## A VOS STYLOS

**Rappel à propos de cette rubrique de problèmes.—** Nous cherchons autant que possible à soumettre à nos lecteurs des problèmes originaux, ou en tout cas méconnus. Comme en général peu de mathématiciens ont réfléchi à ces énoncés, du moins sous la forme où ils sont ici proposés, il est hasardeux de prétendre évaluer leur niveau de difficulté. Certains problèmes peuvent donc s'avérer difficiles. Qu'il soit entendu que ni les auteurs des problèmes, ni l'animateur de la rubrique ne sont tenus d'apporter des solutions complètes. L'objectif n'est pas celui-là, il est bien plutôt de susciter l'intérêt des lecteurs, qui sont par ailleurs invités à soumettre leurs propres énoncés pour cette rubrique.

Dominique Dumont

### PROBLÈME 52

**Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :**

Soient trois droites $D_1$,$D_2$, $D_3$ dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient $P_1$, $P_2$, $P_3$ les perpendiculaires communes resp. de $(D_2, D_3)$, $(D_3, D_1)$, $(D_1, D_2)$, puis $U_1$, $U_2$, $U_3$ les perpendiculaires communes resp. de $(D_1, P_1)$, $(D_2, P_2)$, $(D_3, P_3)$.
Montrer que les trois droites $U_1$, $U_2$, $U_3$ rencontrent à angle droit une dixième droite $Z$ (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

**Solution par Pierre Renfer.—**
[*Rappel de D. Dumont.*— A toute droite on associe le retournement ayant pour axe cette droite (la symétrie par rapport à cette droite). Rappelons que tout déplacement dans l'espace peut s'écrire comme le composé de tels retournements. Le cas général est celui d'un déplacement hélicoïdal (ou *vissage*) d'axe $D$, qui peut s'écrire comme le composé de deux retournements $r_1$ et $r_2$, $D$ étant alors la perpendiculaire commune aux axes de $r_1$ et $r_2$. Dans le cas particulier où ces deux axes sont concourants (resp. parallèles), leur composé est une rotation (resp. une translation).]
**Lemme 1.—** *Soient trois retournements $r_1$, $r_2$ et $r_3$. Leur composé $r = r_1 \circ r_2 \circ r_3$ est un retournement si et seulement si leurs trois axes sont parallèles ou ont une perpendiculaire commune.*
Supposons que $r$ soit un retournement et posons $f = r_1 \circ r_2 = r \circ r_3$. Si $f$ est une translation, les axes des quatre retournements sont parallèles (et orthogonaux au vecteur de translation), tandis que si $f$ est un vissage, les axes des quatre retournements ont une perpendiculaire commune, l'axe du vissage.
Réciproquement, si les axes de trois retournements $r_1$, $r_2$, $r_3$ sont parallèles ou ont une perpendiculaire commune, alors il existe un retournement $r$ tel que $r_1 \circ r_2 = r \circ r_3$.

**Lemme 2.**— *Soient $u$ et $v$ deux déplacements tels que $u^{-1} = v \circ u \circ v^{-1}$. Alors $v$ est un retournement.*
En effet, distinguons deux cas :
a) si $u$ est un vissage d'axe $D$, sa transmuée $v \circ u \circ v^{-1}$ est un vissage d'axe $v(D)$. Donc $v(D) = D$. Une telle tranformation $v$ est soit un vissage d'axe $D$ (éventuellement réduit à une translation), soit un retournement d'axe perpendiculaire à $D$. Mais si c'est un vissage, on a $v \circ u \circ v^{-1} = u$. Mais $v \circ u \circ v^{-1} = u^{-1}$, donc $v$ est un retournement.
b) si $u$ est une translation de vecteur $\vec{a}$ non nul, alors sa transmuée $v \circ u \circ v^{-1}$ est une translation de vecteur $\vec{v}(\vec{a})$ (où $\vec{v}$ désigne ici l'application linéaire associée à $v$.) Donc $\vec{v}(\vec{a}) = -\vec{a}$, par suite $v$ est un retournement.
**Démonstration du théorème de Morley et Petersen.**—
On note par la minuscule correspondante $d$ le retournement ayant pour axe la droite $D$.
Pour chaque $i = 1, 2, 3$, comme $D_i$ et $U_i$ sont perpendiculaires, $d_i$ et $u_i$ commutent.
D'après le lemme 1, $D_3$, $D_2$ et $U_1$ ayant une perpendiculaire commune $P_1$, le composé $d_3 \circ d_2 \circ u_1$ est un retournement, donc (et de même pour les suivants) :

$$\begin{aligned}
d_3 \circ d_2 \circ u_1 &= u_1 \circ d_2 \circ d_3 \\
d_3 \circ d_1 \circ u_2 &= u_2 \circ d_1 \circ d_3 \\
d_1 \circ d_2 \circ u_3 &= u_3 \circ d_2 \circ d_1
\end{aligned}$$

