possibilité de valider la pertinence de ce choix en calculant le coefficient de corrélation.

Les élèves doivent choisir un « modèle » prédéfini parmi les suivants : droite, parabole, exponentielle croissante, exponentielle décroissante, sinusoïde, sinusoïde amortie. Le **modèle exponentielle décroissant** donne ici le meilleur coefficient de corrélation.

Le logiciel donne alors automatiquement l'expression et la représentation d'une fonction f (qu'il appelle A1m) sous la forme $f(t) = a\ .\ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

Ceci valide le modèle précédent : $A(t) = A(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, et comme $A(t) = \lambda\, N(t)$ on a donc $N(t) = N(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

τ , appelée constante de temps, est liée à la constante radioactive λ par la relation $\tau = \frac{1}{\lambda}$.



β. *Demi-vie.*

La durée au bout de laquelle l'activité initiale est divisée par 2 est appelé le temps de demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$.

Le pointeur du logiciel en permet une détermination graphique en partant de t = 0. En expérimentant plusieurs fois la même procédure, les élèves constatent l'indépendance par rapport à l'instant de départ choisi, ce qui est caractéristique de ce type de fonction et du phénomène.

γ. *Constante de temps (τ).*

Etant donné que $f(t) = a\ .\ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, on a $f'(t) = -a\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, donc $f'(0) = \frac{-a}{\tau}$.

On en déduit que l'équation de la tangente au point d'abscisse t = 0, est[17] :

$$x = \frac{-a}{\tau}\ t + a.$$

Pour x = 0, on a t = τ. Les élèves déterminent donc la constante de temps en traçant au point d'abscisse t = 0, la tangente à la courbe modélisée (A1m), et ils obtiennent la valeur de τ en prenant l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des temps.

De ce qui précède, on déduit une relation entre τ et $t_{\frac{1}{2}}$: $t_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2$[18].

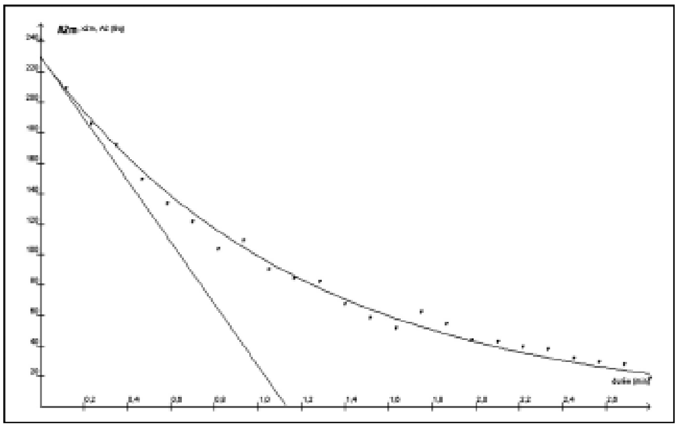
Il nous reste à faire une dernière vérification expérimentale.

En effet dans le modèle développé, λ ne dépendait pas de N. On va regarder si la constante de temps ne dépend pas de N en étudiant la désintégration sous –70 kPa.

<u>b. Etude de la désintégration sous –70 kPa.</u>

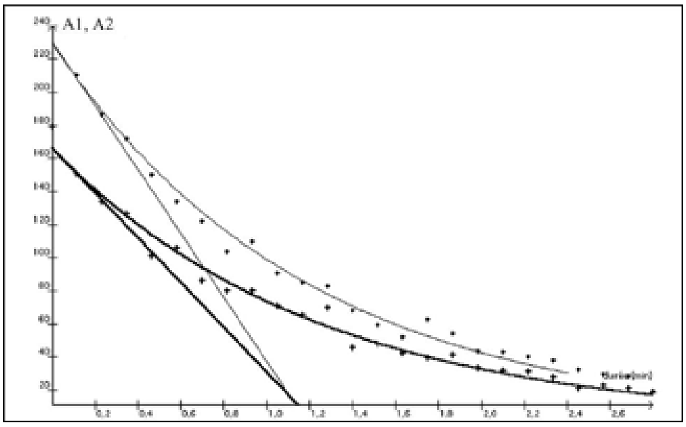
On refait le travail précédent pour une dépression de –70 kPa.

L'activité est alors appelée $A_2(t)$, la courbe modélisée A2m.



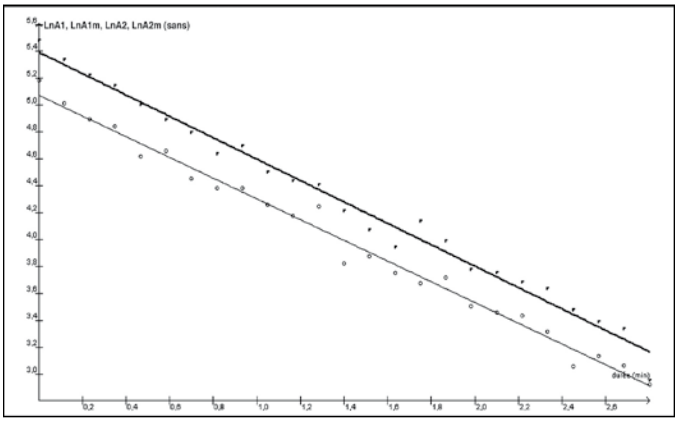
<u>c. Etude comparée des deux activités.</u>

On affiche simultanément à l'écran les graphiques correspondant aux deux expériences :



On constate alors que la constante de temps est bien indépendante de la dépression, donc du nombre de noyaux.

En physique, on le vérifie aussi en passant aux logarithmes. A partir de $A(t) = A(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, on obtient $\ln(A(t)) = -\lambda\, t + \ln(A(0))$, ce qui est en accord avec le fait d'obtenir graphiquement deux droites parallèles de coefficient directeur $-\lambda$:



On cherche à valider que l'activité est proportionnelle au nombre de noyaux. Pour cela, on calcule les rapports $\frac{A_2(t)}{A_1(t)}$ à chaque date.

En effet,

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{-\Delta N_2(t)/\Delta t}{-\Delta N_1(t)/\Delta t} = \frac{\Delta N_2(t)}{\Delta N_1(t)} = \frac{-\lambda\, N_2(t)\,\Delta t}{-\lambda\, N_1(t)\Delta t} = \frac{N_2(t)}{N_1(t)}$$

.

On constate bien que les rapports $\frac{A_2}{A_1}$ sont « à peu près » constants, proches de la valeur 1,4 qui correspond au rapport des dépressions, donc du rapport $\frac{N_2}{N_1}$.

E. Conclusion.

Ce travail ne prétend pas être original sur le fond :
les aspects mathématiques sont connus et déjà développés ailleurs[19],
sur les aspects physiques, c'est la pratique *réelle* de nos classes que nous avons tenté de retranscrire.

Notre apport se résume en fait en un regard *objectif*. Loin de prendre telles quelles certaines affirmations, notamment dans les textes officiels[20], mais aussi dans les manuels, nous nous sommes interrogés sur ce que les élèves pouvaient vivre pendant cet enseignement de la radioactivité. Nous avons été obligés de constater que certains aspects étaient présentés « à l'envers », et nous avons seulement essayé de les remettre à l'endroit[21].

Notes

[1] Nous nous sommes contentés d'une approche maths-physique.
[2] Nous précisons la signification de cette expression en page 3.
[3] On trouvera sur le site de l'IREM de Toulouse au groupe de recherche « maths-physique-lycée », le diaporama ayant servi de support à cet atelier.
[4] Depuis septembre 2007, l'usage de ce dispositif en présence d'élèves est interdit.
[5] (note rajoutée par les auteurs) En contradiction avec la phrase du document d'accompagnement de mathématiques (p. 77) :
« L'observation montre que le nombre de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps *t* est une quantité aléatoire ».
A moins que le mot « aléatoire » n'ait pas le même sens.
[6] Sur sept manuels de terminale S parus en 2006, le numéro moyen de la première page du chapitre de probabilités est 302 sur un nombre moyen de pages qui est 455.
[7] B.0. n°4 30 août 2001, annexe page 64
[8] C'est d'ailleurs la prochaine étape que l'on compte mener dans la classe de terminale où a été mise en pratique cette démarche.
[9] La référence à la loi de Poisson, qui n'est pas au programme de mathématiques est présente dans le document d'accompagnement de physique (page 31), alors qu'on parle en fait assez peu de la loi binomiale.
[10] Dans la plupart des établissement, on se contente de donner aux élèves un fichier de relevés expérimentaux.
[11] Le logiciel appelé ® « Atelier scientifique Généris 5+ ».
[12] Ces modèles sont prédéfinis par le logiciel.
[13] Il faudrait en particulier évoquer la question du domaine de validité de ces hypothèses. La première est bien sûr énoncée pour Δt « petit ».
[14] ou un dé, si on fait une simulation. On choisit un nombre de 1 à 6 et on considère que après lancer, si le dé tombe sur ce nombre, il est « désintégré ».b Ici donc p est égal à 1/6.
[15] Voir document d'accompagnement de mathématiques page 83.
[16] Le logiciel appelé ® « Atelier scientifique Généris 5+ ».
[17] On utilisera la forme $x = p\ t + m$, qui est celle du logiciel dont disposent les élèves. Celui-ci donne en cliquant sur la droite l'équation de la tangente.
[18] Voir l'article « La demi-vie en radioactivité : un outil pour résoudre des problèmes » paru dans le « Fil d'Ariane », n°20 mars 2004, Irem de Toulouse ;
[19] On pourra citer l'article de André Warusfel paru en janvier 2004 dans la revue RMS n°1.
[20] Par exemple, on ne manquera pas d'être étonné par cette phrase du document d'accompagnement de mathématique : « Dans ce texte, l'accent est mis sur la synergie nécessaire entre physique et mathématiques pour une bonne compréhension du phénomène, en particulier concernant les deux aspects suivants : (i) l'étude empirique de la désintégration radioactive conduit à considérer un objet mathématique nouveau pour les élèves, appelé équation différentielle et (ii) on établit un modèle physique microscopique de la désintégration, qui rend compte de la loi macroscopique observée pour l'évolution de la valeur moyenne du nombre de noyaux existant à un instant donné. »
(annexe du document d'accompagnement de mathématiques pages 75-76, reproduit dans le document d'accompagnement de physique pages 77-78)
[21] Voir les autres travaux de notre groupe sur le site de l'irem de Toulouse : http://irem-tlse.ups/spip

