La proportionnalité au collège

par le groupe Premier Cycle de l'IREM de Toulouse
Françoise SAVIOZ
Miquela CATLLA
Karine DESCHAMPS-FOURNIÉ
Emmanuelle FAYEL
Yves CHASSIN
Bernard VIDAL

avec la participation de
Colette MERCIER
Maurice MOULY

Différentes évaluations et notre propre constat font apparaître que le concept de proportionnalité est mal maîtrisé par une majorité d'élèves.

Dans la présentation des programmes du cycle central cinquième et quatrième, la proportionnalité apparaît comme « fil conducteur » dans les trois domaines d'étude que sont la géométrie, le numérique et l'organisation et la gestion de données.

La classe de quatrième semble une étape-clé de l'apprentissage. En effet, cette année doit permettre le passage du travail sur des exemples à la formation du concept comme outil mathématique utilisable en troisième avec la fonction linéaire, la fonction affine (proportionnalité des accroissements) et le réinvestissement dans les autres disciplines (SVT, Sciences Physiques, EPS, Histoire-Géographie, Technologie).

Les difficultés résultent d'apprentissages ne distinguant pas nettement le registre des relations numériques du registre des opérations sur des grandeurs (la notion de multiplication occultée, la commutativité de la multiplication «abstraite» s'en trouve pervertie).

À cela plusieurs raisons :

Les programmes et instructions officielles mettent l'accent sur le cadre numérique, le cadre des grandeurs est plus implicite. En effet, les objectifs du cadre numérique sont parfaitement définis (activités d'apprentissage connues, évaluations précises). En revanche, les objectifs du cadre des grandeurs sont généraux (apprentissages à mettre en œuvre non précisés, progression de la sixième à la troisième mal définie, évaluations difficiles à élaborer et à interpréter).

En outre dans la pratique, tout se passe souvent comme si la poursuite des objectifs numériques impliquait automatiquement la conceptualisation de la relation entre les grandeurs. Cette conceptualisation semble devoir résulter d'un mûrissement des pratiques numériques, mûrissement relevant de compétences d'abstractions présupposées des élèves, plutôt que d'un apprentissage ostensible.

De plus, il existe une confusion entre ces deux cadres d'actions. Par exemple : l'utilisation de trucs et d'astuces dans le cadre numérique (revoilà le produit en croix) implique une perte de sens dans le cadre des grandeurs, dans la compréhension des égalités ...

Nous avons adopté la présentation suivante :

Première partie	A) Essai d'évaluation du concept de proportionnalité. Commentaires.
	B) Les grandeurs.
	C) Remédiation et nouveaux apprentissages en quatrième.
Deuxième partie	Illustration géométrique de la proportionnalité

A) CONSTAT Cinquième / Troisième

Un même test de 5 questions sur la notion de proportionnalité a été posé dans une classe de cinquième en 1996 et deux ans plus tard dans deux classes de troisième.
En cinquième, ce test venait quelques semaines après des activités sur la proportionnalité. En particulier, un travail oral et écrit de formation de phrases avec le mot « proportionnel » avait été fait.
Quant aux troisièmes , la notion de proportionnalité venait d'être réinvestie dans le chapitre sur Thalès.
Il est particulièrement intéressant d'observer les résultats des troisièmes, ayant déjà subi ces questions en cinquième. Les remarques sont assez semblables, sur les deux niveaux, avec heureusement une meilleure réussite en troisième, due peut-être à une plus grande maturité ou à une plus grande pratique de la notion.

a) Des phrases avec le mot « proportionnel ».
Le test 1 proposait 6 phrases avec le mot « proportionnel » et demandait si elles avaient du sens.
L'objectif était de vérifier si les élèves avaient compris qu'il faut nommer deux grandeurs pour qu'une phrase avec le mot « proportionnel » ait du sens.
En classe de cinquième, ce test avait été préparé, par un travail oral et écrit.

Exemple 1. Un magasin propose - 20% sur tous ses articles. C'est proportionnel.
En cinquième , 6 élèves sur 22 répondent que cette phrase n'a pas de sens.
Dans une des troisièmes, 8 sur 26 , dans l'autre 7 sur 26.

Exemple 2 . Le prix du journal est proportionnel
En cinquième , 14 élèves sur 22 répondent que cette phrase n'a pas de sens.
Dans une des troisièmes, 23 sur 26 , dans l'autre 21 sur 26.

b) Le test 2 demandait aux élèves d'écrire deux phrases avec le mot « proportionnel ». Il leur était indiqué qu'ils pouvaient prendre des exemples dans la vie de tous les jours.
L'objectif était de faire l'état des lieux quant à la capacité d'emploi du mot «proportionnel» dans le domaine de la vie courante.

Voici quelques phrases relevées en cinquième.
« Le prix du vélo est proportionnel »
« L'heure n'est pas proportionnelle »
Plus l'élève est en difficulté, plus ce genre de phrase est courant.
En troisième, ce type d'erreur est moins fréquent.

En cinquième et parfois encore en troisième, la notion de proportionnalité n'est pas associée à un lien entre deux grandeurs. D'où « c'est proportionnel » considéré comme juste par l'élève. Il est donc nécessaire d'éviter l'utilisation abusive et réductrice de cette expression, même à l'oral. Il est souhaitable dans chaque cas de faire exprimer les grandeurs en jeu.

En troisième, d'autres types d'erreurs sont plus fréquentes.
Dans les phrases, se trouvent des confusions entre les expressions « en fonction de » ou « dépend de » et « est proportionnel à ».
Exemples
« Ce que tu manges est proportionnel à ta faim »
« Mon poids est proportionnel à ce que je mange »

Dans une des deux troisièmes d'un niveau faible, certains élèves ont proposé des phrases avec des grandeurs qui n'ont rien à voir l'une avec l'autre.
Exemples

- Le nombre de lignes de ta dernière rédaction est proportionnel au nombre de lignes de la classe.
- L'âge de mon frère est proportionnel au mien.
- La population française est proportionnelle à celle du Luxembourg.

Au vu de ces résultats, il semble nécessaire de travailler autant sur des contre-exemples de proportionnalité, que sur des exemples.

c) Dans le test 4, quatre tableaux étaient proposés. On demandait s'il y avait proportionnalité en précisant que cette question n'avait peut-être pas de sens.
Ce test demandait à l'élève de savoir reconnaître une situation de proportionnalité à partir d'un tableau, mais aussi d'être critique par rapport à la question posée, de savoir repérer s'il y a bien deux grandeurs et d'être capable de les nommer.

Voici le tableau qui était proposé en exemple n°2 : *La consommation d'oranges en France*

année	1985	1995
Nombre de kg consommé par personne par an	8,8	7,1

Y a-t-il proportionnalité entre les années et le nombre de kg consommés ?

Voici le tableau qui était proposé en exemple n°4: *Destinations lointaines*

Destination	New York	Los Angeles	Antilles
Prix du vol en avion	229 €	458 €	267 €

Y a-t-il proportionnalité entre la ville de destination et le prix du vol en avion pour y aller ?

