L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN HONGRIE

Par LASZLO Somogyi Directeur
du *BERZSENYI Daniel Gimnázium* BUDAPEST

1. Généralités sur la Hongrie
 2. Le système scolaire
 3. L'enseignement des mathématiques
 4. Olympiades
- Annexes : – énoncés du baccalauréat
– énoncés des concours
– énoncés des olympiades

1. Quelques mots sur la Hongrie

Les ancêtres des hongrois sont arrivés de l'Asie intérieure dans le bassin des Carpates à la fin de IX^e siècle. L'origine de ces peuplades n'est pas mieux connue. La langue hongroise est, avec le finnois et l'estonien, une langue finno-ougrienne. Au cours de X^e siècle les guerriers hongrois nomades ont dévasté plusieurs fois beaucoup de villes de l'Europe occidentale. On retrouve leurs traces dans l'église de Murbach avec le sarcophage des sept moines tués par les Hongrois en 926.

À la fin du X^e siècle leur intégration à l'Europe est inéluctable s'ils ne veulent pas disparaître comme beaucoup d'autres peuples nomades, et c'est le souverain Geza, père du premier roi de Hongrie qui a fait le pas décisif : il appelle des missionnaires chrétiens pour baptiser le peuple. Ce sont ces missionnaires, venus d'Italie, d'Allemagne et de France qui ont fondé les premières écoles. Nous pouvons parler de système éducatif hongrois depuis ce moment là.

La première loi d'éducation qui établit globalement le système scolaire du pays est née en 1777 à l'instigation de Marie-Thérèse, impératrice de Habsbourg, reine de Hongrie.

Après le compromis austro-hongrois de 1867, le développement est accéléré, et dans plusieurs domaines la Hongrie dépasse l'Autriche. C'est la période où la Hongrie moderne s'est formée, y compris le système éducatif qui, par la suite, a donné à l'humanité des savants comme Frédéric RIESZ, Alfred HAAR, Georges POLYA, Jean von NEUMANN, Eugène WIEGNER, Edouard TELLER, Léon SZILARD etc.

2. Le système scolaire

Le système scolaire est actuellement en transition, comme presque tous les domaines de la vie sociale. Les changements étaient prévus par la loi sur l'éducation de 1985. Cette loi a libéralisé la gestion scolaire : jusqu'à cette date, l'enseignement avait suivi le modèle soviétique. À partir de 1985, les établissements scolaires ainsi que les enseignants jouissent d'une plus grande liberté ; ceci a provoqué le

renouveau des écoles, et les expériences éducatives, initiées et menées par des enseignants ou des équipes d'enseignants, se sont multipliées. Cela a engendré des écoles très variées tant dans leurs formes que dans leurs contenus.

Ces changements, conséquences des bouleversements de 1989 ont été codifiés dans la loi de 1992 qui est en vigueur aujourd'hui.

La scolarité obligatoire s'étend de six à seize ans. Mais l'enseignement préélémentaire qui existe en Hongrie s'adresse aux enfants âgés de trois à six ans. L'école maternelle existe depuis 1828, et a les mêmes objectifs qu'en France. Plus de 90 % des enfants âgés de 3 à 6 ans fréquentent l'école maternelle dont le programme est bien nuancé.

À l'âge de six ans il n'est pas obligatoire de commencer l'école primaire. Les parents avec l'accord de l'instituteur de maternelle, peuvent décider que leur enfant commence le primaire ou reste encore une année à l'école maternelle. (Si l'accord n'est pas donné, il y a un procès.) Il est fréquent que les enfants restent une année de plus à l'école maternelle de par la volonté des parents. En général ces enfants ont moins d'échecs par la suite.

L'enseignement primaire dit « général » accueille les enfants âgés de six à quatorze ans, sa durée est donc de 8 ans. L'enseignement secondaire s'adresse aux élèves âgés de 14 à 18 ans, il se déroule dans les lycées classiques et les lycées professionnels. La période secondaire se termine avec le baccalauréat qui n'est pas un épreuve aussi difficile qu'en France. En fait presque 100 % des candidats réussissent le bac. Les élèves qui veulent continuer leurs études dans l'enseignement supérieur doivent passer un examen d'entrée, généralement en deux matières. Le niveau de cet examen est beaucoup plus élevé que celui du baccalauréat.

