

26^e RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE

CORRIGÉ DES ÉPREUVES 1999

Nous avons sélectionné, pour chacun des exercices, une solution de candidats qui nous a paru intéressante. Pour deux des sujets nous ne proposons pas d'autre corrigé : la copie d'élèves étant déjà tout à fait satisfaisante.

ÉPREUVES DE PREMIÈRES

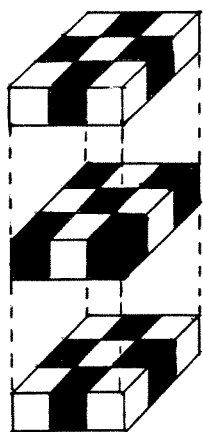
Sujet 1 : JOUALI Youssef et TROG Alexandre (Lycée Marc Bloch de Bischheim)

La souris se trouve dans le (petit) cube central d'un grand cube, composé de 27 petits cubes. Puisque $\sqrt[3]{27} = 3$, on en déduit que ce grand cube est formé de 3 couches, similaires, de $3 \times 3 = 9$ petits cubes.

L'énoncé affirme que la souris ne peut passer d'un cube à un autre que s'ils ont une face commune, et bien sûr sans repasser par un même cube.

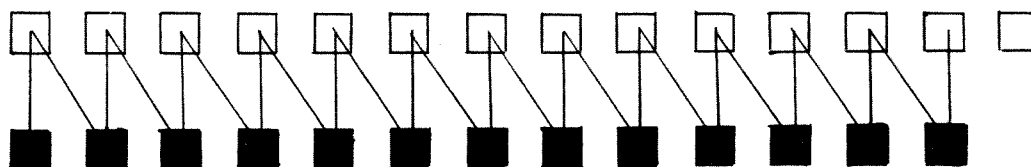
En donnant à chaque cube une couleur différente des cubes qui sont en contact face à face avec lui, et en n'utilisant que deux couleurs, les consignes peuvent se traduire par : "la souris dévore les cubes un par un, ne pouvant passer de l'un à l'autre que s'ils sont de couleurs différentes".

On obtient donc le schéma suivant :



Il y a donc 13 cubes gris et 14 cubes blancs. Sachant que la souris part d'un cube gris, il apparaît clairement qu'elle ne pourra pas manger tout le fromage en suivant les consignes. En effet, elle en mange un gris, puis un blanc, puis un gris, et ainsi de suite. Malheureusement en arrivant à l'avant-dernier cube, elle ne pourra passer au dernier, puisqu'ils sont tous les deux blancs.

Cela apparaît plus clairement au travers du schéma suivant :



Chemin emprunté par la souris : _____

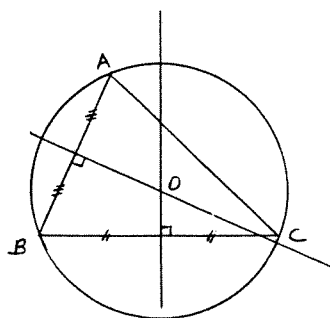
La souris ne peut donc pas manger tout le fromage.

Sujet 2 : GRETENER Maxime et DALMAR Geoffroy (Lycée Jean Monnet de Strasbourg)

Puisqu'il y a trois sorties de terrier, la figure représentée est un triangle ou un segment dans le cas où les trois terriers sont alignés.

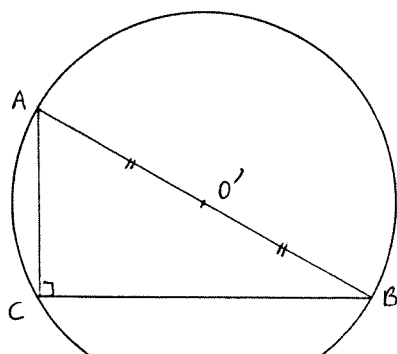
Divers cas sont possibles et dans chacun des cas le point change d'emplacement mais reste toujours à l'intérieur ou sur les limites du triangle ou du segment fermé.