Il est frappant que les élèves de troisième répondent « non » sans se poser la question du sens.
La réponse « non » englobe-t-elle pour eux « n'a pas de sens » ? Ou bien cette perte de sens est-elle due à un travail trop mécanique sur les tableaux ?
Pour le déterminer, des questions complémentaires écrites ou orales auraient été nécessaires.
Des activités avaient été faites dans la classes de cinquième sur la cohérence des questions à se poser sur un tableau d'où une meilleure réussite.
Il semble que les 11 réponses « oui » à l'exemple 4 montrent que la notion de proportionnalité n'est pas encore associée en troisième à des grandeurs.

CONCLUSION

Ces tests ont été posés avec l'idée d'évaluer le niveau de conceptualisation des élèves. Ils sont incomplets. Par exemple, il manque une évaluation de la maîtrise du coefficient de proportionnalité. L'interprétation des résultats est parfois limitée. Pour affiner la synthèse, il aurait fallu des consignes plus précises et des réponses moins sèches que oui ou non.
Il semble toutefois évident que la notion de proportionnalité n'est pas complètement assimilée en troisième. Les élèves percoivent bien qu'elle peut relier deux grandeurs.
Mais cette notion est fortement liée à un tableau . Lien trop fort puisque certains élèves croient encore que tous les tableaux sont des tableaux de proportionnalité.
En revanche, elle est bien liée à un graphique. Dans l'ensemble, reconnaître une situation de proportionnalité à partir d'un graphique est bien réussi en cinquième et en troisième.
En général si un tableau ou un graphique est donné, l'élève pensera à cette notion et saura déterminer s'il y a ou non proportionnalité. Mais il ne se posera pas forcément la question du sens.
Si seulement un texte est donné, les quantités en jeu sont difficiles à déterminer. D'où un travail nécessaire sur les grandeurs. Et il ne faut pas manquer, à tous les niveaux de réinvestir cette notion.

B) LES GRANDEURS

Les activités qui suivent doivent aussi permettre de clarifier le sens de ce mot (à défaut de définition ?) dans son utilisation dans les domaines scientifiques par rapport à son utilisation dans le langage courant (qualité de ce qui est grand : grandeur d'esprit, grandeur d'action humanitaire...).
Ce travail doit permettre de rendre palpable « la quantité de grandeur » et donc de renforcer l'idée de mesure et par conséquent celle d'unité de mesure.
Ce n'est que lorsque cette notion est acquise que les grandeurs dérivées (grandeurs-quotients, grandeurs-produits) peuvent prendre tout leur sens pour les élèves.

Les grandeurs au sens scientifique apparaissent :
1) Dans le langage courant : la vitesse des véhicules est limitée sur les routes, l'économiste parle de pouvoir d'achat, le volume du coffre d'une voiture...
2) Sous la forme de l'écriture : nombre suivi de l'unité de mesure.
Soit k une grandeur, n un nombre, u une unité de mesure, on écrit : k = n x u.
a) Exemple : 3 cm ; 0,03 m avec 3 cm = 0,03 m
36 km/h ; 10 m/s avec 36 km/h = 10 m/s
b) Remarque : ces écritures différentes d'une même grandeur sont un premier écueil pour l'apprenant.
3) En classe de quatrième : l'élève côtoie les grandeurs physiques usuelles, mesurables que sont la MASSE, la LONGUEUR, la DURÉE, les ANGLES, ainsi que les grandeurs qui en dérivent, que cela soit les grandeurs-produits (AIRE, VOLUME...), les grandeurs-quotients (VITESSE, DÉBIT, ÉCHELLE, POURCENTAGE...).
Le géographe met en relation la population (grandeur discrète) avec l'aire. On obtient une grandeur-quotient (la DENSITÉ DE POPULATION) ou pour parler d'un trafic on utilise des grandeurs-produits (le nombre de VOYAGEURS-KILOMÈTRES, le nombre de TONNES-KILOMÈTRE).
C'est donc un ensemble de grandeurs relativement important que l'élève va rencontrer au collège. Nous proposons les activités suivantes, comme susceptibles de l'aider.

1) *Objectif : faire émerger ce que l'on entend par grandeur par un débat provoqué entre les élèves.*
Discussion à partir de phrases.
Les questions suivantes peuvent être écrites au tableau ou bien rétro-projetées.

Qu'évoque la taille d'un homme ?

Je veux tapisser un mur. Que dois-je mesurer ? (plusieurs réponses ?)

Je pars d'un lieu X à 12 h 35 min pour arriver en un lieu Y à 14 h 51 min. Que peut-on dire ?

Un terrain de tennis est-il plus grand qu'un terrain de volley-ball ?

Cette activité peut s'effectuer sous forme orale : ne pas travailler par écrit permet une plus grande dyna-

mique au sein de la classe mais peut entraîner une vision plus floue pour les élèves. L'essentiel dans ce cas est de faire émerger le fait que les élèves se reconnaissent une mauvaise ou insuffisante connaissance de l'idée de grandeur.

Cette activité peut se pratiquer sous forme écrite. Au bout de quelques minutes, le professeur relève les copies, fait un premier point et lance le débat avec les élèves. Là aussi, cette partie débat est très importante.

2) *Objectif : relier des grandeurs à des objets dans une activité ouverte laissant libre cours à la représentation des élèves.*

Consigne : pour chaque objet ci-dessous, citer une grandeur qui peut lui être associée; exprimer cette grandeur dans l'unité qui vous semble possible.

Objets	Grandeur	unités
salle de classe		
gomme		
cartable		
haltères		
la piste autour du stade		
la voiture		

Des tests passés dans plusieurs classes, sur plusieurs établissements, révèlent que près de 60 % des élèves répondent incorrectement dans la colonne Grandeur.

Les réponses obtenues sont essentiellement des nombres ou des nombres avec unité.

3) *Objectif : retrouver des unités de grandeur, donner les mesures les plus appropriées, travailler sur le sens. Travailler sur les significations.*

Activités avec des consignes de type :

compléter par l'unité qui convient les mesures se trouvant dans les phrases ci-dessous.

Exemple. Pour cet appareil, il faut des pellicules 24 .... x 36 ....

Choisis l'unité la plus appropriée au contexte :

Exemple. Temps mis par Vincent pour venir au collège : min, h, s, jour...

Fais des commentaires.

Exemple. La distance Terre-Soleil est de 8 min ?

(questionnement sur peu approprié, faux et pas de sens)

4) *Objectif : questionnement sur le travail sur les grandeurs et leur mesure.*

Par exemple à propos de l'aire :
- *Pas d'appareil de mesure*
- *La concordance des unités*
- *Les deux dimensions*
- *Aire* x *nombre = aire*

Le texte suivant est donné aux élèves :

Romain déroule du papier essuie-tout en rouleau de largeur 20 cm.

Il coupe une première feuille de longueur 18 cm. Quelle est son aire ?

Il coupe une deuxième feuille de longueur identique.

Il met les deux feuilles bout à bout.

Quelle est l'aire totale des deux feuilles ?

Lors de la synthèse, il est pertinent de bien faire remarquer que la somme de deux grandeurs de même nature est une grandeur de même nature ($360 \text{ cm}^2 + 360 \text{ cm}^2 = 720 \text{ cm}^2$) et que le produit de deux grandeurs de même nature est une grandeur de nature différente ($18 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} = 360 \text{ cm}^2$).
Il est nécessaire de travailler sur la concordance des unités, condition de validité des formules.
Pour l'aire totale, on peut distinguer deux manières d'obtenir le résultat :
$360 \text{ cm}^2 + 360 \text{ cm}^2 = 720 \text{ cm}^2$ et $360 \text{ cm}^2 \times 2 = 720 \text{ cm}^2$ en précisant le statut de nombre de 2.