Après l'école « générale » on peut choisir la filière de l'apprentissage qui dure trois ans. Depuis les changements de 1985 de plus en plus de lycées se transforment en établissement secondaire qui forment pendant six ou huit ans les lycéens, c'est-à-dire qui accueillent les lycéens âgés de 12 à 18 ans ou de 10 à 18 ans. Le programme de ces établissements est unique, développé par les professeurs du lycée et autorisé par le ministère et le directeur de l'établissement. Ainsi se sont développés une concurrence parmi des lycées et un choix pour des élèves.

Il ne faut pas cacher l'autre côté de cette diversité. Comme il y a plus de candidats que de places dans ces établissements, les enfants âgés de 10 ou 12 ans doivent subir un concours. De plus, les élèves qui doivent changer d'école ont des difficultés énormes quand ils veulent continuer leurs études dans un autre établissement selon un autre programme.

L'état essaie de régulariser cette situation par un programme minimal dit « programme national de base » et par un système d'examens centralisés.

Le programme de base contient un tronc commun des connaissances pour les élèves âgés de 6 à 16 ans qui doit être complété par le programme local, fait par les enseignants de l'établissement scolaire. Ce dernier fixe environ la moitié des connaissances enseignées. L'efficacité de l'établissement sera jugée par des examens que les élèves devront subir dans certaines matières et à certains âges. Les deux

dernières années de l'école secondaire servent à la préparation au baccalauréat et à l'examen d'entrée à l'université.

Pour continuer les études universitaires il faut subir un examen d'entrée qui est plus difficile que le baccalauréat. Les écoles supérieures donnent une formation de 3, 4 ans tandis que les universités durent 4, 5 et 6 ans.

Les propriétaires des établissements primaires et secondaires sont en général les municipalités. Ce sont elles qui assurent environ 35 % des moyens financiers pour le fonctionnement. Le reste est assuré par l'état selon l'effectif des élèves de l'école. (La proportion exacte est fixée chaque année dans la loi de budget.)

Depuis 1989 les écoles privées et religieuses se développent et accueillent de nombreux élèves. C'est environ 10 % des élèves qui suivent leurs études dans ces établissements.

Les enseignants sont employés et licenciés par le chef d'établissement. (Bien sûr le licenciement est réglementé.) Jusqu'à 1992 même les salaires étaient fixés par le directeur. Depuis 1992 il y a, comme en France, une échelle qui varie selon le diplôme et l'ancienneté. Les salaires sont très bas, ce qui est un héritage de l'époque précédente. Par exemple un professeur agrégé avec 20 ans d'expérience gagne environ 1200 FF.

Le chef d'établissement est nommé pour 5 ans par la municipalité. La nomination est précédée par une candidature publique. Tout le monde peut se présenter à condition de posséder 5 ans d'expérience d'enseignement. Chaque candidat doit subir une présentation auprès des enseignants de l'école concernée qui votent pour ou contre chacun des candidats. En générale la municipalité respecte l'opinion du personnel enseignant. (Bien qu'il y ait des exceptions ...)

L'année scolaire dure 37 semaines dont 6 jours sont à la disposition des écoles. Elles peuvent les utiliser à organiser les classes vertes, kermesses, etc. L'année se partage en deux semestres. À la fin de ces deux semestres les élèves reçoivent un bulletin mais celui du premier n'a pas d'autre rôle qu'informer les parents. La plupart des heures commencent par un contrôle oral ou écrit. Les notes sont de 1 à 5. Cette dernière est la meilleure note.

L'élève qui n'a aucun 1 dans son bulletin à la fin de l'année peut continuer ses études dans la classe supérieure. Celui qui a reçu 1 en au moins 3 matières dans son bulletin, doit redoubler automatiquement la classe. L'élève qui a 1 dans une ou deux matières doit passer un examen à la fin des grandes vacances pour pouvoir passer dans la classe supérieure.