Le rôle du dessin dans la résolution d'un problème

André Antibi[1] & Mária Bakó[2]

Résumé : Pendant la résolution des problèmes de géométrie le dessin peut être : un support à l'image mentale, une aide à la conjecture, une aide à la démonstration, une aide à la formulation du problème (l'énoncé devient plus court). Néanmoins le dessin représente toujours un cas particulier du problème et il peut aussi être la cause des difficultés pour les élèves. Dans cet article nous présentons une expérience où nous analysons la question : *Quels sont les types de problèmes où la figure peut compliquer la résolution ou lieu de la faciliter ?*

1. Introduction

Le dessin devrait permettre de faciliter l'enseignement des mathématiques et ainsi de le rendre moins abstrait et plus accessible à un grand nombre d'élèves. Or en France notamment, le dessin ne joue pas ce rôle pleinement : une majorité d'enseignants et donc d'élèves par tradition, restent très méfiants dans l'utilisation du dessin [1].
Dans les manuels, les exercices de géométrie proposés sont en général accompagnés d'un dessin, pour faciliter le travail des élèves. Pour un exercice de géométrie plane l'énoncé général du problème et le dessin (nécessairement un cas particulier) peut entraîner une légère confusion car par exemple un « objet triangle général» est représenté par un « dessin triangle particulier ». Pour la géométrie dans l'espace, la situation est moins claire, en ce sens que l'analogue du dessin, pour une situation tridimensionnelle, n'est pas un dessin à deux dimensions, mais une maquette en volume [2]. En effectuant le dessin on « perd une dimension », c'est pourquoi en géométrie dans l'espace le dessin est beaucoup plus éloigné, de la situation présentée dans l'énoncé d'un problème, qu'en géométrie plane. La perte de dimension cause bien sûr une grande perte d'information car un point du dessin peut correspondre à n'importe quel point de la droite de projection.

Malgré les inconvénients mentionnés nous utilisons des dessins pour la résolution des problèmes de géométrie car le dessin peut être :

- une représentation d'objets et de notions,
- un résumé d'information pour aider la mémorisation,
- un support à l'image mentale,
- une aide à la conjecture,
- une aide à la démonstration,
- une aide à la formulation du problème (l'énoncé devient plus court),
- une aide au professeur pour mieux faire comprendre aux élèves la solution d'un problème [1].

Si le dessin n'est pas donné par le manuel les professeurs encouragent leurs élèves en réaliser pour découvrir les informations qui ne sont pas données dans l'énoncé mais dont on a besoin pour résoudre le problème. Néanmoins pendant l'évaluation en général les professeurs n'attribuent pas de points pour le dessin.

---

[1] Directeur de l'IREM, Université Paul Sabatier, Toulouse, France
e-mail : antibi@cict.fr
[2] Université de Debrecen, Faculté de Pedagogy, Hongrie
e-mail : mariabako@inf.unideb.hu

Souvent, le dessin à main levé est insuffisant et on a besoin de constructions géométriques pour voir clairement les différentes situations. L'enseignement de la géométrie peut être aidé par des logiciels dynamiques (comme Cabri, Geometer's Sketchpad). A l'aide de ces logiciels on peut facilement étudier une suite de cas qui peut rendre plus évidentes les relations découvertes (par exemple que les médianes d'un triangle sont concourantes, deux droites sont parallèles, perpendiculaires) [3], [4].

Dans le~~s~~ cas de DGS [Dynamic Geometry Systems], les relations cherchées se trouvent sur les suites des dessins mais ce fait ne peut pas être accepté comme une démonstration. « Le graphique ne se substitue pas à la démonstration classique. Il peut servir à guider, à aider à chercher, à mieux expliquer » [1].

Comme le dessin représente toujours un cas particulier du problème, il peut aussi être la cause de~~s~~ difficultés pour les élèves. Par exemple ils considèrent qu'un triangle isocèle a toujours son axe de symétrie vertical. Pour ces raisons on peut se poser la question suivante : ***Quels sont les types de problèmes où la figure peut compliquer la résolution ou lieu de la faciliter ?***

L'article est structuré comme suit : Dans le chapitre suivant nous présentons l'expérience effectuée. Le chapitre 3 comporte les résultats de cette expérience. Le chapitre 4 contient les conclusions.

2. L'expérience

Personnes interrogées :

- 30 élèves de Terminale S (à l'age moyen de 18 ans), lycée Saint Sernin de Toulouse (France), le 13 mai 2003,
- 24 élèves de $1^{\text{ère}}$ S (à l'age moyen de 17 ans), lycée Victor Hugo de Colomiers (France), le 27 mai 2003,
- 17 élèves de $11^{\text{ième}}$ (à l'age moyen de 17 ans), lycée Fazekas Mihály de Debrecen (Hongrie), le 18 octobre 2004,
- 13 élèves de $9^{\text{ième}}$ (à l'age moyen de 15 ans), lycée Fazekas Mihály de Debrecen, le 18 octobre 2004.

Présentation du test. Précisions diverses :

Nous rappelons que la géométrie dans l'espace n'apparaît pas aux programmes de ces classes. Néanmoins les questions posées nous permettaient d'effectuer l'expérience dans n'importe quelle classe de lycée.

Trois types d'exercices ont été proposés : un exercice de calcul, un exercice qui demandait de déterminer l'intersection de deux plans et un exercice de démonstration. Dans le cas des deux premiers on n'a pas demandé la résolution mais seulement de choisir, parmi trois types de résolution, ceux que l'élève trouvait le plus facile et le moins facile en justifiant les réponses. Pour l'exercice de démonstration nous avons demandé clairement s'il était possible de le résoudre sans faire la figure. Pour ceux qui ont répondu OUI la résolution du problème a été demandée. Les objectifs pour lesquels ces exercices ont été proposés sont d'étudier les réponses et justifications possibles d'élèves concernant l'utilisation d'un dessin dans les cas où l'exercice peut être résolu facilement sans dessin[4].

La séance a durée 20 minutes environ, en présence du professeur de mathématiques, les exercices ont été proposés sur des feuilles différentes qui ont été distribuées l'une après l'autre.

3. Les résultats de l'expérience

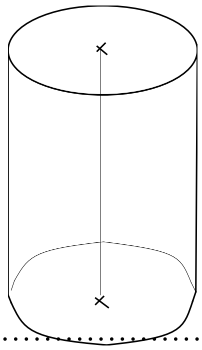
3.1. Le premier exercice proposé

On pose le problème suivant (que l'on ne demande pas de résoudre) :

Calculez la hauteur d'un cylindre de révolution sachant que son volume est 3,24cm^3 et que l'aire du disque de base est 5,4cm^2.

A. Dans quel cas la résolution semble-t-elle la plus facile ?*

1. Résolution sans figure ………………………………………………… □
2. Résolution après avoir préalablement fait (toi-même) une figure ………… □
3. Résolution, la figure ci-dessous étant donnée dans l'énoncé ……………… □



4. Je ne sais pas …………………………………………………………… □

B. Dans quel cas la résolution semble-t-elle la moins facile ?*

1. Résolution sans figure ………………………………………………… □
2. Résolution après avoir préalablement fait (toi-même) une figure ………… □
3. Résolution, la figure ci-dessus étant donnée dans l'énoncé……………… □
4. Je ne sais pas …………………………………………………………… □

Justifiez votre réponse au **A** et au **B** :

3.1.1. Résultats de l'exercice I.

		Terminale S (30 élèves)	$1^{ère}$ S-8 (24 élèves)	$11^{ième}$ (17 élèves)	$9^{ième}$ (13élèves)	Total
A.La résolution semble la plus facile	Résolution sans figure	8	10	7	4	29
	Résolution après avoir préalablement fait (toi-même) une figure	10	3	4	3	20
	Résolution, la figure ci-dessus étant donnée dans l'énoncé	12	11	5	6	34
	Je ne sais pas	0	0	1	0	1
Total		30	24	17	13	84

Tableau 1.

Nous pouvons observer que ce premier exercice proposé est un simple exercice de calcul qui peut être facilement résolu en utilisant les formules de l'aire et du volume du cylindre. On pourrait penser que dans ce cas-là la figure peut être vraiment négligée. Néanmoins si nous analysons les résultats dans le tableau 1., nous pouvons observer que 54 (sur 84) choisissent une résolution avec la figure et seulement 29 (sur 84) disent qu'il est plus facile de le faire sans figure**.** En ce qui concerne la question B. plus de la moitié (48 sur 84) trouvent que la résolution est moins facile sans la figure. Nous devons mentionner que pour cette question 10 élèves de $1^{ère}$ et 5 élèves de $11^{ème}$ ont choisi la réponse « je ne sais pas ».

<u>*Analyse des justifications données :*</u>

1. Résolution sans figure

Il est intéressant d'analyser les justifications données par les élèves sur ces questions. Trente élèves ont estimé que la résolution sans figure semble plus facile, parmi eux sept ont trouvé moins facile la résolution quand eux-même doivent construire la figure et vingt (parmi lesquels tous les élèves de $1^{ère}$) ont répondu 'je ne sais pas' (JNSP).