Le travail sur la multiplication généralisée sur des nombres a occulté l'origine de la multiplication : les deux facteurs sont différents. L'un est abstrait, il compte les termes, l'autre peut être une grandeur.

C) LA PROPORTIONNALITÉ : RE-MÉDIATION ET NOUVEAUX APPRENTISSAGES EN 4^e

Activité 1

Objectif : pour les deux exercices ci-dessous, faire émerger les deux procédures de calcul : aspect iso-morphisme et aspect fonction.

Modalités : énoncés donnés par exemple en calcul mental (utilisation du rétroprojecteur).

(1) On précise que les deux suites de nombres sont proportionnelles.

X	3	6	9	30
Y	4,1			

(2) 20 kg de pommes coûtent 7 €.

Combien coûtent 10 kg ? Combien coûtent 7 kg ?

On demandera aux élèves leurs méthodes.

On posera les questions :

Compléter la phrase « un kilogramme coûte ....»

Où trouve-t-on ce renseignement sur le tableau ?

A (kg)	20 kg	10 kg	7 kg
B (€)	7 €	...	...

Remarque : la facilité des calculs doit permettre un travail plus simple sur la proportionnalité en évitant l'obstacle numérique.

Activité 2

Objectif : dans la succession d'activités, donner un exemple « trompeur ».

Le fait de parler de tableau incite les élèves à penser proportionnalité ...

On donne ce texte aux élèves.

Bénédicte achète des places de cinéma pour une association.

Le gérant du cinéma lui fait les propositions suivantes :

pour 10 places : 40 € pour 20 places : 76 €

pour 25 places : 90 € pour 40 places : 140 €

Bénédicte fait un tableau pour présenter les résultats de sa démarche aux autres membres de l'association. Sabrina est intéressée par une place et demande le tarif à Bénédicte.

Exprimer la réponse de Bénédicte.

Activité 3

Objectif : re-activer la définition du quotient, la propriété fondamentale des quotients et relier les fractions à la proportionnalité.

compléter

$$\frac{6}{\ } = \frac{24}{28} = \frac{\ }{63} = \frac{66}{\ }$$

Déterminer les nombres a, b et c

$$7{,}5 = \frac{a}{8} = \frac{15}{b} = \frac{c}{10}$$

Commentaire. On retrouve là les deux aspects (isomorphisme et fonction) hors d'un contexte grandeurs. Avec cet exercice « plus mathématique» on revient à un travail plus « fonctionnel ».

On peut amener ainsi l'élève à comprendre l'existence d'objets mathématiques abstraits qui se suffisent à eux-mêmes et qu'il est important de savoir travailler avec, parce qu'on peut diversifier les situations qu'ils peuvent « éclairer ».

Activité 4

Objectif : travailler sur la notion d'échelle avec les unités précisées dans les cases du tableau.

Cet exercice, fondamental, permet un retour sur les grandeurs.

Le fait de mentionner les unités dans les cases doit permettre de continuer de lever la confusion entre grandeur et la mesure de celle-ci.

Le fait de donner des unités différentes doit amener l'élève à se questionner sur le statut du coefficient qui est ici l'échelle.

On donne le tableau suivant et on demande de calculer l'échelle si cela est possible.

longueur sur la carte	5 cm	15 cm	250 cm
longueur dans la réalité	60 m	180 m	3 km

Activité 5

Objectif : sensibiliser les élèves au fait que pour traiter de proportionnalité il faut deux suites numériques.

Le tableau suivant fournit les consommations en oxygène en cm^3/minute

homme au repos	250
marche lente	400
marche rapide	900
course lente	1500
course de fond	2500
course de vitesse	3000

Commentaire : un deuxième travail peut consister à faire donner aux élèves la signification de cm^3/ minute.

Activité 6

Objectif : travail sur une proportionnalité « approximative ».

On propose aux élèves une expérience avec un ressort qui fait intervenir des objets dont on connaît les masses. On leur demande de faire un tableau consignant l'allongement du ressort en fonction de l'objet suspendu et donc de sa masse.

On procède à une dizaine de mesures. Puis on leur demande de reporter les résultats sur un graphique.

Commentaire :

• Plusieurs intérêts se dégagent de cette activité :

- L'expérience met concrètement en contact l'élève et les grandeurs en jeu.
- Ce n'est pas le professeur qui fournit les données.
- La nécessité pour les élèves d'une organisation efficace pour consigner les données.
- La nécessité de savoir observer un graphique approximatif.
- La vérification concrète d'une modélisation proposée par le professeur après expérimentation.
- Le renforcement dans l'approche de l'interêt de savoir traduire un phénomène physique par un modèle mathématique et du retour sur le phénomène.

• *Une variation de l'expérience peut consister à prendre un deuxième ressort de coefficient de raideur différent.*

• *Une autre variation consiste à faire refaire une série de mesures avec le premier ressort et les compa-*

rer aux premières.

[Le matériel nécessaire est disponible en salle de sciences physiques]

Activité 7

Objectif : compléter le travail sur les deux aspects isomorphisme et fonction par l'aspect graphique.

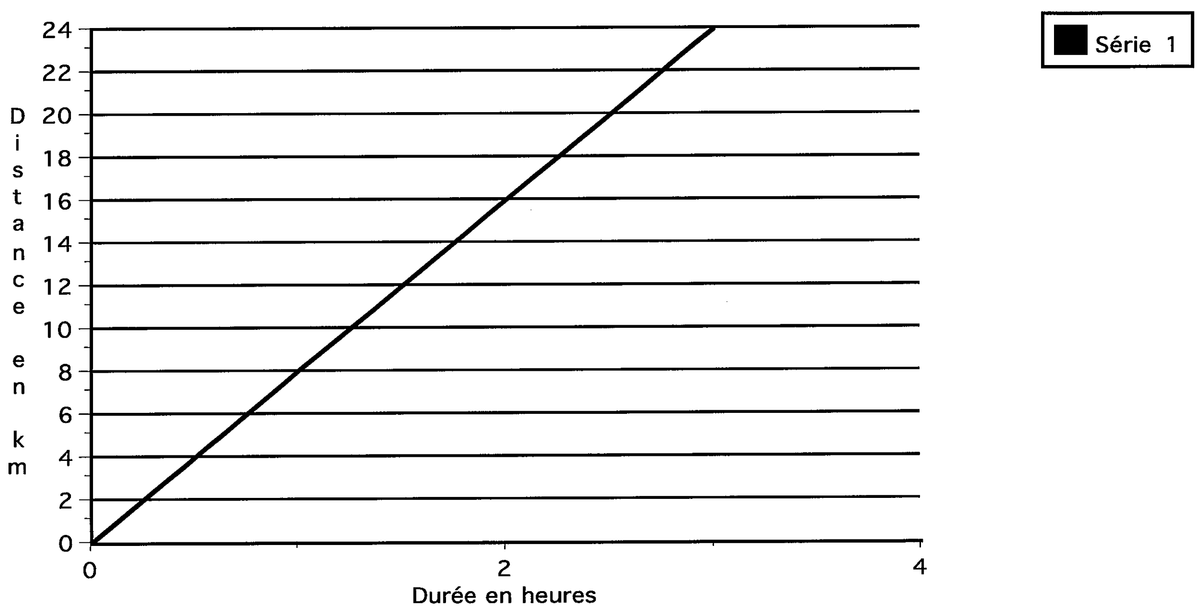
On donne aux élèves le graphique et le texte suivants :

Henri roule à bicyclette à une même allure sur tout le parcours.