Le jour scolaire commence à 8 heures du matin, l'après-midi commence à 14 heures. Les élèves de 6 à 10 ans ont en général 4-5 heures par jour (1 séquence d'une heure correspond en fait à 45 minutes) les plus âgés ont 6-7 heures du lundi au vendredi. Le samedi est libre partout. Les élèves ont des travaux à faire à la maison avec une grande fréquence.

Le programme de base nationale fixe 10 domaines culturels et conseille un pourcentage qui indique la quantité des heures par semaine qui seront fixées dans le programme local. Voilà les domaines :

Langue maternelle et littérature	L'art
Langue vivante	Informatique
Mathématiques	Mode de vie et connaissances
L'homme et la société	pratiques
L'homme et la nature	Sport
La Terre et notre environnement	

Les pourcentages conseillés en mathématiques sont les suivants selon les classes :
1^e – 4^e classes : 19-23 % qui correspond 5-6 heures par semaine ;
5^e – 6^e classes : 16-20 % qui correspond 4-5 heures par semaine ;
7^e – 10^e classes : 10-14 % qui correspond 3-4 heures par semaine.

Le programme de 11^e et 12^e est fait par le lycée donc c'est là où le nombre des heures sera déterminé. (12^e classe = terminale)

Il faut ajouter que dans la plupart des écoles les mathématiques sont enseignées en groupe, c'est-à-dire qu'on divise les classes en deux parties, souvent selon le niveau des élèves.

3. L'enseignement des mathématiques

Pour mieux comprendre ce qui se passe actuellement dans les classes en mathématiques il est nécessaire de faire connaître l'œuvre de Tamás VARGA.

Tamás VARGA est né en 1919. Il était professeur à l'Université Roland Eötvös à Budapest, il a participé pendant des années à la formation des professeurs de mathématiques. Par la suite, il était le chef du département de mathématiques à l'Institut Pédagogique National. Ce département jouait un peu le même rôle en Hongrie que les IREM en France. Il participait dans la mise au point du programme de mathématiques dans plusieurs pays. (par exemple en Italie, au Canada, etc.) Il est décédé en 1988.

La nouvelle vague du renouveau de l'enseignement des mathématiques des années 60 a touché la Hongrie. C'est en 1963 que l'expérience complexe dont les auteurs étaient Tamás VARGA et ses collaborateurs, a démarré sous la direction de VARGA. L'expérience était complexe puisqu'elle a visé le renouveau du contenu aussi bien que les méthodes de l'enseignement. Cette expérience a pu bien adapter les éléments positifs des expériences, menées dans le monde.

Le programme est regroupé autour de 5 thèmes :

1) Ensembles, logique	4) Géométrie, mesures
2) Arithmétique, algèbre	5) Analyse combinatoire, probabi-
3) Fonctions, suites	lités, statistique

Chaque thème revient tous les ans afin d'approfondir les notions.

Voici les principes didactiques de l'expérience, rédigés par les auteurs :

1) L'expérience est générale et faite à long terme : générale parce qu'elle n'est pas limitée à un domaine mais essaye de travailler l'unité de différents thèmes. Elle est

faite à long terme puisqu'elle prépare les connaissances qui seront mûres dans les années qui viennent.

2) Souplesse, flexibilité

3) Indépendance et goût du travail des élèves : le but est d'élever à l'indépendance, plus précisément à l'indépendance de pensée, à la résolution et la proposition de problèmes, à l'autovérification. La plus en plus grande indépendance, la possibilité du choix, le travail volontaire et non imposé active le goût du travail.

Il est important que la quantité et la qualité des problèmes et des devoirs proposés soient tels que les « élèves doivent faire des efforts », les meilleurs aussi bien que les plus faibles. Bien sûr il faut leur assurer le soutien adéquat.

4) L'indépendance et le goût du travail des enseignants : les enseignants eux-mêmes font leur travail avec plus de plaisir s'ils ont la possibilité de choix et ce n'est pas uniquement les instructions qui dirigent leur activité professionnelle. En plus, les professeurs qui se sont habitués à l'indépendance et à l'initiative sont capables de former davantage des élèves indépendants et qui prennent des initiatives. L'indépendance des enseignants ne veut pas dire qu'ils sont laissés seuls : ils reçoivent des principes pédagogiques précis avec lesquels ils peuvent discuter ou qu'ils peuvent compléter par leurs propres idées. Les professeurs donc reçoivent un cadre et ils ont la possibilité de le remplir.