	Résolution directe	dur	Perte de temps	JNSP	Facile	NJ
A1. Résolution sans figure	26	-	2 (éviter)	-	1	1
B2. Résolution après avoir fait (toi-même) une figure	-	4	2	-		1
B4. JNSP	-	-	1	13	4	1

Tableau 2

<u>*Exemples de fiches*</u> :

« **A**. On sait que $V=A_{base} \cdot h$ pour un cylindre donc on *résout directement,*
B. ça *perd du temps* de faire la figure (n°14) »,
« **A**. Sans figure cela se résout par une série de calculs. (*résolution directe),*
B. Cela augmente la difficulté que de devoir faire la figure.(*dur*) (n°15)»,

2. Résolution après avoir préalablement fait (toi-même) une figure

Vingt élèves ont trouvé plus facile la résolution s'ils peuvent réaliser eux-même la figure. Il est intéressant de remarquer que seize d'entre eux mentionnent que la figure est un support dans la justification. Treize élèves ne séparent pas les justifications pour les questions A et B car si la figure est un support la résolution sans figure est moins facile.

<u>*Exemples de fiches :*</u>

« Une figure, surtout faite par soi-même, permet de mieux se rendre compte de ce qui est demandé. (n°25) » (*support*).
« Je fais la nomenclature et je place des noms pour repérer différentes parties, et écrire l'équation. Sans figure, je dois connaître l'équation par cœur, tandis que je préfère la retrouver. (n°11) » (*support*).

3. Résolution, la figure ci-dessus étant donnée dans l'énoncé

Trente-quatre élèves ont trouvé plus facile la résolution de l'exercice avec la figure donnée mais seulement vingt ont essayé de justifier séparément leur réponse aux questions **A** et **B** ; les autres, comme dans le cas précédent, ont donné une seule justification pour les deux questions
<u>*Exemples de fiches :*</u>

« **A.** Si la figure est donnée, on peut *mieux visualiser* le problème.
B. Sans figure c'est beaucoup plus dur et l'on peut *se tromper*. (n°3) »
« Il est plus facile de faire un calcul en ayant une figure comme *support.* (n°4)»
« Une figure ça permet de se représenter le cylindre, on voit apparaître le disque. **Ca rappelle les formules** de l'aire de base et du volume total.(…) (*support*). (n°10) »
« **A.** Si elle est donnée, ça montre une grande reconnaissance de la flemme des élèves par les profs qui font les exos (*divers).*
B. Si la figure n'est pas donnée c'est trop *dur* de la faire soi-même alors autant ne pas la faire. (n° 21) »

3.2. Le deuxième exercice proposé

On pose le problème suivant (que l'on ne demande pas de résoudre) :

Dans l'espace A, B, C, D sont quatre points distincts non coplanaires. Déterminez l'intersection des plans (ABC) et (ABD).

Les questions posées ont été les mêmes que dans le cas de premier exercice.

3.2.1. Résultats de l’exercice II.

Comme on l’a mentionné auparavant, les exercices ont été proposés séparément.

		Terminale S (30 élèves)	1ère S-8 (24 élèves)	11ième (17 élèves)	9ième (13 élèves)
A. La résolution semble la plus facile	Résolution sans figure	1	0	0	0
	Résolution après avoir préalablement fait (toi-même) une figure	5	2	2	2
	Résolution, la figure ci-dessus étant donnée dans l’énoncé	23	18	14	11
	Je ne sais pas	1	4	1	0
B. La résolution semble la moins facile	Résolution sans figure	23	22	16	12
	Résolution après avoir préalablement fait (toi-même) une figure	3	0	0	0
	Résolution, la figure ci-dessus étant donnée dans l’énoncé	0	0	0	1
	Je ne sais pas	4	2	1	0

Tableau 3

Nous pouvons observer que ce deuxième exercice proposé peut être aussi facilement résolu sans faire la figure car nous savons que l’intersection des deux plans distincts avec deux points communs est un droite qui contient ces points. En plus la construction d’une figure correspondant est assez difficile, elle peut plutôt compliquer qu’aider à la résolution. Néanmoins les résultats obtenus (Tableau 3.) montrent que la plupart des élèves (66 sur 84) préfèrent avoir une figure donnée et ils trouvent moins facile la résolution sans figure car si on donne la figure la réponse est évidente.

Analyse des justifications données :

Comme on peut observer dans le tableau 3, on a eu seulement trois réponses JNSP sur la question **A**. Deux élèves (un français et un hongrois) ont répondu JNSP sur la question **B** aussi : « La figure peut aider, mais on voit facilement que (ABD)∩(ABC)=(AB). Ce sont les deux seuls points communs. »

L’élève (n°14) était le seul qui a choisi la réponse « Résolution sans figure » pour la question **A**. Pour la question **B** il a choisi la deuxième réponse, le cas quand on fait soi-même une figure. Il justifie ces choix en disant que l’exercice est du type où on peut donner une *solution directe* et la réalisation d’une figure est une *perte de temps.*

Quatorze élèves ont choisi la résolution avec une figure réalisée par eux-mêmes et douze d’entre eux l’ont trouvée moins facile sans figure. Les justifications ont été vraiment différentes mais on peut retrouver les rubriques de premier exercice : support, meilleure visualisation. Deux élèves ont marqué « idem fiche précédente ». Pour la question B on a eu seulement quatre réponses explicites qui précisent que la résolution sans figure demande une vision mentale, sans figure la visualisation est moins bonne et respectivement « je ne sais pas à quoi la figure ressemble si je n'ai pas de figure (n°39) ». On peut donc rattacher ces réponses à la « vision mentale ».

Soixante-six élèves ont trouvé plus facile la résolution avec la figure donnée. Parmi eux soixante-deux ont choisi la « Résolution sans figure » pour la question **B.**

	Support	M. visual.	Fig. juste	divers	Non just.	Idem prec.
A3. Résolution, la figure étant donnée	25	10	15	5	9	2

Tableau 4

Comme pour l 'exercice précédent, la plupart des élèves ont donné une seule justification pour les deux questions. Dans ce cas seulement trente-quatre élèves ont justifié séparément la question **B**.

	Vis. mentale	Mal à vis.	Difficile	Non just.	divers	JNSP
B1. Résolution sans figure	4	9	8	9	3	1

Tableau 5

Exemples de fiches :

« **A**. Mieux vaut une figure pour *visualiser*, et comme la figure est donnée cela est plus clair : la réponse est déjà donnée.
B. Sans figure, il faut imaginer dans sa tête. (*vision mentale*). (n°11) »
« **A**. Grâce à la figure on voit tout de suite (*support*).
B. Sans figure, c'est flou (*divers*). (n° 15) »

Remarques :

Nous avons posé les mêmes questions pour deux exercices différents et les résultats montrent que les élèves réagissent différemment selon le type d'exercice. Dans le cas de premier exercice qui est un exercice de calcul et où la figure est très simple, les réponses sont plus partagées. Pour le deuxième exercice qui exige un dessin assez difficile à réaliser, 78% des élèves préfèrent avoir le dessin donné. Nous pouvons observer que dans les justifications des élèves dans le cas de **A3** (figure donnée), pour les deux exercices comportent les catégories « support » et « meilleure visualisation ». Comme il n'est pas facile de réaliser le dessin pour le deuxième exercice, on a une nouvelle rubrique : « figure juste ».

3.3. Le troisième exercice proposé

Peut-on résoudre sans faire de figure le problème suivant :

SABCD est une pyramide de base carrée ABCD et de sommet S. I le milieu de [SA], J le milieu de [SB].
1. Que peut-on dire des droites (IJ) et (AB) ?
2. Que peut-on dire des droites (IJ) et (CD) ?

1. Oui ....
2. Non ....
3. JNSP............

Justifiez votre réponse :

3.3.1. Résultats de l'exercice III.

En analysant les résultats des exercices précédents on peut conclure que les élèves préfèrent plutôt avoir un dessin ou le construire pour résoudre un exercice. Comme vous pouvez l'observer, on a proposé comme troisième exercice un problème de démonstration et on a changé les questions. Nous nous sommes intéressés à ce que les élèves pensent de la résolution sans figure de l'exercice.

OUI	Vision mentale	25
	(essai de) démonstration	6
	Exercice simple	7
	Plus de temps	3
	Pas figure difficile	3
	Divers	4
	Non justifié	15
NON	Difficile à visualiser	8
	Plus de temps	4
	Eviter les erreurs	1
	Divers	2
	Non justifié	3
JNSP	Vision mentale	2
	Difficile	1

Tableau 6

Comme nous pouvons l'observer dans le tableau 6, **soixante-trois** (sur quatre-vingt quatre) élèves ont dit qu'il est possible de résoudre l'exercice sans figure. On peut également observer que la catégorie « plus de temps » figure pour les réponses OUI et NON aussi. Dans les deux cas les élèves disent que nous pouvons résoudre l'exercice sans figure mais la résolution prendra plus de temps.

Exemples de fiches :

OUI

« Il faut visualiser dans sa tête la pyramide qui est une figure connue, et c'est possible ». (n°3) (*Vision mentale*)
« **On fait une figure mais dans sa tête alors ça compte pas** » (n°17) (*Vision mentale*)
« On peut résoudre sans figure mais il vaut mieux en faire une, car cela peut aider » (n°3) (*non justifié*)
« il faut + *de temps* pour le résoudre » (n°24)

NON

« Tout dépend de l'ordre des lettres, et pour cela il faut faire une figure. » (n°9) (*divers)*
« Je ne peux pas visualiser ces droites sans figure » (n°43) (*Difficile à visualiser*)

3.4. Le quatrième exercice proposé

Si vous avez répondu OUI, résolvez sans faire de figure le problème en justifiant brièvement vos réponses.

SABCD est une pyramide de base carrée ABCD et de sommet S. I le milieu de [SA], J le milieu de [SB].
1. Que peut-on dire des droites (IJ) et (AB) ?
2. Que peut-on dire des droites (IJ) et (CD) ?

Comme on peut l'observer dans l'énoncé, cet exercice à été proposé seulement aux élèves qui ont répondu « Oui » à la question précédente. Néanmoins quatre élèves qui ont choisi la réponse « Non » ont résolu avec succès cet exercice.