Posons $u = d_3 \circ d_2 \circ d_1$ et $v = u_3 \circ u_2 \circ u_1$. Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
v \circ u \circ v^{-1} &= u_3 \circ u_2 \circ u_1 \circ d_3 \circ d_2 \circ d_1 \circ u_1 \circ u_2 \circ u_3 \\
&= u_3 \circ u_2 \circ u_1 \circ d_3 \circ d_2 \circ u_1 \circ d_1 \circ u_2 \circ u_3 \\
&= u_3 \circ u_2 \circ u_1 \circ u_1 \circ d_2 \circ d_3 \circ d_1 \circ u_2 \circ u_3 \\
&= u_3 \circ u_2 \circ d_2 \circ d_3 \circ d_1 \circ u_2 \circ u_3 \\
&= u_3 \circ u_2 \circ d_2 \circ u_2 \circ d_1 \circ d_3 \circ u_3 \\
&= u_3 \circ d_2 \circ u_2 \circ u_2 \circ d_1 \circ d_3 \circ u_3 \\
&= u_3 \circ d_2 \circ d_1 \circ d_3 \circ u_3 \\
&= d_1 \circ d_2 \circ u_3 \circ d_3 \circ u_3 \\
&= d_1 \circ d_2 \circ d_3 \circ u_3 \circ u_3 \\
&= d_1 \circ d_2 \circ d_3 \\
&= u^{-1}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 2, $v$ est un retournement. D'après le lemme 1, les axes $U_1$, $U_2$, $U_3$ sont parallèles ou ont une perpendiculaire commune. Le cas de leur parallélisme est exclu, car $D_1$, $D_2$ et $D_3$ seraient alors parallèles à un même plan (orthogonal aux $U_i$), ce qui est exclu par l'énoncé.

## PROBLÈME 53

**Énoncé (proposé par D. Dumont) :**

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des $2-$mélanges réguliers (pour la définition d'un $2-$mélange, voir les articles sur les tours de cartes dans les numéros 90 et 93 de l'Ouvert).
1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.
2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de $n$ pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.

**Indication :** Pour la première question, on pourra d'abord montrer le résultat général suivant : si $f$ est une fonction affine de $Z/mZ$ dans $Z/mZ$ de la forme $f(x) = ax + b$, où $a$ est un élément inversible dans l'anneau $Z/mZ$ et $b$ un élément quelconque, alors $f$ est une permutation d'ordre au plus égal à $m$.
Pour la deuxième question, on examinera le cas où $n = 3^k$.

---

## PROBLÈME 54

**Énoncé (proposé par D. Dumont) :**

1°) Montrer que si $x$, $y$ et $z$ sont des entiers impairs, la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier congru à 3 modulo 8.
2°) Soit $n$ un entier congru à 3 modulo 8. Montrer, si possible par une bijection, que le nombre de triplets ordonnés $(x, y, z)$ d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \tag{1}$$

est égal au nombre de triplets ordonnés $(x, y, z)$ d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$xy + yz + zx = n. \tag{2}$$

*Exemple.*— $n = 35$. L'équation (1) possède six solutions : $(1, 3, 5)$, $(1, 5, 3)$, $(3, 1, 5)$, $(3, 5, 1)$, $(5, 1, 3)$ et $(5, 3, 1)$; l'équation (2) possède également six solutions : $(1, 5, 5)$, $(5, 1, 5)$, $(5, 5, 1)$, $(1, 1, 17)$, $(1, 17, 1)$ et $(17, 1, 1)$.