5) L'Autorité doit être remplacée par le respect du travail : Le principe suivant : « le professeur a toujours raison » doit être rejeté ; laissons plutôt discuter les élèves. De temps à autre il est profitable de faire exprès des fautes pour stimuler les élèves à rédiger leurs contre-avis. Mais il faut les tenir partenaires même quand ils corrigent notre faute involontaire. Les professeurs ne craignent pas pour leur autorité puisque elle n'est pas basée sur leur vérité indiscutable mais sur le fait que les élèves sont à l'aise et travaillent avec plaisir sous leur direction.

6) La diminution du rôle « il faut ... » : s'il est possible, utilisons de moins en moins les expressions de ce type : « il faut être en silence ! » ou « il faut être attentif ! ». Il est préférable de rendre les élèves capables de reconnaître ce qui est bon pour eux.

7) Plutôt exploiter qu'éteindre l'activité des élèves

Les professeurs de mathématiques se sont associés volontairement à cette expérience, dite complexe, au cours des années 60. Par la suite, dans les années 70 il y avait parallèlement deux programmes et méthodes différentes au libre choix des professeurs de mathématiques. À cette époque-là cette situation était révolutionnaire. Au fur et à mesure, sans pression, le nouveau programme et la méthode ont gagné du terrain, et finalement c'est en 1978 qu'il était introduit généralement.

Depuis cette date le programme en mathématique était modifié plusieurs fois mais l'expérience décrite ci-dessus exerçait une influence profonde même jusqu'à nos jours, sur l'enseignement des mathématiques en Hongrie.

Selon le principe généralement accepté, le rôle de l'enseignement des mathématiques consiste à rendre les élèves capables de reconnaître les situations-problèmes, d'édifier un modèle mathématique et de juger si la solution trouvée répond à la vie réelle.

Nous pouvons difficilement donner un panorama précis sur les évolutions actuelles de l'enseignement des mathématiques puisque chaque établissement possède son programme propre. Il n'y a plus d'inspection donc le seul contrôle professionnel est l'efficacité de l'établissement au point de vue de l'admission de ses élèves dans un lycée réputé ou dans une université.

Souvent il arrive qu'une école ou lycée développe et utilise plusieurs programmes de certaines matières. Par exemple le lycée Berzsenyi, une des meilleures écoles secondaires de Budapest, utilise quatre programmes différents en mathématiques : un dans la section littéraire, un dans la section physique, un dans la section chimie-biologie et un dans la section mathématique.

La section mathématique est adressée aux élèves doués en mathématiques. Il y a quatre classes dans la capitale et quatre autres classes à la campagne dans les villes universitaires. Ces sections mathématiques remontent au début des années 60 et ont formé des générations de mathématiciens.

On peut quand même dire que la tendance dans l'enseignement des mathématiques est qu'on choisit plutôt des chapitres plus pratiques, plus « utiles ». Il y a discussion sur l'utilité de la géométrie élémentaire qui jouait un rôle important dans le programme et qu'on veut diminuer. La probabilité et la statistique gagnent du terrain dans l'enseignement malgré une certaine aversion des professeurs. Il y a des expériences qui visent l'utilisation des calculatrices qui sont payées par les distributeurs de grandes marques.

4. Olympiades

L'histoire des olympiades mathématiques en Hongrie remonte au 19^e siècle. La première compétition fut organisée par la Société de Mathématiques et de Physique en 1894 pour des jeunes gens qui passaient leur baccalauréat cet année là. Depuis, cette compétition est organisée chaque année. Voilà quelques noms sur la liste des gagnants: L. Fejer, D. Konig, A. Haar, G. Szego, E. Teller etc.

Depuis ce temps les olympiades jouent un rôle non négligeable dans la découverte et l'éducation des élèves doués.