1er cas : Triangle aux angles aigus (quelconques, isocèles non rectangles, équilatéraux)



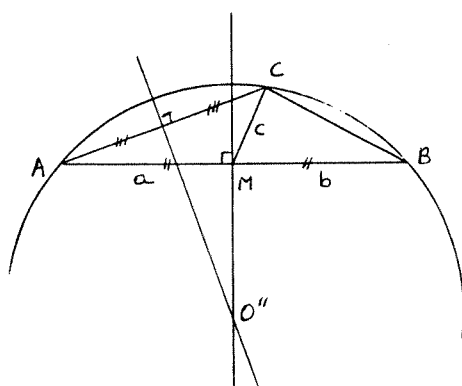
O est le centre du cercle circonscrit à ABC . Donc $OA = OB = OC = r$, r étant le rayon du cercle. Le renard doit se placer en O car s'il se déplace, une des distances qui le sépare d'un terrier augmentera et sera donc supérieure à r .

2ème cas : Triangle rectangle (et rectangle isocèle)



Ici, comme pour le triangle aux angles aigus, la démonstration est la même, le renard doit se placer à égale distance des trois terriers. Mais dans ce cas de figure, le centre du cercle circonscrit se trouve au milieu de l'hypothénuse. Ce qui nous amène au 3ème cas.

3ème cas : Triangle avec un angle obtus ($> 90^\circ$) isocèle ou non



A l'évidence, si le renard se place en O'' il ne sera pas au point le plus proche des trois terriers.

Comme pour les deux premiers cas, le renard doit se placer à égale distance de deux terriers (A et B ici). Donc, il doit se placer sur la médiatrice de $[AB]$. Reste à savoir où.

Soit M le point où le renard doit se placer pour que le terrier le plus loin soit le plus proche possible.

On sait que M est sur la médiatrice de $[AB]$, et M ne doit pas sortir du triangle ABC .

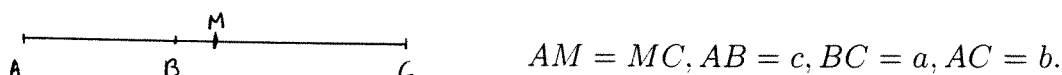
Soit $a = MA$, $b = MB$ et $c = MC$.

On a $a = b = c$ lorsque $O'' = M$; lorsque M se dirige vers A et B en restant sur la médiatrice de $[AB]$, $c < b$ et $c < a$. Donc c sera forcément la distance la plus

courte du renard aux terriers (par rapport à a et b). Il nous faut donc a et b le plus petit possible, donc il faut $a = b$.

Donc M doit se placer au milieu du côté le plus long.

4ème cas : Trois terriers alignés



A l'évidence M doit être sur $[AC]$ pour que $AM + MC$ soit le plus court possible. De ce fait, MB sera plus petit que AM et MC . Donc il nous faut $AM = MC$, c'est-à-dire M milieu de $[AC]$ pour que la distance du renard au terrier le plus loin possible soit le plus proche possible, car si M tend vers C , AM sera supérieur à MC .

Donc la distance du renard au terrier le plus loin sera la plus petite lorsque le renard se situera au milieu du segment formé par les deux terriers les plus éloignés dans le cas où les trois terriers seront alignés.

Sujet 3 : GLEIXNER Karoline et BOST Jean-François (Lycée français de Vienne (Autriche))

Le problème de Boris :

$$\begin{aligned}
 a + b + c &= abc \\
 \Leftrightarrow \frac{a + b + c}{abc} &= 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{a}{abc} + \frac{b}{abc} + \frac{c}{abc} &= 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} &= 1.
 \end{aligned}$$

Donc $a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$ (la division par 0 étant impossible) donc comme a, b et $c \in \mathbb{N}$ $a \geq 1$ $b \geq 1$ $c \geq 1$.

Attention : cette partie est mal rédigée : voir commentaires sur les "divisions par zéro" (1).

Considérons que aucun des trois nombres soit égal à 1 donc que

$$\begin{aligned}
 a &\geq 2 \quad b \geq 2 \quad c \geq 2 \quad (2) \\
 \Rightarrow ab &\geq 4 \quad ac \geq 4 \quad bc \geq 4 \\
 \Rightarrow \frac{1}{ab} &\leq \frac{1}{4} \quad \frac{1}{ac} \leq \frac{1}{4} \quad \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{4} \\
 \Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} &\leq \frac{3}{4} \neq 1
 \end{aligned}$$

(1) NDLR : On introduit en italique les remarques du correcteur.