**Indication :** Montrer que le nombre de triplets d'entiers impairs positifs $(x, y, z)$ satisfaisant l'une ou l'autre des deux équations est aussi le nombre de triplets d'entiers $(a, b, c)$ solutions de l'un ou l'autre des deux systèmes d'équation-inéquations suivants :
• $b^2 - 4ac = -n$, avec $a$, $b$, $c$ impairs positifs tels que $b < 2a$ et $b < 2c$.
• $b^2 - ac = -n$, avec $a$ *ou* $c$ impair (*ou* est ici inclusif), $b$ tel que $|2b| \leq a \leq c$ et, dans le cas où l'une au moins de ces deux inégalités est une égalité, $b > 0$.

*Continuation de l'exemple.*— $n = 35$. Le premier système a six solutions $(a, b, c)$ qui sont : $(1, 1, 9)$, $(3, 1, 3)$, $(9, 1, 1)$, $(3, 5, 5)$, $(5, 5, 3)$ et $(9, 17, 9)$; le second système a également six solutions $(a, b, c)$ qui sont : $(1, 0, 35)$, $(5, 0, 7)$, $(3, 1, 12)$, $(3, -1, 12)$, $(4, 1, 9)$ et $(4, -1, 9)$.

---

## PROBLÈME 55

**Énoncé (proposé par J. Lefort) :**

Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = f(x+1)$$

dans l'ensemble le plus vaste possible.

**Suggestions de P. Renfer et J. Lefort :** a) Une solution $f$ est-elle nécessairement de classe $C^\infty$ ? Comparer ses dérivées successives aux points 0 et 1.
b) Construire une suite de fonctions $f_n$, où $f_n$ est définie sur $[n, n+1]$ par la récurrence $f_n(x) = f'_{n-1}(x+1)$. Puis recoller ces fonctions.
c) Rechercher des solutions particulières de la forme $e^{\alpha x} sin(\beta x)$, où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes à déterminer ou à approcher.

---

## PROBLÈME 56

**Énoncé (proposé par M. Emery) :**

1°) Soient $a, b, r$ des réels tels que $a < b$ et $0 < b - a < 2r$. Soit $u$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$, telle que $u(a) = u(b)$, et satisfaisant la propriété suivante :
pour tout $z$ intérieur à $[a, b]$, il existe $c$ et $d$ tels que $a < c < z < d < b$ et tels que les trois points du graphe de $u$ d'abscisses $c$, $z$ et $d$ se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon $r$, c'est-à-dire donné par une équation de type $y = p + \sqrt{r^2 - (x-q)^2}$.
Montrer que le graphe de $u$ est lui-même un arc de cercle de rayon $r$.
*Remarque.*— On peut, dans un premier temps, chercher une démonstration en imposant des hypothèses plus fortes à la fonction $u$ (par exemple des conditions de différentiabilité).
2°) Soient $J$ un intervalle ouvert, $r$ un réel $> 0$ et $u$ une fonction continue sur l'adhérence de $J$. On suppose que pour tout $z$ de $J$ il existe $c$ et $d$ dans $J$ tels que $c < z < d$ et tels que les trois points du graphe de $u$ d'abscisses $c$, $z$ et $d$ se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon $r$.
Montrer que $J$ est borné, de longueur au plus $2r$, et que le graphe de $u$ est un arc de cercle de rayon $r$.

---

## PROBLÈME 57

**Énoncé (proposé par D. Dumont) :**

Démontrer l'identité suivante entre séries formelles (ou entre séries entières dont on aura calculé le rayon de convergence) :

$$\Big(1+x+2^2\frac{x^2}{2!}+3^3\frac{x^3}{3!}+\cdots\Big)^3=\Big(1+2^2x+3^3\frac{x^2}{2!}+4^4\frac{x^3}{3!}+\cdots\Big)\Big(1-x-\frac{x^2}{2!}-2^2\frac{x^3}{3!}-\cdots\Big)$$

---

PROBLÈME 58

**Énoncé (proposé par D. Dumont) :**

Démontrer l'identité suivante (on peut soit lui donner un sens formel en développant chaque fraction rationnelle selon les puissances croissantes de $x$, soit supposer que $|x|<1$) :

$$\Big(\frac{x}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^6}+\frac{5x^5}{1-x^{10}}+\cdots\Big)^2=\frac{1^3x^2}{1-x^4}+\frac{2^3x^4}{1-x^8}+\frac{3^3x^6}{1-x^{12}}+\frac{4^3x^8}{1-x^{16}}+\cdots$$