Les élèves de 8 à 14 ans sont concernés par deux types de compétition. L'une est « classique », c'est à dire qu'il y a quelques énoncés à résoudre, l'autre est de type « Kangourou ». Pour les élèves de 13-14 ans s'organise la compétition „Tamas Varga”, pour les élèves de 14-16 ans la compétition „Daniel Arany”, puis la plus prestigieuse qui est la « Compétition Nationale des Lycéens ». Elle est organisée

pour les élèves de 16-18 ans. Chaque compétition commence par une éliminatoire à l'école, puis se termine par une finale nationale.

Depuis 1993 le concours « Mathématiques sans frontières », venu de l'Alsace a franchi la frontière hongroise et a ravi les élèves et professeurs magyars. L'année scolaire 1998/99 a compté 6 200 participants.

Annexes

A) Olympiade – compétition „Daniel Arany”, 1994/95 – éliminatoire 14-15 ans

1. Résoudre l'équation suivante, où x, y, z sont des entiers naturels :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2,5$$

2. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2 - y^2.$$

3. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont inférieurs à 90° . Un cercle passant par B et C coupe le côté AB en P et le côté AC en Q. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle APQ. Démontrer, que les droites (AO) et (BC) sont perpendiculaires.

4. La suite est définie de la manière suivante :

$$a_n = \frac{a_{n-1}\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - a_{n-1}} \quad \text{et} \quad a_1 = A \quad \text{où } A \text{ est un entier positif}$$

Déterminer la valeur de a_{1995} .

5. Vérifier que : $s_n = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$ n'est pas entier quelque soit l'entier positif n .

B) Olympiade – compétition „Daniel Arany”, 1998/99 – éliminatoire 15-16 ans

1. Résoudre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'équation : $3(x-y) = x^2 - xy + y^2$.

2. Soit O le centre du parallélogramme ABCD. L'angle $\widehat{DAB}$ est égal à l'angle $\widehat{AOD}$. Démontrer que : $AC^2 - BD^2 = 2(AB^2 - BC^2)$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{4-x} = c + \sqrt{x-1}$ où c est un paramètre entier.

4. On relie les points d'intersection de n droites où n est un entier. Combien peut-on former de nouvelles droites au plus ?

C) Olympiade – Compétition Nationale des Lycéens, 1998 – éliminatoire 16-18 ans

1. On écrit un nombre entier dans tous les carrés d'un tableau 3×3 de façon à ce qu'il y ait parmi eux des pairs et impairs. Puis on compose un second tableau à partir du premier de la façon suivante : on additionne les nombres écrits dans les carrés voisins d'un carré M du tableau original et on écrit cette somme dans le carré M du nouveau tableau. On fait de même avec les 8 autres carrés.

Répondre aux questions suivantes : en répétant ce processus peut-on obtenir à partir d'un tableau quelconque un tableau dont tous les carrés contiennent un nombre

a) impair ? b) pair ?

(Deux carrés sont voisins s'ils ont un côté commun.)

Voilà un exemple du processus utilisé pour composer un nouveau tableau :

3	-1	0
9	7	2
1	3	6

→

8	10	1
11	13	13
12	14	5

2. Le cercle inscrit dans le triangle ABC touche les côtés AB, BC, CA en C_1, A_1, B_1 . Soit C_2 le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ du cercle circonscrit qui ne contient pas le sommet C, A_2 le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ du cercle circonscrit qui ne contient pas le sommet A, B_2 le milieu de l'arc $\widehat{AC}$ du cercle circonscrit qui ne contient pas le sommet B. Démontrer que les droites $(A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2)$, se coupent en un point.

3. Résoudre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + (x^2 - 8x + 14)\sqrt{x + y - 2} = 1 \\ 2x + 5y + \sqrt{xy} - x = 3 \end{cases}$$

4. Démontrer que la suite $a_n = 5 \frac{10^n - 1}{9} + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ne contient pas de nombre carré.

D) Olympiade – Compétition Nationale des Lycéens, 1998 – finale 16-18 ans

1. Démontrer que la moyenne arithmétique de

$2 \sin 2^\circ, 4 \sin 4^\circ, 6 \sin 6^\circ, \dots, 2k \sin(2k)^\circ, \dots, 180 \sin 180^\circ$ est égale à $\cot 1^\circ$.