3.4.1. Résultats de l'exercice IV.

		Terminale (26 élèves sur 30)	1ère S-8 (18 élèves sur 24)	11ième (15 élèves sur 17)	9ième (7 élèves sur 13)
1. Que peut-on dire des droites (IJ) et (AB) ?	Théorème de la droite des milieux	17	8	9	4
	Théorème de Thalès	8	3	-	2
	Justification erronée	1	1	1	-
	Non justifié	-	5	5	1
	JNSP	-	1	-	-
2. Que peut-on dire des droites (IJ) et (CD) ?	Justification correcte	22	8	9	4
	Justification erronée	1	2	1	2
	Non justifié	3	6	5	1
	JNSP	-	1	-	-

Tableau 7

Le premier point de l'exercice peut être résolu à l'aide du Théorème de la droite des milieux ou à l'aide de la réciproque du théorème de Thalès. Le tableau nous montre que la plupart des élèves qui ont fait une démonstration correcte, ont utilisé le Théorème de la droite des milieux. Treize élèves ont utilisé le Théorème réciproque de Thalès mais seulement un d'entre eux a indiqué qu'il s'agissait du théorème réciproque. Nous pouvons observer qu'il y a respectivement onze et quinze réponses non justifiées et respectivement trois et six justifications erronées. Il y a un seul élève de 1ère qui a écrit qu'il s'était trompé concernant la question précédente car il ne pouvait pas résoudre cet exercice sans faire la figure.

4. Conclusion

Nous avons effectué l'expérience en France et en Hongrie. Nous pouvons observer qu'il n'y a pas de différences significatives entre les résultats et les réponses françaises et hongroises.
Le premier exercice proposé dans le questionnaire était un simple exercice de calcul mais seulement 35% d'élèves interrogés ont préféré le faire sans figure. Dans le cas du deuxième exemple la réalisation de la figure est plus difficile que la résolution mais un seul élève a choisi la résolution sans figure, la plupart (76%) ont préféré avoir un dessin donné. Néanmoins il est intéressant de remarquer que dans le cas du dernier exercice où la question était posée autrement (Peut-on résoudre sans faire de figure...) 77% d'élèves ont répondu « oui ». 81% d'entre eux ont résolu correctement le premier et 68% le deuxième point de l'exercice.

Dans l'enseignement de la géométrie les professeurs encouragent leurs élèves à réaliser un dessin pour découvrir les informations qui ne sont pas données dans l'énoncé mais dont on a besoin pour résoudre le problème. Néanmoins quelquefois le dessin peut plutôt compliquer qu'aider la démonstration car la réalisation du dessin est plus difficile que la résolution du problème. Grâce à la complétude de la géométrie on pourrait résoudre la plupart des exercices en utilisant différentes méthodes de démonstration automatiques [6]. Néanmoins les élèves se sentent plus sûr d'eux-mêmes s'ils peuvent utiliser un dessin comme support. On peut observer que la formulation de la question joue aussi un rôle essentiel car la réalisation d'un dessin pour la résolution d'un problème de géométrie est un phénomène de tradition. Comme nous l'avons observé, dans le questionnaire proposé les élèves peuvent résoudre les exercices sans faire un dessin mais ils préfèrent d'en avoir un comme support à l'image mentale. Ces images mentales représentent la structure tridimensionnelle des objets [7].

Bibliographie

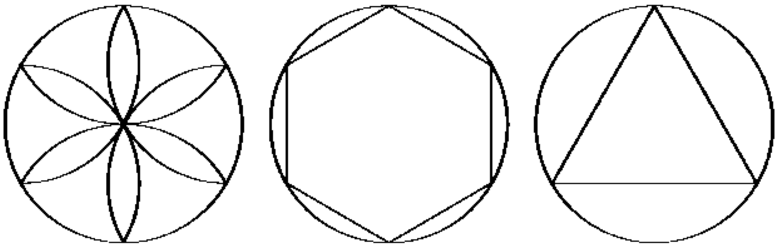
[1] A. Antibi, Graphique, démonstration et rigueur, Bulletin APMEP n°411, Toulouse, 1997
[2] B. Parzysz, Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1989
[3] C. Laborde et B. Capponi, Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(1), 1994, p. 165-210
[4] R. Cuppens, Avec Cabri-Géomètre II, jouez...et faites de la géométrie, APMEP, Paris, 2000
[5] B. Parzysz, « "Knowing" vs "Seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. Educational Studies in Mathematics 19 (1988) 79-92
[6] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao et Jing-Zhong Zhang, Automated Production of Traditional Proofs in Solid Geometry, Journal of Automated Reasoning, 1995, p. 257-291
[7] R.N. Shepard et L.A. Cooper, Le retournement mental des objets, Pour la Science n°88, p.40-47

La géométrie : l'art de raisonner juste sur des figures fausses(*)

Roger Cuppens(**)

C'est ainsi que dans ma jeunesse on définissait la géométrie. Mais qu'est-ce qui pouvait bien justifier cette formule ?

On commençait par des observations du monde réel avec ses objets familiers : cubes, boules, … On pouvait aussi sur une feuille de papier faire des dessins à la règle et au compas, par exemple une fleur à six pétales et dégager à partir de là les notions de cercle, d'hexagone régulier, de triangle équilatéral, …



On étudiait les divers quadrilatères… Etc.

L'une des difficultés de l'enseignement consistait alors à passer de ce monde réel à un monde virtuel peuplé d'objets de base : points, droites et cercles (si on fait de la géométrie plane) auxquels on ajoute les plans, les sphères, … (si on fait de la géométrie dans l'espace).

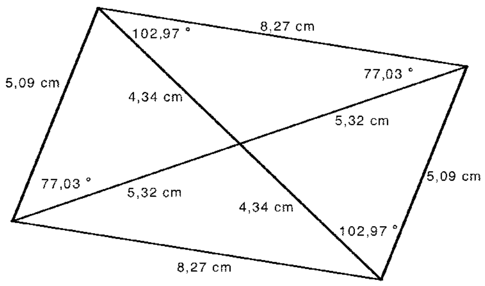
On commençait par la géométrie plane en introduisant à la Euclide les points (« objets sans dimension ») et les droites (« objets à une dimension ») reliés par des propriétés appelées axiomes ou postulats telles que : « Par deux points passe une droite et une seule » (cf. l'introduction de [3]).

À partir de ces objets de base, on définissait des objets plus compliqués tels que cercles, triangles, …, des propriétés telles que perpendicularité, parallélisme, … et on étudiait des problèmes où on partait d'une figure composée d'un certain nombre d'objets reliés par certaines propriétés et où on cherchait à découvrir et à démontrer de nouvelles propriétés de la figure. Par exemple, on définissait une figure(1) appelée « parallélogramme » et on trouvait des longueurs égales, des angles égaux, le fait que les diagonales se coupent en leur milieu, etc.

(*) Cet article a été écrit comme réponse à l'article de Claude Mattiussi [7].

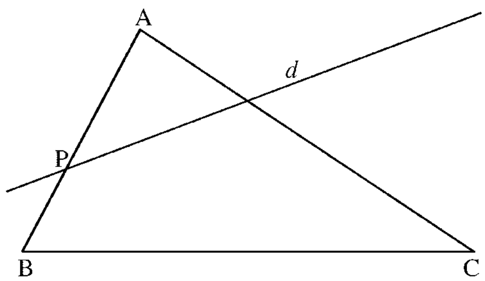
(**) Professeur émérite à l'Université Paul Sabatier. Groupe Géométrie dynamique de l'IREM de Toulouse.

(1) Les travaux de didactique ont employé le mot *figure* pour les objets du monde virtuel et *dessin* pour une représentation de cette figure dans le monde réel, alors que précédemment l'on employait le mot figure pour de tels dessins : il faudrait en conséquence modifier le titre de cet article.



Pour les démonstrations, on utilisait au début la notion de triangles égaux (c'est-à-dire superposables dans un mouvement sans déformation, notion forcément intuitive) et on « démontrait » (par superposition virtuelle) les trois cas d'égalité des triangles qui servaient pendant longtemps comme seuls outils de démonstration (en interdisant le recours aux superpositions). Cette interdiction était une source de grande difficulté, mais on aurait pu la contourner en admettant les cas d'égalité comme axiomes de la théorie, la superposition étant alors une justification plutôt qu'une démonstration. Mais la réforme des mathématiques est arrivée … avec les conséquences que l'on connaît sur l'enseignement de la géométrie.

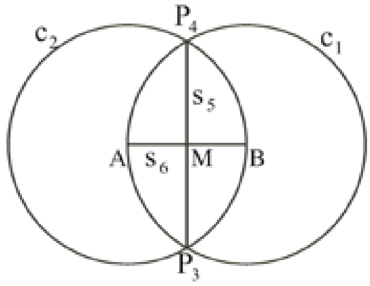
Durant cette période, Choquet a fourni dans [2] une axiomatique simple et complète de cette géométrie avec une vingtaine d'axiomes, ce qui rend un tel système impropre à une initiation. Ceci explique qu'avant la réforme on utilisait une axiomatique incomplète, des dessins rendant évidents certains faits. Par exemple, on admettait avec un dessin qu'une droite coupant un côté d'un triangle doit recouper un deuxième côté, ce qui semble évident sur le dessin ci-dessous, mais nécessite un axiome dans une théorie formalisée(2).

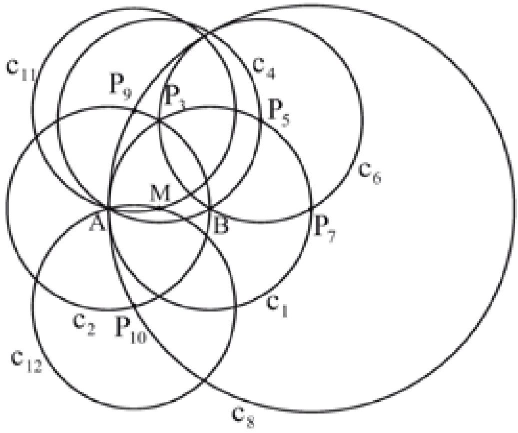


On utilisait en général divers dessins suivant les outils utilisés (main levée, …), les plus sophistiqués étant les constructions à la règle et au compas qui apportaient si on y mettait un peu de soin une assez bonne précision au moins pour les figures simples telles que celles de l'hexagone régulier. Par exemple, on a ci-dessous des constructions du milieu de deux points à la règle et au compas d'une part et au compas seul d'autre part(3).