Quelle distance aura-t-il parcouru en 4,5 h ?

Explique comment tu as trouvé la réponse.

Au bout de combien de temps a-t-il parcouru 64 km ? Explique ...



(Une fois cette première partie corrigée)   Quelle est la vitesse moyenne de Henri ?

Commentaire

La question de la distance parcourue en 4,5 h oblige l'élève à extrapoler au niveau du graphique, à se poser la question de la proportionnalité ou non entre les deux grandeurs, à chercher ce qui justifie sa réponse. Le temps mis pour parcourir 64 km est difficile à trouver sur le graphique, aussi l'élève sera-t-il contraint de passer au calcul.

Pour le calcul de la vitesse moyenne, il peut-être pertinent de faire faire différents calculs :

24 km /3 h = 20 km / 2,5 h ...

Il est peut-être intéressant pour les élèves de comparer ces deux dernières activités : proportionnalité approximative et proportionnalité vraie.

Les graphiques peuvent entretenir une certaine confusion entre la réalité et la « réalité perdue par l'élève » : la figure ci-dessus ne traduit pas le fait que Henri gravit une côte comme certains élèves le perçoivent. Un travail peut être fait sur ce thème de manière complémentaire.

Activité 8

Objectif : faire travailler une proportionnalité « par morceaux » et engager le débat avec les élèves.

Énoncé : Jacques décide de faire des promotions pour son magasin Extra.
Afin de récompenser ses meilleurs clients, il décide d'accroitre des rabais suivant le modèle ci-dessous :
(le montant des achats est un nombre entier)

Si le montant des achats M (en €) est compris entre 0 et 30 €,
le montant du rabais est 3% de M
Si le montant des achats M (en €) est compris entre 31 € et 60 €,
le montant du rabais est 5% de M
Si le montant des achats M (en €) est compris entre 61 € et 90 €,
le montant du rabais est 7% de M
Si le montant des achats M (en €) est compris entre 91 € et 120 €,
le montant du rabais est 9% de M
Si le montant des achats M (en €) est supérieur à 121 €,
le montant du rabais est 12% de M.

Représenter graphiquement le montant du rabais en fonction du montant des achats.

ILLUSTRATION GÉOMÉTRIQUE

DE LA PROPORTIONNALITÉ

dans le plan,

avec des triangles

des rectangles

dans l'espace,

avec le cône de révolution

le tétraèdre régulier

En prologue de l'ouvrage de Marcel Dumont et de Françoise Pasquis intitulé " Mathématiques pour la tête et les mains " se trouvent quelques recueils de textes, je vous livre le suivant :

« Le but de tout enseignement ne peut être ailleurs que dans le développement harmonieux des facultés humaines : l'esprit, la main, le cœur ».

Les situations décrites ci-après concernent l'étude de la proportionnalité en classe de quatrième ou de troisième.

Les études sont faites dans le cadre géométrique, elles sont de deux natures puisque certaines utilisent un outil tableur, les autres la dextérité manuelle puisqu'il s'agit de pliage.

Partie A

• L'utilisation du tableur correspond à une exigence de nos instructions; dans les commentaires nous trouvons dans la deuxième partie un chapitre intitulé « *L'outil informatique et l'enseignement des mathématiques au collège* » dans lequel son rôle est précisé.

• Les situations suivantes ont en commun de mettre en relation des grandeurs, d'étudier celles-ci afin de permettre en classe de troisième, l'émergence de la notion de fonction. Le tableur permet de conjecturer sur les relations établies, il renforce l'approche de la notion de fonction, ce concept devant être mis en place en troisième.

Situation I

1) a) L'activité suivante présente la situation de proportionnalité entre l'aire du rectangle A et sa largeur l, l'autre dimension L gardant une valeur constante.

Les grandeurs longueur et aire sont représentées par un tableau et un graphique, l'élève utilise le langage littéral reliant longueur et aire, ce langage étant traduit dans le langage machine.

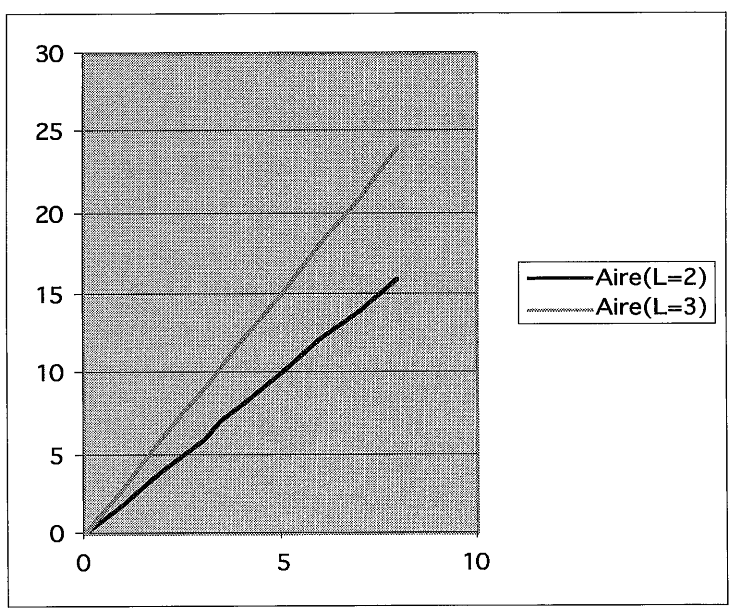
La lettre (l) prend le statut de variable; se met alors en place la notion de fonction A(l).

Lors des vérifications effectuées sur le tableau, la lettre prend le statut de solution d'une équation.

A signaler que l'élève sait utiliser la fonction « recopier ».

b) Tableau et graphique obtenus par l'élève

largeur l	Aire(L=2)	Aire(L=3)
0	0	0
1	2	3
2	4	6
3	6	9
4	8	12
5	10	15
6	12	18
7	14	21
8	16	24



Questions élève :

a) Écrire dans les deux cas les relations existant entre l ' aire du rectangle et sa largeur.

b) Sont-ce des relations de proportionnalité ? Quels sont pour chaque cas les coefficients de proportionnalité ?

c) Que devient l'aire lorsque L prend les valeurs 4 cm, 6 cm, 8 cm ?

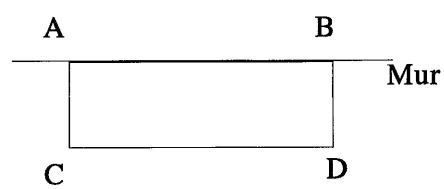
d) Pour l fixée, par exemple 13 cm, montrer qu'il y a proportionnalité entre l'aire et L.

Un travail analogue peut être fait avec l'aire du triangle, une hauteur et le côté correspondant.