(2) La copie de ces élèves ne contient que des symboles d'équivalence. Certaines de ces équivalences sont vraies sous conditions, mais pour les autres, la rédaction de 'L'Ouvert' a préféré les remplacer par des implications pour que la lecture devienne acceptable et reproduise le raisonnement des élèves.

Pour cette dernière ligne : Mal dit : n'hésitez pas à rajouter une ligne ici : $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \leq \frac{3}{4} \implies \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \neq 1$ (Cette faute va réapparaître à plusieurs reprises.)

La formule qui découle de l'énoncé n'est donc pas vérifiée.

$a \neq 1 \quad b \neq 1 \quad c \neq 1$ est impossible donc un des trois réels est égal à 1.

Considérons $a \leq b \leq c$, donc $a = 1$.

Donc : $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc} = 1$.

Or, si $b = 1$ ou $c = 1$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} = 1 \text{ ou } \frac{1}{b} = 1 &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} &> 1 \neq 1. \end{aligned}$$

Donc $a = 1$ et $b = 1$ impossible et donc $a = 1 \quad b \geq 2$ et $c \geq 2$.

Première réapparition de la faute de rédaction : on arrive à des choses étranges : $1 \neq 1$.

Considérons $b \neq 2$ et $c \neq 2$. Comme c et $b \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} b \neq 2 \quad c \neq 2 \quad b \neq 1 \quad c \neq 1 &\implies \\ b \geq 3 \quad c \geq 3 \quad c \geq 3 &\implies \\ \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \quad \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} \quad \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{9} &\implies \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} &\implies \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc} \leq \frac{7}{9} < 1 \end{aligned}$$

donc $b \neq 2 \quad c \neq 2$ est impossible, donc $b = 2$.

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 1 &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2c} = 1 &\Leftrightarrow \\ \frac{2}{2c} + \frac{1}{2c} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \\ 2c = 3 \times 2 &\Leftrightarrow \\ \underline{c = 3}. \end{aligned}$$

L'unique solution au problème de Boris est donc le triplet 1, 2, 3.

Bill ne peut donc lui donner trois autres entiers naturels solution à son problème :

Le problème de Bill :

C'est relatif à la division par 0.

$$\begin{aligned} a + b + c = abc - 1 &\iff \frac{a + b + c + 1}{abc} = 1 \\ &\iff \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} = 1 \end{aligned}$$

$a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$ (la division par 0 étant impossible) donc comme a, b et $c \in \mathbb{N}$,
 $a \geq 1$ $b \geq 1$ $c \geq 1$.

Considérons $a \leq b \leq c$. Considérons que $a \neq 1$ $b \neq 1$ $c \neq 1$ donc que

$$\begin{aligned} a \geq 2 \quad b \geq 2 \quad c \geq 2 &\implies \\ abc \geq 8 \quad ab \geq 4 \quad bc \geq 4 \quad ac \geq 4 &\implies \\ \frac{1}{abc} \leq \frac{1}{8} \quad \frac{1}{ab} \leq \frac{1}{4} \quad \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{4} \quad \frac{1}{ac} \leq \frac{1}{4} &\implies \\ \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{abc} &\leq \frac{7}{8} \neq 1. \end{aligned}$$

La formule qui découle de l'énoncé n'est donc pas vérifiée, donc $a = 1$.

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{abc} = 1 &\iff \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bc} = 1 \\ &\iff \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{bc} = 1. \end{aligned}$$

Considérons $b = 1$ ou $c = 1 \iff \frac{1}{b} = 1$ ou $\frac{1}{c} = 1$.

Alors $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{bc} > 1 \neq 1$

donc a et seulement a est égal à 1, donc : $b \geq 2$ $c \geq 2$.