(2) Cet axiome appelé *axiome de Pasch* en géométrie euclidienne doit être considéré comme la définition d'un « vrai » triangle en géométrie elliptique (cf. [4]).

(3) Rappelons que Mascheroni [7] a montré que toute construction à la règle et au compas pouvait être effectuée au compas seul, résultat qui avait été obtenu précédemment par Georg Mohr, mais était passé inaperçu.





Pour les figures plus compliquées, la chose était moins évidente et l'on sait que Lemoine [6] a développé sous le nom de *géométrographie* une étude de la complexité et de la précision des dessins géométriques.

Néanmoins on pouvait à un moment donné faire douter du sérieux d'un tel usage en fournissant par exemple un dessin « montrant » qu'un triangle quelconque est toujours isocèle (cf. [1], p. 146), ce qui surprend à première vue (même des professeurs en exercice) alors que la solution logique est simple : un tel dessin ne correspond pas à une figure mathématique.

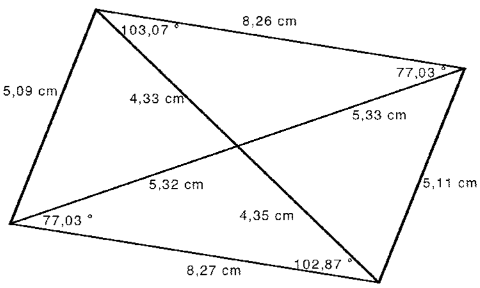
Depuis cette époque où on apprenait à développer la géométrie comme une théorie mathématique et à démontrer à partir des problèmes géométriques, est intervenue une double révolution : celle (interne) des mathématiques modernes qui a bouleversé l'enseignement des mathématiques et celle (externe) des TICE et en particulier des logiciels de géométrie dynamique.

Je ne parlerai pas ici de la première – d'autres l'ont fait avant moi et bien mieux que je ne pourrais le faire. Je veux simplement dans la suite fournir quelques éléments de réflexion concernant les logiciels de géométrie dynamique et qui me semblent nécessaires après la lecture de [8].

Une première chose qui saute aux yeux quand on utilise un tel logiciel est la grande précision des dessins obtenus. Mais il est faux de prétendre comme [8] qu'un logiciel comme Cabri fournit des dessins exacts. En effet, quand on entre à l'écran des points, des droites, des cercles, …, Cabri les transforme – de manière entièrement transparente à l'utilisateur – en équations et les calculs qu'il effectue sont des calculs approchés (avec une précision grande, mais limitée, disons de l'ordre de 10^{-9} cm) et ces calculs fournissent à l'écran un dessin dont la précision est encore diminuée par la taille des pixels utilisés. Bien que sans commune mesure avec les dessins papier/crayon, cette précision est forcément limitée et peut fournir dans certains cas des dessins difficilement interprétables, voire totalement faux(4).

Prétendre le contraire est regrettable pour deux raisons. La première est que l'une des tâches d'un enseignement moderne doit être de mettre en garde contre l'opinion commune qu'un ordinateur fournit toujours la vérité, même si ce que l'on y rentre est faux !

La deuxième est plus directement liée à la nature de la géométrie : née du monde réel, elle est utilisée dans le monde réel. Par exemple, un maçon évaluera « l'équerre » d'un mur en utilisant une corde à nœuds pour trouver (3,4,5). Il est évident que ces valeurs sont approchées, mais ceci n'a pas d'importance car le théorème de Pythagore permettant d'affirmer qu'un triangle (3,4,5) est rectangle a une certaine « stabilité » : un triangle « presque » (3,4,5) est « presque » rectangle(5). Ce fait, pourtant fondamental, est rarement enseigné dans les cours de géométrie. De même, un menuisier ou un tailleur de pierre aura besoin de tracer des droites « presque » parallèles. Au lieu de vouloir obtenir à tout prix des dessins « exacts » comme le souhaite [8] (au fait, pourquoi faire ?), ne ferait-on pas mieux, après avoir étudié le parallélogramme (qu'il est quand même facile de dessiner lorsqu'on a un outil « Droite parallèle » !) de faire réfléchir sur le dessin suivant (obtenu en faisant tourner deux des côtés d'un parallélogramme de 0,1°) :



et plus généralement d'apprendre à conjecturer à partir de valeurs approchés obtenues sur des dessins inexacts des valeurs exactes dans le monde virtuel de la géométrie ?

Bibliographie

[1] Michel CARRAL, *Géométrie*. Ellipses, 1995.

[2] Gustave CHOQUET, *L'enseignement de la géométrie*. Hermann, 1964.

[3] Roger CUPPENS, *Découvrir les géométries non euclidiennes en jouant avec Cabri-Géomètre II*. Tome I. Brochure APMEP n° 160, 2004.

[4] Roger CUPPENS, *Découvrir les géométries non euclidiennes en jouant avec Cabri-Géomètre II*. Tome II. Brochure APMEP n° 161, 2004.

(4) Le lecteur intéressé pourra trouver des expériences permettant d'étudier la précision de Cabri dans le chapitre 7 de [5].

(5) On voit que l'on peut moduler l'affirmation qu'en géométrie une propriété est vraie ou fausse. Je compte revenir dans un prochain article sur cette notion de stabilité.

[5] Jean-Jacques DAHAN, *La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-géomètre en mathématiques. Un essai de formalisation à partir de l'analyse de démarches de résolutions de problème de boîtes noires.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2005.

http://www-iam.imag.fr/ThesesIAM/ThesejjDahan.pdf

[6] Émile LEMOINE, *Géométrographie ou art des constructions géométriques*. Gauthier-Villars, 1902.

[7] Lorenzo MASCHERONI. *Géométrie du compas*, 1798. Réédité par la Librairie Scientifique Blanchard en 1957.

[8] Claude MATTIUSSI. *Constructions logiques avec Cabri*. L'Autan n° 1 (mai 2007), p. 45-49.

Le plaisir des mathématiques

par Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY[1]

Réminiscences. . .

La Revue de Mathématiques Spéciales, il y a une génération

Génération : période d'une durée approximative de trente-cinq ans, si l'on suit la définition qu'en donnent les dictionnaires. Récemment, je me suis replongé dans la Revue de Mathématiques Spéciales (RMS) d'il y a une génération car j'y recherchais un sujet d'agrégation particulier ; j'ai ainsi pu me remémorer des souvenirs enfouis et retrouver quelques « amusements » plaisants dont je fais part ici au lecteur d'aujourd'hui.

La période parcourue est celle qui va de l'année scolaire 1969-1970 à celle de 1972-1973. À cette époque, j'étais étudiant et la RMS que je consultais à la bibliothèque universitaire y arrivait mensuellement, pliée en deux, parfois avec ses pages non massicotées, sa couverture très fine de couleur rose, et son contenu qui concernait aussi bien les mathématiques que la physique-chimie. Le nom de Vuibert apparaissait toujours bien en évidence, ainsi que ceux des éditeurs-en-chef successifs comme Hennequin, Bacchus, Flory, puis Warusfel. . ., les publicités de quatrième de page parlaient essentiellement des livres (édités par Vuibert) de mathématiques (les Lentin et Rivaud), de physique (Annequin et Boutigny, je crois). . . J'ai été frappé en compulsant ces anciens numéros par la qualité de la présentation et typographie : c'était presque du papier glacé, tous les textes étaient saisis en imprimerie (l'envahisseur *Toutentek* n'était pas encore passé par là), avec ces lettres italiques au contour cursif si agréable.

Que lisait-on dans la RMS ? Cela dépendait des lecteurs, bien sûr, mais je ne suis pas sûr que, personnellement, j'y lisais les mêmes choses qu'aujourd'hui, pas dans le même ordre

1. Université Paul Sabatier de Toulouse.

en tout cas. Les problèmes d'écrits de concours ? Oui, plus ou moins, histoire de voir ce qui se faisait… toujours de longs et (souvent) beaux problèmes, ce qui a fait dire à un de mes collègues : « ce ne sont pas des problèmes de concours, mais c'est un concours de problèmes ». On y voyait aussi des sujets d'examens d'université : tel sujet d'Analyse posé en examen de MP1 ou PC1 de l'université X, un autre d'algèbre en MP2 du CSU (Centre Scientifique Universitaire) Y. Ces choses ont progressivement disparu de la Revue ; il est vrai que même les « Annales du DUES » ou « de DEUG » ne sont plus publiées depuis belle lurette.

Les notes mathématiques placées au début de la revue ? Ah oui, j'ai toujours apprécié ces textes, dont certains (comme dans le American Math Monthly) sont de véritables joyaux. J'ai parfois contribué à ces « notes » et y ai toujours trouvé du plaisir à le faire (rencontrant ainsi sans doute quelques lecteurs !). Et puis ? Eh bien surtout ces fameuses « Questions-réponses » qui, même aujourd'hui, constituent la première rubrique que je consulte quand la RMS (ou son successeur) arrive à la bibliothèque de mon département de mathématiques. En parcourant les questions-réponses des années universitaires citées au début, j'ai retrouvé des noms d'étudiants de l'époque devenus d'éminents mathématiciens depuis : professeurs en classes préparatoires, professeurs d'université, en France ou à l'étranger (des académiciens même). En voici des exemples :

– entre 1967 et 1969 : J. Moulin-Ollagnier (Lycée Champollion, Grenoble), J.-M. Exbrayat (Lycée Joffre de Montpellier), G. Pisier ; ce dernier, à qui je signalais la chose lors d'une récente visite à Toulouse, me confiait que c'étaient ses premières publications mathématiques…

– entre 1969 et 1971 : G. Pisier, H. Berestycki (Lycée Charlemagne), G. Cornuéjols (Lycée Buffon), Ph. Destuynder (Lycée Louis-le-Grand), A. Ravelli (Lycée Condorcet).

– entre 1971 et 1973 : A. Ravelli, G. Laumon (Lycée du Parc), etc. Je me suis même retrouvé à deux ou trois reprises, et une fois associé dans ma réponse à L.G. Vidiani.