2) Dans cette partie, $L + l$ étant fixée, ici $L + l = 100$, on représente L en fonction de l, cette situation étonne les élèves (décroissance de l liée à la croissance de L) le tableur - grapheur permet à l'élève par la rapidité des calculs d'approcher le concept de variable ainsi que celui de fonction.
Le calcul algébrique portant sur l'égalité $L + l = 100$ le fait apparaître comme un « outil validant ».
Conformément aux programmes l'élève peut étudier une situation de non-proportionnalité mais aussi observer la représentation d'une fonction présentant un maximum, il peut alors conjecturer quant aux valeurs de L et l rendant l'aire maximale.

Ci-dessous l'activité élève et les résultats obtenus.

a) <u>Énoncé</u> : Avec 40 mètres de clôture, un jardinier doit réaliser une pelouse ABCD de forme rectangulaire enla plaçant le long d'un mur comme l'indique le croquis ci-contre.
Il souhaite que l'aire du rectangle soit la plus grande possible.
Quelles dimensions doit-il donner aux segments [AB] et [CD] ?



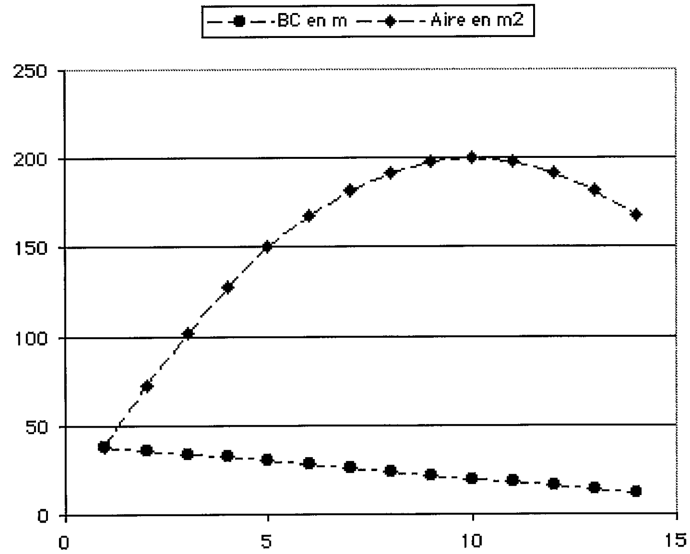
b) <u>Niveaux</u> : quatrième et troisième.

c) <u>Objectifs</u> :

- Traduire : texte, langage algébrique, langage machine.
- Notion de variable.
- Dépendance de grandeurs.
- Notion d'intervalle (valeurs de AB , de BC).
- Maximum d'une fonction.

d) <u>Remarques</u> : même si les élèves complètent des tableaux depuis des années, la moitié d'entre eux s'étonnent, lorsque AB croît, d'enregistrer la décroissance de BC.
La représentation graphique fait apparaître : croissance, décroissance et maximum.

	A	B	C
1	AB	BC	Aire
2	en m	en m	en m2
3	1	38	38
4	2	36	72
5	3	34	102
6	4	32	128
7	5	30	150
8	6	28	168
9	7	26	182
10	8	24	192
11	9	22	198
12	10	20	200
13	11	18	198
14	12	16	192
15	13	14	182
16	14	12	168



Situation 2

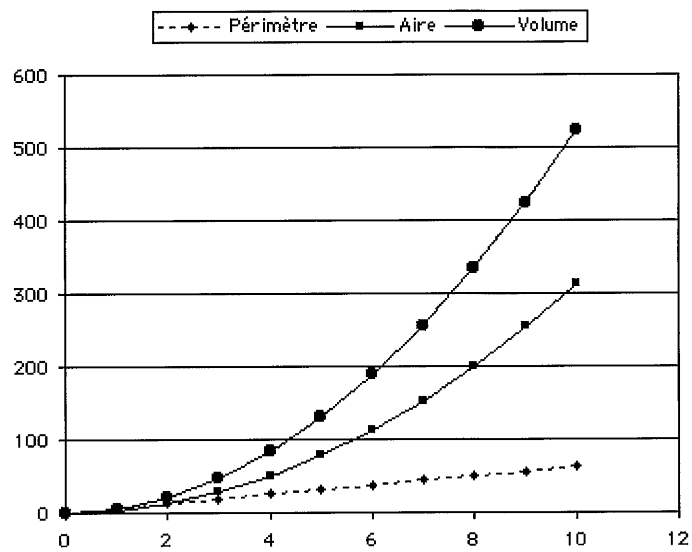
Cette situation décrit les relations existant entre le volume du cône, l'aire de la base, le rayon de la base, à *hauteur constante*. La situation de la variation du volume du cône en fonction de la hauteur à *rayon de la base constant* a été faite auparavant .

Le calcul littéral est abordé lors de l'écriture des formules donnant l'aire et le volume du cône, la lettre prend les statuts de variable ou de constante (h). C'est aussi l'occasion de passer d'un registre de langue (algébrique) au langage informatique.

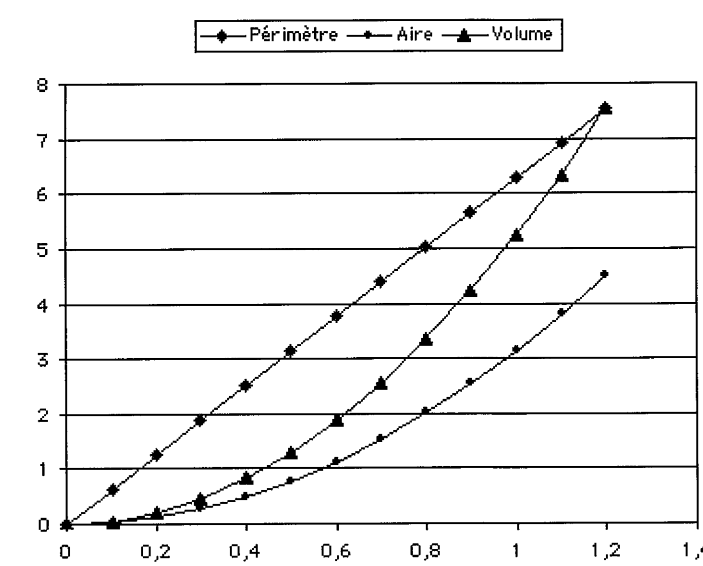
L'obtention des valeurs successives du rayon avec la fonction « recopier » est l'occasion pour l'élève d'écrire de façon générale un naturel et ses suivants.

Le tableur permet l'obtention rapide des résultats et des représentations graphiques, il fait apparaître la *dépendance des grandeurs* et permet à l'élève de conjecturer sur des situations de proportionnalité ou de non-proportionnalité. La justification de ces observations permet d'utiliser le calcul littéral , par exemple avec le quotient volume /aire .