Considérons

$$\begin{aligned} b \geq 3 \quad c \geq 3 &\implies \\ \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \quad \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} \quad \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{9} &\implies \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{bc} &\leq \frac{8}{9} \neq 1. \end{aligned}$$

Donc $b \geq 3$ et $c \geq 3$ est impossible donc $b = 2$, donc finalement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{c} + \frac{2}{2c} = 1 &\iff \\ \frac{2}{c} = \frac{1}{2} &\iff \\ \underline{c = 4}. \end{aligned}$$

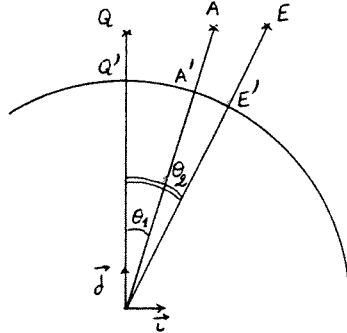
1, 2, 4 est donc l'unique solution de nombres entiers naturels tel que $a + b + c = abc - 1$.

ÉPREUVES DE TERMINALE

Sujet 1 : HALLER Fabien et HEIBY Jean-François (Lycée Marc Bloch de Bischheim)

Pour traiter ce sujet, on se place dans le repère géocentrique $R(O, \vec{i}, \vec{j})$. On supposera Q , le sommet du Rossberg où est Quasimodo, tel que $\overrightarrow{OQ}$ colinéaire à $\vec{j}$.

Schéma :



$$\begin{aligned}\widehat{Q'A'} &= 161,8 \text{ km} \\ \widehat{Q'E'} &= 210,6 \text{ km} \\ Q'Q &= 1,191 \text{ km} \\ A'A &= 3,243 \text{ km} \\ E'E &= 4,478 \text{ km} \\ R &= 6373 \text{ km}\end{aligned}$$

On se propose de déterminer les coordonnées de Q, A, E dans R :

- mesure de θ_1 et θ_2 :

Périmètre de la terre : $p = 2\pi R (\simeq 40042,74 \text{ km})$

$$\begin{aligned}\frac{\theta_1}{2\pi} &= \frac{\widehat{Q'A'}}{P} \iff \theta_1 = \frac{\widehat{Q'A'}}{R} = \frac{809}{31865} \quad (\simeq 0,025 \text{ rad}) \\ \frac{\theta_2}{2\pi} &= \frac{\widehat{Q'E'}}{P} \iff \frac{\widehat{Q'E'}}{R} = \frac{1053}{31865} \quad (\simeq 0,033 \text{ rad}).\end{aligned}$$

Coordonnées :

$$\begin{aligned}Q &\begin{cases} 0 \\ 6373 + 1,191 \end{cases} \begin{matrix} = 0 \\ 6374,191 \end{matrix} \\ A &\begin{cases} (6373 + 3,243) \times \sin \theta_1 \\ (6373 + 3,243) \times \cos \theta_1 \end{cases} \\ A &\begin{cases} 6376,243 \sin \theta_1 \\ 6376,243 \cos \theta_1 \end{cases} \\ E &\begin{cases} (6373 + 4,478) \times \sin \theta_2 \\ (6373 + 4,478) \times \cos \theta_2 \end{cases} \\ E &\begin{cases} 6377,478 \sin \theta_2 \\ 6377,478 \cos \theta_2 \end{cases}.\end{aligned}$$

Afin de savoir si Quasimodo voit Esmeralda, on calcule les équations des droites (QA) et (QE) .

$$\begin{aligned}(QA) : y_1 &= \frac{6376,243 \cos \theta_1 - 6374,191}{6376,243 \sin \theta_1} x + 6374,191 \\ (QE) : y_2 &= \frac{6377,478 \cos \theta_2 - 6374,191}{6377,478 \sin \theta_2} x + 6374,191\end{aligned}$$

On étudie les positions relatives des droites (QA) et (QE) : signe de la différence $y_1 - y_2$. Si $y_1 - y_2 > 0$, alors (QA) au-dessus de (QE) : Quasimodo ne voit pas Esmeralda. Mais si $y_1 - y_2 < 0$, alors il la voit.

$$y_1 - y_2 = \underbrace{\left(\frac{6376,243 \cos \theta_1 - 6374,191}{6376,243 \sin \theta_1} - \left(\frac{6377,478 \cos \theta_2 - 6374,191}{6377,478 \sin \theta_2} \right) \right)}_{\alpha} x.$$

$y_1 - y_2 = \alpha x$ avec α calculé à la calculatrice : $\alpha \simeq 9,07 \cdot 10^{-4} > 0$. Or, ici x est toujours positif. Donc $y_1 - y_2 > 0$.