Nous répondions à l'époque de manière manuscrite, ce qui m'a valu d'avoir mon nom retranscrit à l'imprimerie en « Mirriart-Vrruty » ou quelque chose comme ça. Parfois c'était simplement le numéro d'abonnement de celui qui avait répondu qui était signalé : « résolu par l'abonné 34067 ». Dans ce genre de rubrique, il y a des spécialistes, des « experts ès exercices », il en est de même aujourd'hui dans la RMS comme dans l'American Math Monthly ou la revue de l'APMEP. En évoquant ces années, je ne puis ne pas mentionner le fameux « Père Cubillo ». D'abord localisé à Ceuta (me semble-t-il) puis pendant longtemps à Madrid, il nous impressionnait car il répondait à presque toutes les questions (et la revue paraissait chaque mois !), aussi bien en mathématiques qu'en physique-chimie. Dans le même ordre d'idées, il y a deux ou trois ans, je m'exclamais auprès d'un collègue de mon université : « *Qui est ce diable de G. D… u qui répond à la plupart des questions, surtout aux plus difficiles* » ?

Les thèmes d'intérêt dans les sujets de concours évoluent avec le temps, par exemple les sujets d'agrégation des années évoquées ont peu de rapport avec ceux posés de nos jours. Je me souviens de ce sujet de mathématiques générales de 1971 sur lequel j'avais trimé, comme étudiant… J'en avais rédigé l'essentiel, aidé sans doute par quelque support (car je ne vois pas, aujourd'hui en tout cas, comment je pouvais le faire entièrement), mais je n'avais pas osé l'envoyer comme corrigé à la RMS... Le corrigé parut plus tard (en juillet 1972), une seule personne avait rédigé le tout, c'était J.-M. Arnaudiès, que j'allais croiser plus tard à Toulouse.

C'est à partir de 1980 que la RMS devenait exclusivement consacrée aux mathématiques. Plus tard, il y eut le passage au format réduit ; ensuite, vers 2003, après « un trou d'air », elle devenait « *La revue de la filière mathématiques* » (toujours avec le même sigle RMS).

Le Congrès International des Mathématiciens, une génération après

Le Congrès International des Mathématiciens (ICM) est cette grand-messe des mathématiques (ou des mathématiciens, comme l'indique son intitulé « *International Congress of Mathematicians* ») qui se tient tous les quatre ans et à l'occasion duquel sont décernées les médailles Fields. Le dernier en date s'est tenu à Madrid en août 2006, le prochain se tiendra à Hyderabad (Inde) du 19 au 27 juillet 2010. Si j'en parle, c'est pour évoquer rapidement l'ICM d'il y a une génération, celui de 1970 dont le cadre fut Nice, le dernier en France. En compulsant la liste des participants, j'ai bien sûr noté les noms des jeunes de l'époque, ces collègues auxquels l'administration demande ces temps-ci de préparer un relevé de carrière en vue du dossier de retraite, mais aussi des évolutions dans le nombre des participants et leur origine géographique. Le cas de l'Espagne est assez typique à cet égard : voici un pays qui envoyait moins de vingt-cinq mathématiciens à l'ICM de Nice (parfois sur leurs propres deniers, au dire de certains d'entre eux), et à qui la communauté internationale des mathématiciens demande d'organiser l'ICM une génération après ! C'est à ce genre d'indicateur qu'on mesure également les progrès d'un pays. Il est vrai qu'en 1970 on était encore sous Franco, le franquisme n'était pas véritablement un système qui poussait à la diffusion et circulation des idées (you see what I mean ?).

Le fait est que l'ICM de Madrid, auquel j'ai assisté, fut organisé et tenu de manière de maître, avec, de plus, une couverture médiatique sans précédent. La présence du roi à la séance inaugurale, le piment apporté par le refus de la médaille Fields par G. Perelman (du pain bénit pour les médias), y sont sans doute pour quelque chose. Serait-on capable d'organiser un tel événement aujourd'hui en France ? Le ministre de tutelle, voire le président de la République s'y déplaceraient-ils ? Sans revenir sur les faits saillants de cet ICM dont des comptes-rendus ont été largement diffusés, je m'arrête ici sur trois points : la séance inaugurale, la session sur la popularisation des mathématiques et celle sur la formation K-12 en mathématiques.

– La séance inaugurale. Comme je l'ai déjà dit, la présence du roi, mais aussi du ministre de l'éducation (une femme), du plus haut responsable de la région de Madrid (encore une femme), du maire de Madrid... ajoutait une solennité inhabituelle. Je me suis amusé à observer des collègues français, qui clament si fort qu'ils sont républicains et « populaires », se lever et applaudir celui qu'ils appelaient de manière obséquieuse « Sa Majesté le Roi » (comme on appelle « Son Altesse Sérénissime » d'autres personnages du même acabit)... La France a bien fait sa révolution il y a plus de deux cent ans, non ? Passons...

– Deux sessions importantes étaient consacrées l'une à la popularisation des mathématiques, l'autre à la formation K-12 en mathématiques (terme un peu barbare qui signifie les douze années qui vont du Kindergarden (d'où le K) à la fin du lycée). J'ai été frappé par les efforts que font certains pays pour la popularisation des mathématiques, certains comme l'Angleterre allant même jusqu'à accorder des décharges de service à des collègues universitaires qui acceptent de « parler des mathématiques à la société ». Nous n'en sommes pas là en France, mais cela pourrait être aussi utile que certaines décharges syndicales... Les actions « Maths en jeans », « Semaine de la science », associations scientifiques de types divers et variés, sont utiles et intéressantes, mais on y retrouve toujours les mêmes collègues... Les problèmes de la formation en mathématiques ont souvent été présents dans les colloques généraux de mathématiques, mais cette fois-ci à Madrid on sentait bien qu'une importance particulière lui était accordée (avec une variété et des divergences d'approches d'ailleurs, suivant les pays). Il est à noter que T. Tao, le tout jeune médaillé Fields de Madrid, écrit des livres d'exercices et des manuels de mathématiques (légers en poids et en prix) à destination de non spécialistes.

Et dans une génération ?

Peut-être alors les jeunes qui répondent aujourd'hui aux questions de la RMS ou qui ont participé à l'ICM de Madrid évoqueront-ils les évolutions qu'ils auront observées lors de leur carrière ? Qu'en sera t-il ? « L'avenir n'est écrit nulle part » : poncif de journalistes ; l'économiste J. M. Keynes disait : « Les prévisions sont difficiles... surtout si elles concernent l'avenir ». Quant à moi je m'en tiendrais à ce qu'expriment avec sagesse les vieux bergers basques : « *Lehen hala, orai hola, gero... ez jakin nola* »[1].

Rendez-vous donc en 2042.

1. Je traduis pour les quelques lecteurs non bascophones de la RMS : « *Avant c'était comme cela, maintenant c'est comme ceci, quant à savoir ce qu'il adviendra, ... personne n'en sait rien* ».

À propos de la constante macabre.
Essai d'analyse macro-didactique.

Première partie

Claude MATTIUSSI
IREM de Toulouse

La constante macabre, mise en évidence par André ANTIBI, est à replacer dans son contexte. Elle participe de l'évaluation qui elle-même détermine l'orientation. A ce titre elle est une manifestation du système d'enseignement en vigueur. Elle en constitue une loi organique. Ses différents déterminants, qui peuvent se comprendre comme autant de variables institutionnelles (les variables de la constante macabre), sont les suivants :

1. Le programme :

Les programmes de mathématique, en cours depuis 1985 et remaniés depuis sont définis à deux niveaux concernant les compétences exigibles et les compétences souhaitables. Les compétences exigibles représentent les savoirs et savoir-faire qui doivent être acquis et maîtrisés à un niveau d'enseignement faute de quoi on peut considérer que l'élève est en échec. Ils rassemblent les différentes techniques, méthodes élémentaires et capacités basiques exigées. Les savoirs souhaitables sont plus flous et représentent les savoirs et savoirs faire supplémentaires qui préparent l'avenir de la discipline. Ils sont plus élastiques et indéfinis et ne sont pas toujours explicites (comme la démonstration). Ils dépendent souvent des conceptions de l'enseignant et de son caractère plus ou moins exigeant ou sélectif. Ils concernent surtout les méthodes de raisonnement, de recherche, d'exposition et de rédaction. En ces derniers résident les éléments élevés et non révélés de l'évaluation. C'est sa partie grise où se dissimulent les éléments les plus sévères de la constante macabre. Savoirs exigibles et souhaitables forment ensemble un volume variable qui dépend du contexte : niveau de la classe, type d'établissement, ambition scolaire diffuse des parents, …

Aux différents cycles d'enseignement, les programmes forment un tout articulé par paliers de niveaux et de difficultés croissants en corrélation avec les capacités des élèves et les nécessités de la formation et de l'orientation.

En collège, pièce maîtresse de la destinée scolaire, à première approximation s'appuyant sur notre expérience -il faudrait faire une enquête sérieuse sur cette question – un tiers des élèves sont plus ou moins en échec au regard de ces savoirs exigibles et un tiers également seulement a plutôt acquis les compétences souhaitables. On retrouve les fameux trois tiers de la constante macabre.

Il est indéniable que le niveau des exigences du programme, formulées ou pas, joue un rôle déterminant de la constante d'évaluation. Une observation le montre aisément. Enseignant par la passé dans l'ex voie III, j'ai pu constater que des élèves qui étaient en échec en cinquième sur la détermination du pourcentage et plus généralement sur les calculs proportionnels qui leur étaient associés, trois ans plus tard, en CPA, ces mêmes élèves étaient capables d'assimiler et de pratiquer ces notions. Trois ans trop tard !