	A	B	C	D
1	Rayon	Périmètre	Aire	Volume
2	0	0	0	0
3	1	6,28	3,14	5,24
4	2	12,57	12,57	20,94
5	3	18,85	28,27	47,12
6	4	25,13	50,27	83,78
7	5	31,42	78,54	130,90
8	6	37,70	113,10	188,50
9	7	43,98	153,94	256,56
10	8	50,27	201,06	335,10
11	9	56,55	254,47	424,12
12	10	62,83	314,16	523,60
13				
14				



	A	B	C	D
1	Rayon	Périmètre	Aire	Volume
2	0	0	0	0
3	0,1	0,63	0,03	0,05
4	0,2	1,26	0,13	0,21
5	0,3	1,88	0,28	0,47
6	0,4	2,51	0,50	0,84
7	0,5	3,14	0,79	1,31
8	0,6	3,77	1,13	1,88
9	0,7	4,40	1,54	2,57
10	0,8	5,03	2,01	3,35
11	0,9	5,65	2,54	4,24
12	1	6,28	3,14	5,24
13	1,1	6,91	3,80	6,34
14	1,2	7,54	4,52	7,54



Partie B

D'après Michel Serres, il paraît difficile de distinguer le corps et l'esprit pour l'appropriation des savoirs, c'est un peu pour cela qu'il paraît opportun de relier dans le cadre de l'étude de la proportionnalité au collège « la tête et les mains ».

Les activités suivantes débutent dans le *domaine physique* puisqu'il s'agit de pliage, basculent ensuite dans le *domaine mathématique,* domaine où l'élève travaille dans le cadre géométrique, numérique ou des représentations.
Les élèves sont amenés pour chacune des situations où il construit des « familles » d'objets en situation de proportionnalité à observer, décrire, analyser, justifier. Il utilise alors autant l'expression orale qu'écrite.
Les justifications nécessitent l'utilisation des définitions, théorèmes étudiés les années antérieures ou dans l'année en cours . Ces activités sont mises en œuvre en classe de quatrième et de troisième.

Références aux programmes et à leurs documents d'accompagnement

1) **En classe de quatrième**, il est écrit :
a) " La représentation d'objets géométriques du plan et de l'espace, le calcul des grandeurs attachées à ces objets demeurent des objectifs majeurs..."
Dans l'espace les travaux sur les solutions étudiées exploitent largement les résultats de géométrie plane.
b) Il est précisé dans les commentaires : " … que la proportionnalité est un concept capital … qu'elle constitue un fil directeur commun à la plupart des rubriques des programmes… l'étude de situations familières permet de développer chez les élèves un *mode de pensée proportionnel...*
c) Au sujet de la démonstration, il est précisé : on demande de façon plus systématique de repérer et de mettre en œuvre les théorèmes appropriés…»

2) **En classe de troisième**, il est écrit :
Dans l'espace, « ... problèmes des sections planes... des manipulations préalables permettent de conjecturer ou d'illustrer la nature des sections planes... ce sera l' occasion de faire des calculs de longueurs et d'utiliser les propriétés rencontrées dans d'autres rubriques au cour des années antérieures…»
A propos de la proportionnalité il est dit : de nombreuses occasions sont données de conjecturer ou de reconnaître puis d'utiliser la proportionnalité… effets d'une réduction ou d'un agrandissement sur des aires ou des volumes… »

Présentation

Les situations décrites se déroulent en classe de quatrième et troisième.

Il s'agit d'illustrer géométriquement la proportionnalité avec l'obtention par pliage de familles de triangles équilatéraux, de rectangles, de tétraèdres réguliers à partir de formats normalisés. Certains calculs et justifications ne sont abordés qu'en classe de troisième, cette étude nous amenant à la rencontre de $\sqrt{2}$.

Les activités au nombre de cinq se déroulent suivant le schéma suivant :

Je *construis par pliage* une figure : *j'observe, je représente* (schémas, dessins à l'échelle).

Je *mesure, je calcule, je conjecture. Je démontre*, et pour cela j'utilise les propriétés du calcul numérique, du calcul littéral ainsi que tous les théorèmes de la géométrie en ma possession.

Sommaire des activités

Activité 1 :	obtention du triangle équilatéral, démonstration
Activité 2 :	proportionnalité et rectangles
	calcul du coefficient de proportionnalité
Activité 4 :	triangles à côtés proportionnels
Activité 5 :	obtention du tétraèdre régulier

Activité 1

Cette activité correspond à l'obtention du triangle équilatéral par pliage et à la démonstration de ce résultat.

Elle est dans la ligne de cet extrait des commentaires des programmes : « ... on demande de façon plus systématique de repérer et de mettre en œuvre les théorèmes appropriés... »

Le pliage à partir d'une feuille de format A4 correspond à l'exécution d'une tâche inhabituelle ainsi qu'à l'interprétation d'un code.

L'observation de la figure obtenue oblige l'élève à passer du cadre physique au cadre mathématique avec l'utilisation d'un *langage spécifique* se rapportant à des notions géométriques.

Pour parler « efficacement » de ses observations il est amené à *compléter la figure :* nommer des points, tracer des segments (du pli au tracé), coder la figure.

De la *conjecture à la démonstration*.

• Objectif 1 : récupérer le vocabulaire, les propriétés correspondant aux observations, avec mise en relation. Ceci est une étape préalable à l'expression des *pas* de la démonstration.

• Objectif 2 : mise en commun.

Le travail se fait au tableau, on récupère les mots et propriétés, la figure codée est dessinée.

Des figures plus simples correspondant aux conjectures émises en sont extraites, apparaissent ainsi les *pas* de la démonstration, il est alors procédé à la mise en ordre.

• Objectif 3 : rédaction de la démonstration (celle-ci fait l'objet d'un devoir-maison).

La fiche annexe 1 décrit les consignes élève.

Activité 2

Elle se fixe pour objectif l'étude de la proportionnalité à partir des formats normalisés (A4, A5, A6, A7)
La description ci-dessous est présentée sur la *fiche annexe 2.*

1) Travail - maison . l'élève obtient par *pliage* les rectangles aux formats normalisés, ces premières observations portent sur la comparaison des aires, des dimensions de chacun des formats.
Les calculs des dimensions sont faits à partir des dimensions du format A4 présentées sous forme d'un tableau à compléter où figure le rapport L/l (L et l dimensions des rectangles).

2) Mise en commun : l'objectif est de faire apparaître la proportionnalité existant entre les dimensions de chaque rectangle.
Les dispositions des rectangles (alignement des sommets), les valeurs des quotients L/l obtenues dans le tableau donnent à l'élève l'occasion de conjecturer sur l'existence d'une relation de proportionnalité entre les dimensions des rectangles. La justification est plus délicate .
Avec les aires et le tableau de proportionnalité, k étant le coefficient de proportionnalité peut être établie l'égalité $k^2 = 2$.
Sinon, mais cela nécessite une bonne maîtrise du calcul littéral à partir de L/l = l / l/2, établir $L / l = \sqrt{2}$, cette justification peut être abordée en classe de troisième.

3) Travail - maison
L'élève doit obtenir par pliage des triangles équilatéraux à partir des formats normalisés, les mettre en relation, noter ses observations, celles-ci serviront de point de départ à l'activité 3.