$y_1 > y_2$: (QA) au dessus de (QE) .

Conclusion : Quasimodo ne voit pas Esmeralda.

Sujet 2 : PANSIOT Julien et MATT Paul-Amaury (Lycée Marie Curie de Strasbourg)

• **Hypothèse** : $1 \leq a < b < c$ et $n \geq 2$

• **Détermination de n et de la somme $a + b + c$**

Soit L , la somme des sesterces distribués en une distribution. $L = a + b + c$, car les trois femmes reçoivent des sommes toutes différentes.

On a donc $L = n = 20 + 10 + 9 = 39$.

L et n sont entiers, et 39 est entier. Donc L est diviseur de 39, et de même pour n .

Les diviseurs de 39 sont : $\{1; 3; 13; 39\}$. $n \geq 2$, donc $n \neq 1$.

Par conséquent $L \neq 39$.

Donc n et L appartiennent à $\{3; 13\}$. On a $a \geq 1$, donc $b \geq 2$ et $c \geq 3$. Donc $L \geq 6$.

Par conséquent, $L = 13$ et $n = 3$.

• **Encadrement de c**

. Ielosubmarine a reçu $n = 3$ plaquettes, dont c en dernier lieu. Soit x et y les deux premières sommes reçues. On a : $10 = c + x + y$, avec $x \geq 1$ et $y \geq 1$.

Donc $\underline{c \leq 8}$.

. Falbala a reçu trois plaquettes avec les sesterces correspondants : x, y et z . On a : $x \leq c$, $y \leq c$ et $z \leq c$.

Donc $3c \geq 20$. D'où $\underline{c \geq 7}$ car c entier.

• **Détermination de a**

. Ielosubmarine a reçu au total 10 sesterces, dont c à la dernière distribution.

La somme des deux premières distributions est $10 - c$ avec $c = 7$ ou $c = 8$.

Si $c = 7$, cette somme est de 3. Si $c = 8$, cette somme est de 2.

Par décomposition de la somme en entiers non nuls, on obtient $1 + 1$ et $1 + 2$.

Dans tous les cas, le 1 est présent. Par conséquent, il existe une plaquette notée 1.

Or, $1 \leq a < b < c$. Donc : $a = 1$.

• Il reste à présent deux triplets de solutions :

$$(a, b, c) = (1, 4, 8) \quad (\text{si } c = 8)$$

$$(a, b, c) = (1, 5, 7) \quad (\text{si } c = 7)$$

avec $a + b + c = 13$.

• **Elimination du triplet (1,5,7)**

Ielosubmarine a reçu 10 sesterces au total, dont 7 à la dernière distribution. Par conséquent, la somme des deux premières distributions est de 3. Or il est impossible d'additionner 2 nombres de $\{1; 5; 7\}$ et d'obtenir en résultat 3. Donc ce triplet ne convient pas.

• **Vérification du triplet (1,4,8)**

Ielosubmarine a reçu en dernier lieu 8 sesterces. Dans la dernière distribution, Falbala et Bonemine ont reçu 1 et 4 sesterces. Il est impossible que ce soit Falbala qui ait eu 1 sesterce, car dans ce cas, la somme des deux premières distributions est de $20 - 1 = 19$, qu'on ne peut obtenir avec la somme de deux éléments de $(1,4,8)$. Donc à la dernière distribution, Falbala a reçu 4 sesterces, Ielosubmarine 8 et Bonemine 1.

La somme des deux premières distributions de Ielosubmarine est de 2, c'est-à-dire $1 + 1$ (unique combinaison possible).

La somme des deux premières distributions de Falbala doit être 16, c'est-à-dire $8 + 8$, et celle de Bonemine de 8, c'est-à-dire $4 + 4$.