2. Soient P, Q, R des points sur les côtés AB, BC, CA d'un triangle ABC puis A', B', C' des points sur les côtés PR, QP, RQ du triangle PQR de façon que AB et $A'B'$, BC et $B'C'$, CA et $C'A'$ soient parallèles. Démontrer que le rapport des longueurs des côtés parallèles des triangles ABC et $A'B'C'$ est égale au rapport des aires des triangles PQR et $A'B'C'$.

3. x, y, n sont des entiers positifs qui vérifient les conditions suivantes :

$$x \leq y; \text{PGCD}(x, y) = 1998; \text{PPCM}(x, y) = n.$$

Pour quelles valeurs de n, x et y existent-ils ?

Pour quelles valeurs de n le nombre de solutions sera-t-il inférieur à 1998 ?

E) Baccalauréat, 1997

1. On allonge un côté d'un carré d'un cinquième de sa longueur et on diminue dans le même rapport le côté voisin. Est ce que l'aire est changée ? Si oui, le changement est de combien pour cent ? (10 points)

2. Résoudre l'inéquation suivante : $\ln_3(3x - 2) \geq 0$ (8 points)

3. Soit R et r les deux rayons d'un cône tronqué. On coupe en deux par un plan parallèle aux cercles de telle manière que les volumes des deux parties soient égaux. Calculer le rayon du cercle d'intersection du plan et du cône tronqué. (14 points)
4. Résoudre l'équation suivante : $\sqrt{3} \sin 2x = 2 \sin^2 x + 1$ (14 points)
5. Les coordonnées de deux sommets voisins d'un carré sont $A(5,-2)$ et $B(-4,4)$. Calculer les coordonnées des deux autres sommets du carré. (12 points)
6. Combien de diviseurs positifs possède le nombre 2700 ? (10 points)
7. Démontrer que les hauteurs d'un triangle quelconque se coupent en un point.

F) Examen d'entrée à l'université, 1999

<i>Durée de travail :</i>	180 minutes.	
<i>Barème :</i>	0-17 points	: non-réussite
	60-80 points	: très bon

1. Quand on divise un nombre de deux chiffres par le produit de ses deux chiffres, le quotient est égale à 5 et le reste est égale à 2. Quand on soustrait de ce nombre celui obtenu par l'interversion de ses deux chiffres, la différence est égale à 45. Déterminer ce nombre de deux chiffres. (10 points)
2. Déterminer les cinq premiers termes d'une suite arithmétique dont le premier membre est égale à 1, la somme de ces cinq termes est égale à un quart de la somme des cinq termes suivants. (11 points)
3. Résoudre l'équation sur l'intervalle $[0; \pi]$:
- $$8 \cos 2x + 7 \cos^2 x = 5 \sin x + \frac{27}{4} \quad (11 \text{ points})$$
4. Quels sont les points $P(x,y)$ à l'intérieur du cercle, de centre $C(2,1)$ et de rayon 2, qui vérifient les équations suivantes :
- $$3^x + 3^{y-\frac{1}{2}} = 4 \quad \text{et} \quad (2x-y)^2 = \frac{9}{4} \quad (13 \text{ points})$$
5. Pour quelle valeur de p l'équation suivante possède-t-elle exactement une solution : $(2 + \log_2 p) x^2 + (6 \log_2 p) x + 4 \log_2 p + 1 = 0$ (13 points)
6. La distance des centres de deux cercles non sécants est de 12. La longueur du segment de la tangente commune intérieure est de $4\sqrt{3}$ et la longueur du segment de tangente commune extérieure est de $2\sqrt{35}$. Calculer la longueur des deux rayons. (13 points)
7. L'aire d'un rectangle est égale à celle d'un autre dont les côtés sont les bissectrices du premier rectangle. Calculer l'angle des deux diagonales. (14 points)
8. Déterminer le maximum et le minimum de $4x - 3y + 8z$ où x, y, z sont des réels non négatifs qui vérifient les équations suivantes :
- $$4x + y + 4z = 3 \quad \text{et} \quad 3x + 6y - 4z = 4. \quad (15 \text{ points})$$