Activité 3

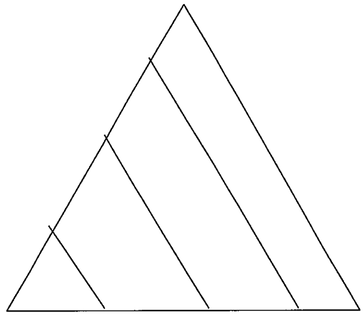
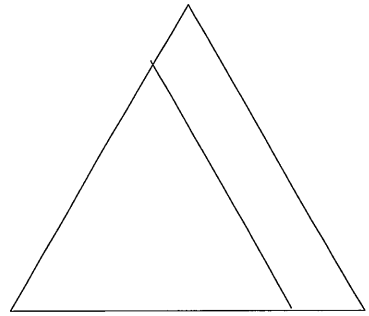
Cette activité permet de retrouver la notion de triangles à côtés proportionnels, le coefficient de proportionnalité étant $\sqrt{2}$.

1) Mise en commun : des dispositions de triangles présentées on retient les suivantes :

a) On *observe* le parallélisme des côtés, des hauteurs.

b) La *démonstration* du parallélisme et de l'alignement est l'occasion d'utiliser les énoncés des classes précédentes concernant parallélisme, angles et perpendiculaires.

c) L'écriture des rapports permet de comparer les côtés, les hauteurs ainsi que les aires.

2) Le travail à la maison comporte deux parties :

a) Affiches de rectangles et de triangles à côtés proportionnels.

b) L'obtention par pliage du tétraèdre régulier (fiche annexe) .

Activité 4

Après les activités précédentes qui nous ont permis, dans l'étude de la proportionnalité d'aborder des notions du programme de la classe de quatrième et des classes antérieures dans les cadres de la géométrie plane, du calcul numérique, du calcul littéral, l'étude du tétraèdre régulier est dans l'espace l'illustration géométrique de la proportionnalité.

Cette étude s'appuie bien entendu sur les résultats obtenus dans les activités précédentes, relation de proportionnalité entre les côtés, les hauteurs des triangles équilatéraux.

L'objectif est d'établir la proportionnalité des hauteurs des tétraèdres ainsi que de calculer le quotient de deux volumes successifs.

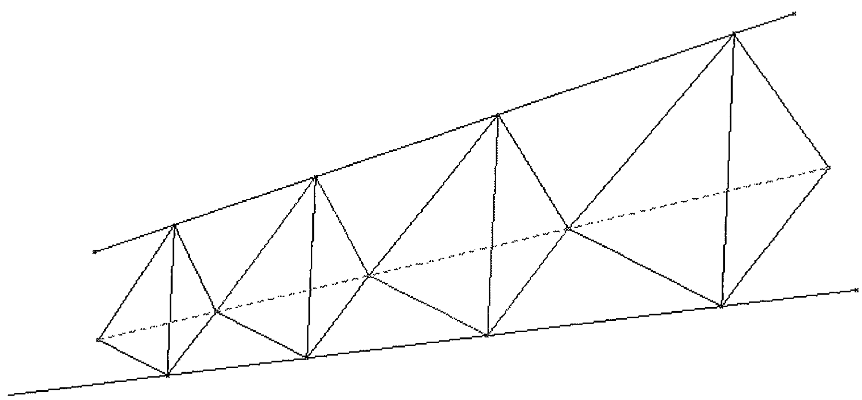
1) <u>Séance 1</u> :

a) ***Observation*** des tétraèdres obtenus par pliage avec des feuilles de format A3,A4,A5,A6,A7,..

Il est procédé à la *description* du tétraèdre régulier, à sa *représentation en perspective* ainsi qu'aux dessins de *patrons;* l'un d'eux étant donné par le pliage.

Les dispositions de tétraèdres permettent de *conjecturer* sur la proportionnalité des hauteurs.

<u>Exemple :</u>



b) Les élèves mesurent les hauteurs des tétraèdres.

La moyenne des mesures donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

2) <u>Séance 2</u> : Calcul de la valeur exacte

Il est admis que le pied de la hauteur du tétraèdre se confond avec le point d'intersection des hauteurs de la face opposée.

Le rappel des propriétés des hauteurs, médianes, médiatrices du triangle équilatéral ainsi que le théorème de Pythagore permettent après avoir extrait les figures planes appropriées d'exprimer les hauteurs des tétraèdres. Ces calculs qui nécessitent une dextérité certaine en calcul numérique et littéral et peuvent être abordés en classe de troisième.

En conclusion, le bilan qui est fait avec les élèves permet d'illustrer géométriquement la proportionnalité et c'est aussi l'occasion de recenser toutes les règles, propriétés, théorèmes rencontrés.

Cette activité se déroule à différents moments de l'année pour la classe de quatrième , en troisième elle permet de réviser les notions antérieures mais aussi de répondre à des objectifs du programme (par exemple qu'en est-il des aires, des volumes lors d'un agrandissement, d'une réduction) .

Fiche Annexe 1 - Activité 1

• Cette activité se fixe pour objectif l'obtention d'un triangle équilatéral par pliage, ensuite la justification des observations.

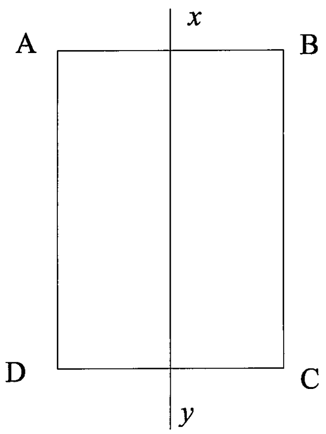
• Deux parties :

- Un travail à la maison, à l'aide des consignes suivantes, l'élève doit exécuter le pliage; le triangle équilatéral étant obtenu, il doit noter la notion correspondante au pliage (*symétrie axiale*), ses propriétés.
- En classe :
    - Présentation des travaux d'élèves.
    - Tri, puis classement des informations réunies permettant la démonstration et sa rédaction.

• Matériel utilisé : une feuille de papier format A4 par élève.

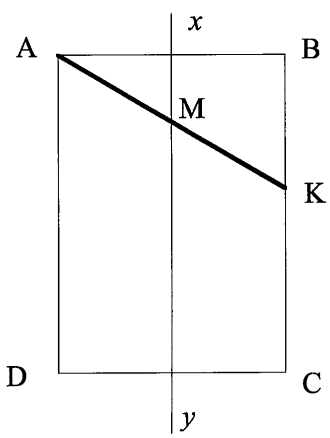
CONSTRUIRE UN TRIANGLE ÉQUILATÉRAL PAR PLIAGE

ABCD est un rectangle

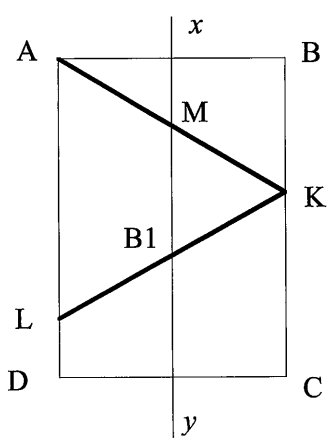


1) Plier en amenant A en B
D en C.

On obtient l'axe (xy).



2) Amener B sur l'axe (*xy*). On obtient B1.
On obtient le point K
Le point M est l'intersection de (xy) et de (AK).
Marquer le pli - droite (AK).



3) Plier suivant la droite (KB1).
Marquer le pli.