Les deux premières distributions sont égales, et les trois femmes ont eu des sommes différentes.

n	Falbala	Ielosubmarine	Bonemine
1	$c = 8$	$a = 1$	$b = 4$
2	$c = 8$	$a = 1$	$b = 4$
3	$b = 4$	$c = 8$	$a = 1$
somme	20	10	9

• **Conclusion**

On a procédé par implication et vérification. Les vérifications se révèlent exactes. **La femme ayant eu b la première est Bonemine.**

Sujet 3 : DOGOS-DOCOVITCH Alexandre et FUHR Thomas (Lycée Kléber de Strasbourg)

Enigme : “Si je prends un ensemble formé de 10 entiers naturels compris entre 11 et 99, puis-je toujours trouver deux sous-ensembles disjoints non vides dont les sommes des éléments soient égales?”

• Déterminons le nombre de sommes distinctes ou non que l’on peut trouver en additionnant n éléments d’un ensemble de 10 éléments (avec $1 \leq n \leq 10$).

Soit S le nombre de sommes que l’on peut trouver pour chaque $n \in [1, 10]$. Il s’agit pour chaque n de prendre n éléments parmi 10, donc $S = C_{10}^n$.

$$\begin{array}{ll} \text{si } n = 1 & S = C_{10}^1 = 10 \\ \text{si } n = 2 & S = C_{10}^2 = \frac{10!}{8!2!} \\ \text{si } n = 3 & S = C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} \\ \text{si } n = 4 & S = C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!} \\ \text{si } n = 5 & S = C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} \\ \text{si } n = 6 & S = C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} \\ \text{si } n = 7 & S = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} \\ \text{si } n = 8 & S = C_{10}^8 = \frac{10!}{8!2!} \\ \text{si } n = 9 & S = C_{10}^9 = 10 \\ \text{si } n = 10 & S = 1. \end{array}$$

Finalement le nombre Σ total de sommes que l’on peut trouver est :

$$\Sigma = 1 + 2\left(10 + \frac{10!}{8!2!} + \frac{10!}{7!3!} + \frac{10!}{6!4!}\right) + \frac{10!}{5!5!} = \underline{1023}$$

• On sait de plus que les 10 éléments constituant l’ensemble sont compris entre 11 et 99, la somme s' de ces 10 éléments est donc strictement inférieure à $1099 = 990$ et strictement positive.

Avec les 10 éléments, on peut donc composer 1023 sommes toutes comprises entre $]0, 990[$, cela signifie donc qu’il y a au moins une somme qui revient plusieurs fois, et ce quels que soient les 10 éléments qui constituent l’ensemble (*).

Ainsi on peut toujours trouver deux sous-ensembles disjoints non vides dont les sommes des éléments soient égales.

Emile le Sage étant un virtuose de l’addition, il trouva sans nul doute la réponse à l’énigme que lui avait soumis le Sphinx Wasigenstein. L’Alsace fut donc protégée par la déesse Iremia pendant 1999 ans.

(*) Si un des éléments de l’ensemble de 10 nombres intervient dans les deux sommes égales, on le “retire” de chacune des sommes. On aura bien deux sommes répondant à l’énoncé.

COMMENTAIRES - CLASSE DE PREMIÈRE

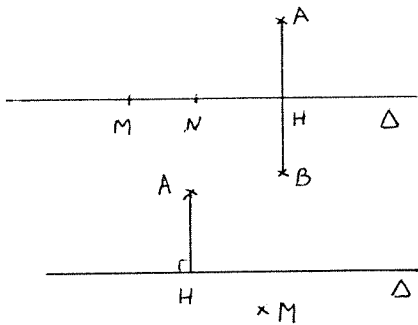
Sujet 1

- 1) Essayer d'emprunter quelques chemins qui n'aboutissent pas ne permet pas de conclure qu'aucun chemin ne peut répondre au problème posé.
- 2) Certains candidats ont pensé, pour une raison inconnue, que la souris devait manger le cube par tranches ou par étages successifs. Il n'y a aucune raison pour qu'un tel parcours soit optimal.

