A VOS STYLOS

Rappel à propos de cette rubrique de problèmes.— Nous cherchons autant que possible à soumettre à nos lecteurs des problèmes originaux, ou en tout cas méconnus. Comme en général peu de mathématiciens ont réfléchi à ces énoncés, du moins sous la forme où ils sont ici proposés, il est hasardeux de prétendre évaluer leur niveau de difficulté. Certains problèmes peuvent donc s'avérer difficiles. Qu'il soit entendu que ni les auteurs des problèmes, ni l'animateur de la rubrique ne sont tenus d'apporter des solutions complètes. L'objectif n'est pas celui-là, il est bien plutôt de susciter l'intérêt des lecteurs, qui sont par ailleurs invités à soumettre leurs propres énoncés pour cette rubrique.

Dominique Dumont

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1,D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2), puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3).
Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

Solutions, par Pierre Renfer et Jacques Dautrevaux.—

Suite à la parution dans notre précédent numéro d'une solution proposée par P. Renfer, nous avons reçu deux courriers de J. Dautrevaux. Sa première lettre nous confirme dans l'impression que le théorème de Morley et Peterson est un peu tombé dans l'oubli et sa solution peu accessible, ce qui justifiait le fait qu'on l'ait proposé dans la présente rubrique. En effet, selon J. Dautrevaux, il en est fait mention seulement sous forme d'énoncés d'exercices dans *J. Frenkel, Géométrie pour l'élève-professeur, p. 339* et aussi dans *Lelong-Ferrand-Arnaudiès, tome 3, p. 681*, avec une indication de méthode différente. J. Dautrevaux nous envoie une solution élégante, géométrique, n'utilisant que les notions élémentaires de produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte.
Dans un second courrier, J. Dautrevaux nous a fait parvenir un long article qui est en fait un cours sur les torseurs : introduction, applications à la Mécanique et à la Géométrie, avec en conclusion une nouvelle et élégante démonstration du théorème de Morley et Petersen.
Faute de place, nous ne pouvons publier les solutions de Jacques Dautrevaux dans cette rubrique à vos stylos.

PROBLÈME 54

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Montrer que si x, y et z sont des entiers impairs, la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier congru à 3 modulo 8.
2°) Soit n un entier congru à 3 modulo 8. Montrer, si possible par une bijection, que le nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \tag{1}$$

est égal au nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$xy + yz + zx = n. \tag{2}$$

Exemple.— $n = 35$. L'équation (1) possède six solutions : $(1,3,5)$, $(1,5,3)$, $(3,1,5)$, $(3,5,1)$, $(5,1,3)$ et $(5,3,1)$; l'équation (2) possède également six solutions : $(1,5,5)$, $(5,1,5)$, $(5,5,1)$, $(1,1,17)$, $(1,17,1)$ et $(17,1,1)$.

Indication : Montrer que le nombre de triplets d'entiers impairs positifs (x, y, z) satisfaisant l'une ou l'autre des deux équations est aussi le nombre de triplets d'entiers (a, b, c) solutions de l'un ou l'autre des deux systèmes d'équation-inéquations suivants :

- $b^2 - 4ac = -n$, avec a, b, c impairs positifs tels que $b < 2a$ et $b < 2c$.
- $b^2 - ac = -n$, avec a *ou* c impair (*ou* est ici inclusif), b tel que $|2b| \leq a \leq c$ et, dans le cas où l'une au moins de ces deux inégalités est une égalité, $b > 0$.

Continuation de l'exemple.— $n = 35$. Le premier système a six solutions (a, b, c) qui sont : $(1,1,9)$, $(3,1,3)$, $(9,1,1)$, $(3,5,5)$, $(5,5,3)$ et $(9,17,9)$; le second système a également six solutions (a, b, c) qui sont : $(1,0,35)$, $(5,0,7)$, $(3,1,12)$, $(3,-1,12)$, $(4,1,9)$ et $(4,-1,9)$.

PROBLÈME 55

Énoncé (proposé par J. Lefort) :

Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = f(x+1)$$

dans l'ensemble le plus vaste possible.

Suggestions de P. Renfer et J. Lefort : a) Une solution f est-elle nécessairement de classe C^∞ ? Comparer ses dérivées successives aux points 0 et 1.

b) Construire une suite de fonctions f_n, où f_n est définie sur $[n, n+1]$ par la récurrence $f_n(x) = f'_{n-1}(x+1)$. Puis recoller ces fonctions.
c) Rechercher des solutions particulières de la forme $e^{\alpha x} sin(\beta x)$, où α et β sont des constantes à déterminer ou à approcher.

PROBLÈME 56

Énoncé (proposé par M. Emery) :

1°) Soient a, b, r des réels tels que $a < b$ et $0 < b - a < 2r$. Soit u une fonction réelle continue sur $[a, b]$, telle que $u(a) = u(b)$, et satisfaisant la propriété suivante :
pour tout z intérieur à $[a, b]$, il existe c et d tels que $a < c < z < d < b$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r, c'est-à-dire donné par une équation de type $y = p + \sqrt{r^2 - (x-q)^2}$.
Montrer que le graphe de u est lui-même un arc de cercle de rayon r.
Remarque.— On peut, dans un premier temps, chercher une démonstration en imposant des hypothèses plus fortes à la fonction u (par exemple des conditions de différentiabilité).
2°) Soient J un intervalle ouvert, r un réel > 0 et u une fonction continue sur l'adhérence de J. On suppose que pour tout z de J il existe c et d dans J tels que $c < z < d$ et tels que les trois points du graphe de u d'abscisses c, z et d se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon r.
Montrer que J est borné, de longueur au plus $2r$, et que le graphe de u est un arc de cercle de rayon r.

PROBLÈME 57

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante entre séries formelles (ou entre séries entières dont on aura calculé le rayon de convergence) :

$$\left(1+x+2^2\frac{x^2}{2!}+3^3\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3 = \left(1+2^2x+3^3\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(1-x-\frac{x^2}{2!}-2^2\frac{x^3}{3!}-3^3\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)$$

PROBLÈME 58

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Démontrer l'identité suivante (on peut, soit lui donner un sens formel en développant chaque fraction rationnelle selon les puissances croissantes de x, soit supposer que $|x| < 1$) :

$$\left(\frac{x}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^6}+\frac{5x^5}{1-x^{10}}+\cdots\right)^2 = \frac{1^3x^2}{1-x^4}+\frac{2^3x^4}{1-x^8}+\frac{3^3x^6}{1-x^{12}}+\frac{4^3x^8}{1-x^{16}}+\cdots$$

PROBLÈME 59

Énoncé (proposé par P. Borel) :

Soit n un entier relatif. Montrer que $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est un carré.

PROBLÈME 60

Énoncé (proposé par P. Borel) :

Résoudre l'équation

$$x^{x^8} = 2$$

a) pour x réel > 0;
b) pour x complexe.