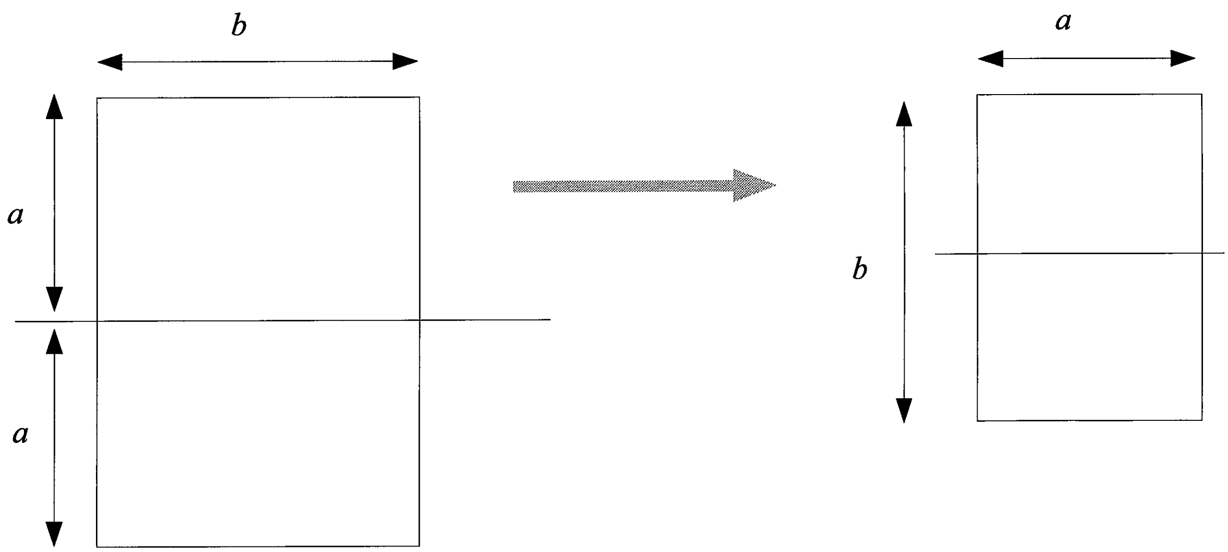
On considère le triangle MKB1.

Fiche annexe 2 - Activité 2

• Cette activité se fixe comme objectif le calcul du coefficient de proportionnalité entre les dimensions des rectangles de formats normalisés A4 - A5 - A6 - A7 …

• Le travail ci-dessous a été donné à la maison à la fin de la séance précédente.

• Matériel élève : une feuille de papier format A4.



format A4 format A5

Chaque format est obtenu en pliant la longueur du rectangle précédent en deux

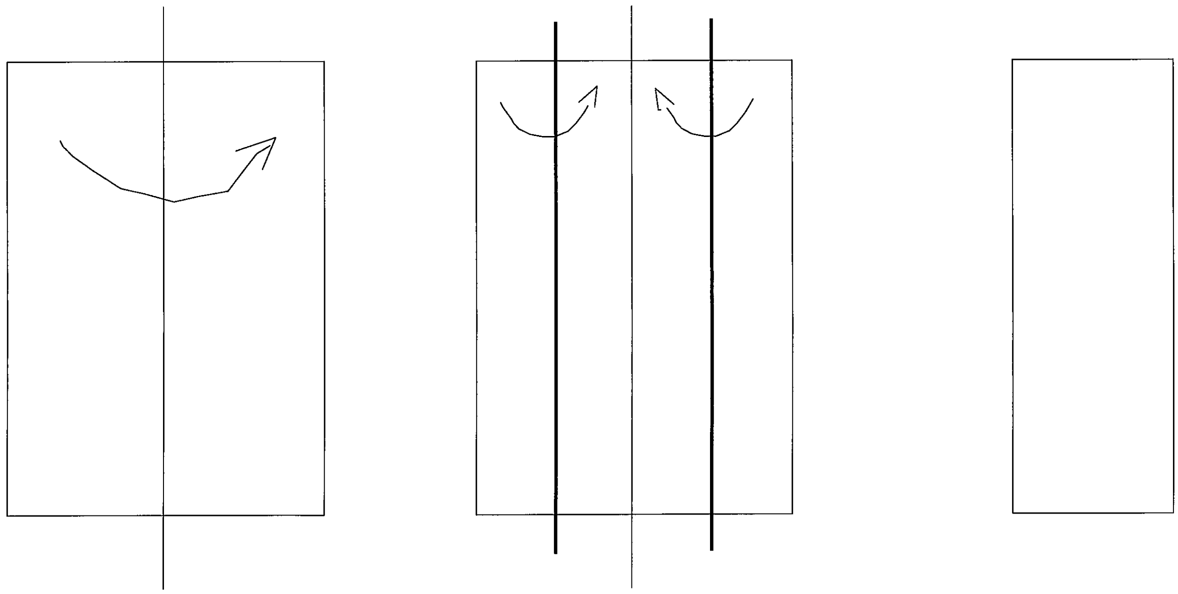
• Compléter le tableau ci-dessous

	Format A3	Format A4	Format A5	Format A6	Format A7
Longueur y		297 mm			
largeur x		210 mm			
rapport $\frac{y}{x}$					

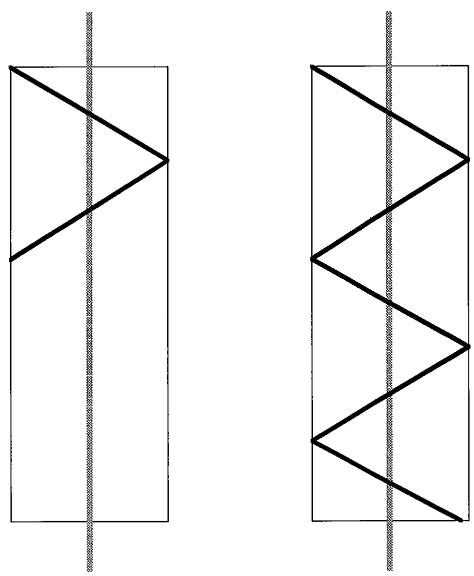
Fiche Annexe 3 - Activité 3

• Travail à la maison

L'objectif est de préparer l'activité en donnant les schémas permettant d'obtenir un tétraèdre par pliage.



À partir de là, on retrouve la même construction par pliage pour obtenir des triangles équilatéraux que dans l'activité 1.



• En dépliant le tétraèdre, les élèves disposent de l'un de ses patrons.

• D'autre part, apparaissent sur chaque face les plis indiquant la section du tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées. C'est l'occasion d'étudier la nature de cette section. Même si en classe de troisième, il est précisé en ce qui concerne les sections d'un solide par un plan «… connaître les sections du cube, du parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face, à une arête…», l'élève de troisième dispose des outils nécessaires pour justifier cette nature, ce faisant on adhère aux commentaires des programmes à propos des sections «… ce sera une occasion de faire des calculs de longueur et d'utiliser les propriétés rencontrées dans d'autres rubriques ou au cours des années antérieures ».

Bibliographie

• La proportionnalité

Intervention de Claude LANDRE

• La proportionnalité - Le calcul numérique

Analyse des contenus, méthodes, progression

COPREM - CRDP de Stasbourg - 1987

• MOTS - Tome 6 « Grandeur - Mesure »

Brochure APMEP n° 46 - 1982

• Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?

Nicolas ROUCHE - collection « L'esprit des sciences » Ellipses - 1998