Sujet 2

Soit $[A, B]$ un segment. Sa médiatrice Δ partage le plan en deux demi-plans P_A (contenant A) et P_B (contenant B).

Remarque 1 : Si $M \in P_A$, alors $MA \leq MB$. Le point M appartient à Δ si et seulement si $MA = MB$.



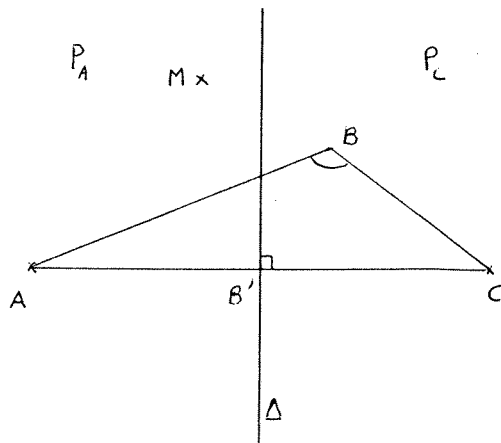
Remarque 2 : Soit H le milieu de $[A, B]$. Si $M \in \Delta$ et $N \in [H, M]$, alors $NA = NB \leq MA = MB$.

Remarque 3 : Soit Δ une droite, A un point n'appartenant pas à Δ et H la projection orthogonale de A sur Δ . Pour tout M dans le demi-plan limité par Δ et ne contenant pas A , on a $AH \leq AM$ avec égalité si et seulement si $M = H$.

Note préliminaire : Les angles considérés seront de mesure comprise entre 0 et π .

Soit ABC le triangle formé par les trois sorties du terrier. Soit M un point, on note $d(M) = \max(AM, BM, CM)$.

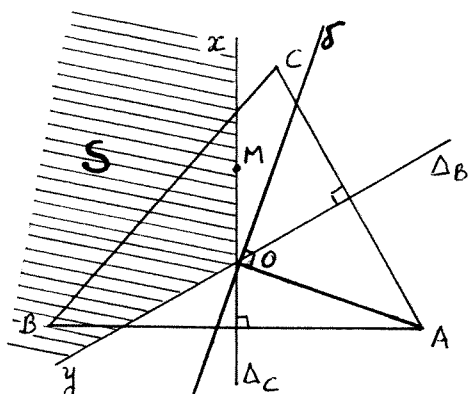
Premier cas : Supposons qu'un des angles du triangle ABC est obtus, par exemple $\hat{B}$. Appelons Δ la médiatrice de $[A, C]$, $B' = \Delta \cap (AC)$, P_A (resp. P_C) le demi-plan délimité par Δ contenant A (resp. C).



Si M appartient à P_A , on a $MC \geq B'C$ (remarque 3), donc $d(M) \geq B'C$, avec égalité si et seulement si $M = B'$. Si M appartient à P_C , on a $MA \geq AB'$ (remarque 3), donc $d(M) \geq AB' = B'C$, avec égalité si et seulement si $M = B'$. Donc, pour tout point M du plan, on a $d(M) \geq B'C$ avec égalité si et seulement si $M = B'$. L'angle $\widehat{ABC}$ est obtus, donc $BB' \leq B'C = B'A$. Donc, pour tout point M du plan, on a $d(M) \geq d(B')$ avec égalité si et seulement si $M = B'$. Le point cherché est donc B' .

Deuxième cas : Supposons que tous les angles du triangle sont aigus. Soit Δ_A (resp. Δ_B , resp. Δ_C) la médiatrice de $[B, C]$ (resp. $[A, C]$, resp. $[A, B]$). On appelle O le

centre du cercle circonscrit ($\{O\} = \Delta_A \cap \Delta_B \cap \Delta_C$). Il se trouve à l'intérieur du triangle.



Notons $S = xOy$ le secteur angulaire intersection des demi-plans délimités par Δ_B et contenant C et par Δ_C contenant B . Pour tout $M \in S$, $d(M) = MA$ (cf. remarque 1). Considérons δ , la droite perpendiculaire à (AO) passant par O .