2. Les rythmes scolaires :

Ce qui va de pair avec les programmes, ce sont les rythmes scolaires qui découlent de la définition des programmes et plus particulièrement de leurs volume et difficultés. L'enseignant qui doit terminer son programme incité en cela par les inspecteurs qui les cornaquent, n'ont pas le choix. Dans le temps qui leur est imparti, dans l'année scolaire, et avec des horaires hebdomadaires qui ont tendance à diminuer, ils sont obligés de traiter le programme à un rythme imposé, soutenu, sans trop pouvoir moduler les durées consacrées à chacune des notions. Allonger l'une c'est raccourcir l'autre. Les variations sont pénalisantes même si elle sont souvent utiles pour traiter l'essentiel et pour s'adapter au niveau d'ensemble des élèves. Ces rythmes ont un impact certain sur le degré de compréhension et d'acquisition des élèves des notions du programme. Il est facile de vérifier que le simple allongement du cours et de la période des exercices d'assimilation permet d'élever le niveau moyen de réussite. Sans parler de la remédiation, temps supplémentaire accordés aux élèves en échec partiel ou total, qui permet aussi ce relèvement.
Niveaux des programmes et rythmes d'enseignement, en relation avec les capacités des élèves et les nécessités de la sélection, déterminent fondamentalement l'évaluation et le niveau de la constante macabre.

3. La reproduction sociale :

Les programmes et leurs évaluations conformes, normatives, sont tels que l'excellent élève a 20 et l'élève en échec a entre 0 et 5. Les autres s'étagent entre ces deux bornes suivant le niveau de la constante macabre en fonction de la sévérité du professeur mais, en fait, du point de vue institutionnel, en fonction de l'orientation scolaire et sociale. On peut dresser un tableau très grossier voire caricatural mais indicatif de cette distribution des résultats standards au collège en corrélation avec la destinée sociale probable suivant la hiérarchie et la répartition socio-économique de la société :

	Excellent	cadres sup, chercheurs	
1/3	Très bons, bons	enseignants, techniciens sup	25%
	Assez bons	techniciens	
	Moyens	employés	
1/3	Passables	ouvriers qualifiés	50%
	Médiocres	ouvriers	
	Insuffisants	ouvriers spécialisés	
1/3	Très insuffisants	emplois précaires	25%
	En échec	chômeurs	

L'école a non seulement pour rôle la transmission des savoirs mais aussi celui de la reproduction sociale. Et l'évaluation scolaire doit y concourir et s'y plier. Elle procède à la hiérarchisation des compétences pour préparer à la hiérarchisation sociale. La constante macabre joue le double rôle de permettre ce tri et de le faire accepter.
Illusion de croire que l'évaluation ne porte que sur les savoirs. Elle doit rendre des comptes à la sélection sociale.

4. Les nécessités de l'orientation :

C'est la détermination par la conséquence ! Élever arbitrairement le niveau de réussite des élèves, accroître de manière anarchique le flux de passage, c'est inévitablement se heurter à une rétro-action contraire visant à rétablir l'équilibre institutionnel. Par exemple, faire passer plus d'élèves au lycée du fait d'une évaluation sauvage plus favorable et c'est en retour subir le choc du désaveu des professeurs du lycée qui sanctionneront par un échec accrû l'ensemble des élèves concernés. Les professeurs laxistes, à l'évaluation généreuse non sélective, seront rappelés à l'ordre par la pression conjuguée des élèves échaudés, de leurs parents s'estimant trompés et par l'institution scolaire qui fera comprendre. On pourrait envisager que tous les professeurs agissent en même temps dans le sens d'une évaluation plus favorable. C'est, en dehors d'une très forte mobilisation idéologique, inconcevable. Tout comme ces soldats qui en même temps refuseraient de se battre. Chacun est soumis en permanence aux contraintes et déterminisme du système qui sont la plupart du temps intériorisés. Spontanément, il est impossible qu'une majorité puisse s'y soustraire.

L'orientation scolaire et sociale impose des flux déterminés de passage d'un niveau à un autre et force à une évaluation sélective subséquente.

5. Les capacités des élèves :

À un niveau donné, la population des élèves aux différents âges normal, précoces et retardés manifestent des capacités inégales en fonction des attentes du programme et de ses rythmes. Il est facile de constater qu'en fonction de ces objectifs cognitifs sous l'effet d'un apprentissage standard et d'une évaluation conforme, avec sa constante macabre, ils se distribuent d'une façon étonnamment stable et prédéterminée. A un bout de la chaîne, l'excellent élève qui atteint parfois la perfection. A l'autre extrémité, l'élève en échec total ou en refus scolaire qui a des résultats nuls. Entre les deux la courbe plus au moins gaussienne de la répartition des résultats autour d'une moyenne ou d'une médiane qui dépend du niveau de la constante macabre pratiquée.

Le commentaire qui s'impose est celui-ci : Le programme correspond donc bien au niveau des élèves puisqu'une minorité le réussit entièrement voire à la perfection. Certains élèves en sont donc capables. De fait, c'est la future élite ! On peut dire que d'une certaine manière le programme a été fait pour elle puisque c'est la seule qui le réussit entièrement. Ce programme lui sert donc à s'extraire et à répartir les autres. Tout abaissement la pénaliseraient donc et fausserait la belle mécanique de la sélection sociale par la seule réussite scolaire des meilleurs.

On pourra objecter que pour promouvoir un enseignement d'excellence il est normal de récompenser et d'encourager les meilleurs. Certes, mais cela ne justifie nullement de mettre en échec un grand nombre. Pas plus qu'il n'est justifié qu'un cadre supérieur gagne dix fois ou cent fois le salaire d'un ouvrier. Un système le permet, le justifie, mais pas forcément un autre. Un enseignement peut très bien se concevoir où la réussite des meilleurs n'entraîne pas obligatoirement l'échec des autres ou la constante macabre est remplacée par la constante réussite.

Certes, on pourra objecter qu'il serait idiot d'abaisser les exigences du programme si des élèves mêmes peu nombreux en sont capables. Il faut apprendre beaucoup de choses et il n'est jamais trop tôt d'entreprendre en ayant en perspective les objectifs savants de la recherche et les intérêts économiques et culturels du pays. Mais, outre que le niveau d'exigence n'est pas du tout identique d'un pays à l'autre (si les enfants sont les mêmes), aucune justification pédagogique ne justifie cette définition maximale des programmes. Par exemple, la règle de la définition des programmes, à un niveau donné, pourrait être qu'il soit assimilé par la majorité voire les deux tiers des élèves, enquêtes à l'appui. On en est loin. On objectera que les meilleurs, comme les “surdoués” maintenant, pourraient s'ennuyer ! Il dépend de déterminer seulement ce que l'on évalue dans un programme qui pourrait être diversifié.

Le programme est donc défini pour l'élite en fonction des capacités d'assimilation des meilleurs élèves héritiers pour la plupart des couches détentrices du capital culturel et économique. Pour l'extraction de celle-ci, l'évaluation est régie par une constante qui permet par la règle des trois tiers appliquée successivement (le tiers puissance n) de raffiner petit à petit cette minorité de la réussite scolaire et sociale.

6. La pression des parents :

Elles sont différentes suivant le milieu social et leur effet sur le milieu scolaire dépend de leur espérance scolaire et de leur degré d'affinité avec le système. C'est la couche la plus privilégiée sur le plan économique mais aussi et surtout sur le plan culturel qui exerce la pression la plus forte, action en harmonie et donc amplifiée par l'institution elle-même. Ce ne sont pas les immigrés doublement pénalisés sur le plan économique et culturel, qui ont tout à attendre de l'école, qui ont le plus d'influence. Ce sont évidemment les couches privilégiées qui sont les plus influentes, celles qui reproduisent leur statut social supérieur par l'école, qui investissent le plus au travers de l'école. L'école est donc tirée vers le haut et il est mal vu d'inverser cette tendance. Ils le feront savoir au professeur de diverses manières suivant le type d'établissement où il enseigne (élite ou ZEP) suivant qu'il pratique une constante macabre un peu trop molle ou trop dure.

La pression la plus forte des parents est celle qui tend à favoriser la réussite des meilleurs.

En conclusion, la constante macabre est dans le domaine de l'évaluation le moyen de la sélection de l'élite. Parce que l'école a aussi pour fonction la reproduction sociale, elle régule les flux et oriente au moyen d'une évaluation normalisée. Pas plus qu'elle ne déclare son rôle de sélection sociale, elle ne révèle ses lois occultes de fonctionnement telle la constante macabre. Cette régulation non écrite est imposée au professeur par l'institution et le milieu de façon immanente et cachée. Aucune règle précise ne lui a été imposée. Tout lui laisse croire qu'il peut être libre de son évaluation. Et pourtant il fait ce que l'institution et la société attend de lui, incité qu'il l'est par les différents déterminants évoqués.

Sur une particularité de 26...

par Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY

Rassurez-vous, non il ne s'agit pas d'une des particularités de la 26^esection du CNU dont nous faisons majoritairement partie (une page ne suffirait pas !), mais bien de rentier naturel 26.

Lors d'une réunion de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse à laquelle je participais, un enseignant de Lettres évoquait l'entier 26 comme étant le seul entier coincé entre un carré ($25 = 5^2$) et un cube ($27 = 3^3$), et il ajoutait que c'était la raison de l'utilisation de ce nombre comme symbole par des sectes (les cathares ?). Il attribuait le résultat à P. Fermat.

Ne connaissant pas ce résultat, j'étais un peu surpris. J'ai voulu en avoir le cœur net : était-ce bien vrai ? si oui, comment le démontre-t-on ? Une rapide consultation auprès de mes collègues m'a conforté dans ma première impression, à savoir que ce n'était ni un résultat très connu ni facile à appréhender au premier abord. Les recueils de particularités des nombres entiers (exemple [2]) ne le mentionnent pas non plus. Un spécialiste de théorie des nombres (il y en a tout de même quelques uns au pays de Fermat) m'a confirmé qu'il s'agissait d'un énoncé dû à P. Fermat qui, comme à son habitude, l'avait posé comme défi aux anglais, en indiquant que le résultat était vrai mais sans en donner une démonstration ([3])... Cette propriété de 26 est tout de même curieuse : imaginez un peigne infini dans lequel vous enlevez toutes les dents sauf celles correspondant à des carrés d'entiers, puis un autre peigne infini où vous faites la même chose avec les dents placées en des positions différentes des cubes d'entiers ; vous positionnez ensuite les deux peignes face à face, et le seul cheveu (= entier) que vous arrivez à coincer entre deux dents est 26 !

Après enquête, il s'avère : oui, le résultat est vrai ; je l'ai trouvé dans [l], attribué à Fermat ; sa démonstration (dans [1] ou [4]) consiste à faire de l'arithmétique dans l'anneau euclidien (et donc factoriel) Z[î√2]...Le fil y conduisant est l'équation $y^2 = x^3 - 2$; le groupe de Mordell-Weil de cette équation est cyclique infini (for whatever it means..), il se trouve qu'il y a une infinité de solutions rationnelles à cette équation, mais seulement deux solutions entières $(x, y) = (3, \pm 5)$. On démontre qu'il n'y a pas non plus, parmi les entiers positifs, de solutions à l'équation $y^2 = x^3 + 2$. Ce qui répond à notre interrogation....

Question à présent : comment Fermât a-t-il « intuité le résultat » (comme on dit à Toulouse) ? En avait-il vraiment une démonstration ? On n'en sait rien...Sa correspondance avec des scientifiques en France et en Europe est truffée de questions et défis du même calibre ; celui concernant ce qui s'appelle à présent « le grand théorème » a émergé, bien il y en a d'autres. Sacré Fermat...On l'adopte en 26^e ?

1. J. H. SILVERMAN, *The arithmetic of elliptic curves*, Springer-Verlag (1986).
2. F. LE LIONNAIS et J. BRETTE, *Nombres remarquables*, Hermann (1997).
3. G. TERJANIAN, communication personnelle (automne 2006).
4. M. REVERSAT, communication personnelle (automne 2006).

Addendum (décembre 2006)

«Mais tu aurais dû regarder dans Wikipedia... », voilà la réaction entendue à une première circulation de la présente note en automne. Certes… mais je constate que Wikipedia contient quelques erreurs, et que la version anglaise ne donne pas tout à fait les mêmes informations que la version française...

Quoi qu'il en soit, complétons notre quête sur 26 par les points suivants :

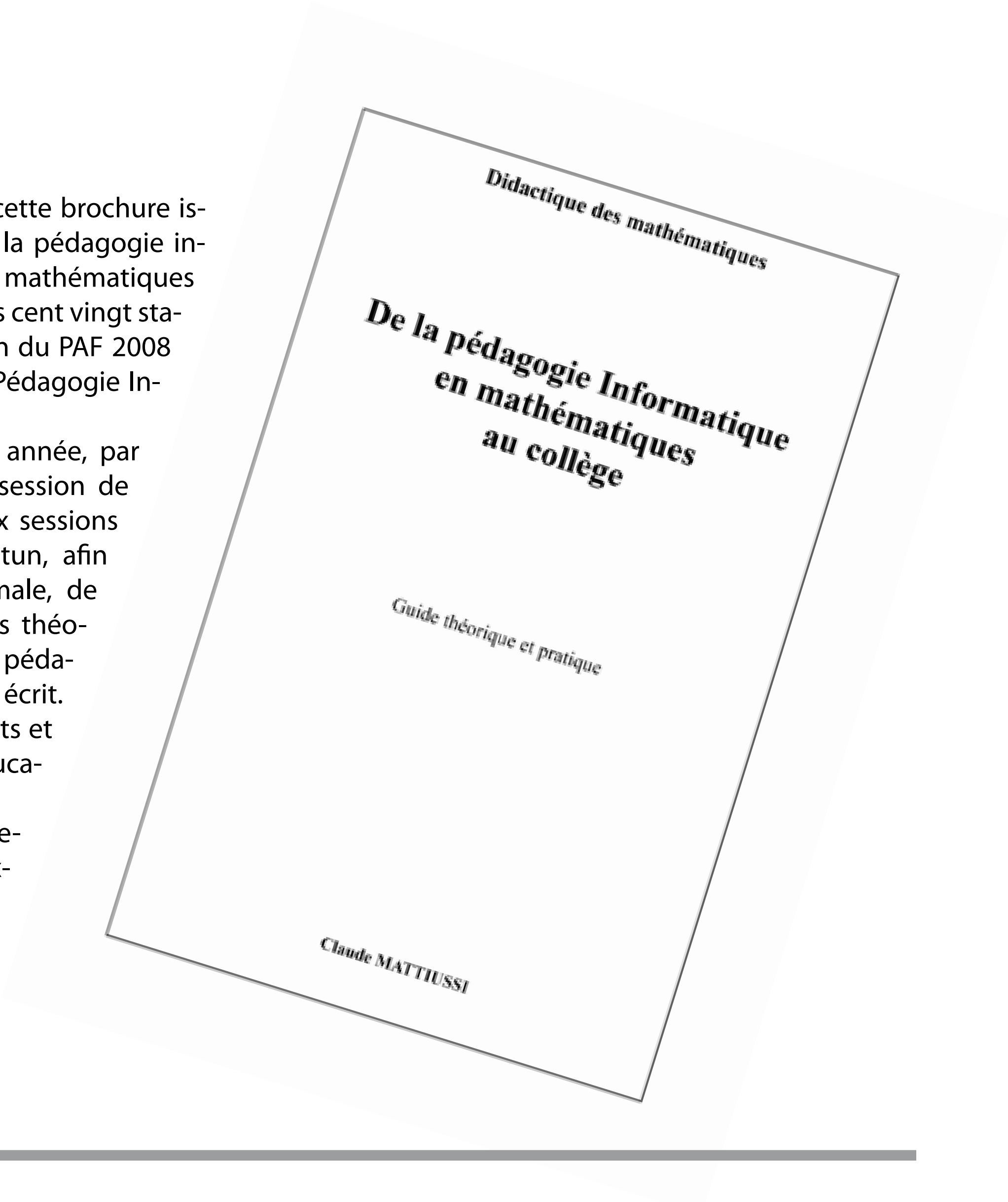
- 26 est, bien sûr, le nombre de lettres de l'alphabet français ; dans la classification des groupes simples, il y a 26 groupes sporadiques; 26 serait la dimension de l'espace-temps universel selon la théorie des cordes; 26 est le nombre maximal de nombres premiers pouvant apparaître dans une tranche de cent entiers consécutifs (cette situation ne se produit qu'une fois, dans la tranche des entiers de 2 à 101); nous avons 26 os dans le pied! .Je laisse de côté des références bibliques un peu tirées par les cheveux.
- L'écart de 2 entre un carré et un cube d'entiers est-il particulier ? Voici ce qu'on peut dire à propos d'écarts valant 0 ou 1 :
    - Il y a une infinité de carrés d'entiers qui valent des cubes d'entiers (exemple $4^3 = 8^2$).
    - Il n'y qu'un seul cas où un carré d'entier et un cube d'entier sont consécutifs (en excluant l'intervention de l'entier 1 évidemment) : $8 = 2^3$ suivi de $9 = 3^2$.
    - Un résultat assez extraordinaire, conjecturé par E. Catalan en 1844 et démontré par F. Mihailescu en 2002, affirme que l'équation en nombres entiers $x^m — y^n = \pm 1$ n'a que la solution du dessus; bref, les seules puissances parfaites consécutives sont 8 et 9 (toujours en excluant l'intervention de l'entier 1).

Ce texte a été publié une première fois dans la revue MATAPLI n° 82 - Avril 2007

Information et publication

Une brochure de travail

Une édition spéciale provisoire de cette brochure issue d'un Diplôme Universitaire sur la pédagogie informatique dans l'enseignement des mathématiques au collège est parue en direction des cent vingt stagiaires des sept stages de formation du PAF 2008 organisés et animés par le groupe Pédagogie Informatique en Maths au Collège.
Les stages ayant été réduits cette année, par manque de moyens, à une seule session de deux jours au lieu de trois en deux sessions auparavant, il était devenu opportun, afin de conserver une efficacité maximale, de transmettre les quelques principes théoriques et les règles pratiques de la pédagogie informatique au travers d'un écrit.
L'ouvrage achevé, enrichi des apports et des recherches en sciences de l'éducation sera publié ultérieurement.
Cette version actuelle peut être cependant disponible sur demande expresse pour les collègues intéressés.


Didactique des mathématiques

De la pédagogie Informatique en mathématiques au collège

Guide théorique et pratique

Claude MATTIUSSI

Erratum

Dans l'AUTAN n°1

Erratum page 43 - dernier paragraphe

Lire :
Quand l'Italien Francesco Maurolico (1494-1575) ou **le Français François Viète** (1540-1603)

au lieu de :
Quand l'Italien Francesco Maurolico (1494-1575) ou l'Italien François Viète (1540-1603)

Rallye Mathématiques sans frontières 2007

Le Rallye réunit chaque année des élèves de primaire et de secondaire (6ème, 3ème, 2nde) de l'***Académie de Toulouse*** et au-delà (***Ile de la Réunion, Rouen, Espagne, Liban, Roumanie, Tunisie, Maroc, Belgique***) pour une compétition ludique d'approche des mathématiques, qui fait suite à une étape de sélection départementale qui s'est déroulée entre novembre 2006 et mars 2007.

avant l'épreuve…
dans le hall de l'Université Paul Sabatier

les élèves de 3e et 2e lors de la présentation de l'épreuve

Depuis sa création en 1992, cette compétition réunit, année après année, toujours plus de participants, grâce au bouche à oreille. Cette année, ce sont plus de ***55.000 participants*** qui ont répondu présents pour l'ensemble des étapes de la compétition (sélections départementales et Super finale).

Lauréats de la finale du rallye 2007

25 mai 2007

Niveau Seconde
2nde 2 – Lycée Jean de Prades – Castelsarrasin

Niveau Troisième
3ème D – Collège Pierre Suc – Saint Sulpice

Niveau Sixième
6ème 3 – Collège de Saint Girons

Niveau Cycle 3
Cycle 3 – Ecole Belbèze – L'Union