Soit $M \in Ox$, alors $MA \geq OA$ (cf. remarque 2), donc l'angle $\widehat{AOx}$ est obtus. De même $\widehat{AOy}$ est obtus. Le secteur S est donc inclus dans le demi-plan limité par δ et ne contenant pas A .

D'après la remarque 3, pour tout point M de S , on a $d(M) = MA \geq OA$, avec égalité si et seulement si $M = O$. On raisonne de même pour les deux autres secteurs. Finalement, pour tout point M du plan, $d(M) \geq d(O)$, avec égalité si et seulement si $M = O$. Le point cherché est donc O .

Commentaires :

- 1) Le triangle aplati relève du premier cas, alors que le triangle rectangle relève des deux cas.
- 2) Les trois remarques préliminaires se démontrent, par exemple, de manière analytique ou encore à l'aide du produit scalaire.

Commentaires sur les copies :

- 1) Un grand nombre de candidats n'a pas compris le sens de l'énoncé.
- 2) Le centre du cercle circonscrit est souvent confondu avec le centre de gravité.
- 3) Le centre O du cercle circonscrit a souvent été introduit. Malheureusement, même sur des figures où le triangle possédait un angle obtus, il a été retenu comme solution du problème.
- 4) Nous avons retenu les copies des candidats qui distinguaient distinctement les différents cas et apportant des éléments de solution.
- 5) La rédaction proposée n'est pas une narration de recherche, mais un bilan ordonné d'une réflexion après tâtonnements et retours en arrière. Les trois remarques initiales sont les outils employés dans le corps de la démonstration et sont placées en préliminaire pour ne pas alourdir l'exposé.

Sujet 3

Notons a, b, c les trois entiers cherchés.

• Le problème de Boris revient à résoudre l'équation $a + b + c = abc$ avec $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{N}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Par symétrie, on peut supposer $a \leq b \leq c$. En outre, si $a = 0$, alors on obtient $b + c = 0$, donc $b = c = 0$ car $b \in \mathbf{N}$ et $c \in \mathbf{N}$. Cela donne $a = b = c = 0$, ce qui est exclu. On suppose donc $1 \leq a$.

Etude du cas $a = 1$. L'équation s'écrit alors $bc = 1 + b + c$, c'est-à-dire

$(b-1)(c-1) = 2$, avec les conditions $1 \leq b \leq c$, $b \in \mathbf{N}$ et $c \in \mathbf{N}$. Les seuls diviseurs dans $\mathbf{N}^*$ de 2 sont 1 et 2, donc on obtient nécessairement $b-1 = 1$ et $c-1 = 2$, d'où $b = 2$, $c = 3$. On obtient $a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$ qui est effectivement solution.

Etude du cas $a \geq 2$. On suppose que le problème posé admet au moins une solution et on aboutit à une absurdité. Supposons donc que a, b et c conviennent, avec $2 \leq a \leq b \leq c$, $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{N}$. Alors $a(bc-1) = b+c$, donc comme $a \geq 2$, on a $2(bc-1) \leq b+c$, donc $b(2c-1) \leq c+2$, et donc, comme $b \geq 2$, on a $2(2c-1) \leq c+2$, soit $3c \leq 4$. Mais $c \geq 2$, d'où $6 \leq 4$. Absurde! Il n'y a pas de solution avec $a \geq 2$.

Conclusion : seuls trois entiers conviennent, ce sont 1, 2 et 3, correspondant à l'égalité $1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$. Il est donc prouvé que Boris peut arrêter de chercher.

- Le problème de Bill peut se résoudre de la même manière. Il s'écrit $a+b+c+1 = abc$ avec $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{N}$ et on peut à nouveau supposer $a \leq b \leq c$. On laisse au lecteur le détail des calculs. Le cas $a = 1$ conduit cette fois à $(b-1)(c-1) = 3$, c'est-à-dire $b = 2$ et $c = 4$. On obtient alors $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, qui est effectivement solution.

Le cas $a \geq 2$ conduit comme précédemment à l'inégalité $3c \leq 5$, d'où l'absurdité car $c \geq 2$. Là encore, il n'y a pas de solution pour $a \geq 2$.

Conclusion : seuls trois entiers conviennent, ce sont 1, 2 et 4, correspondant à l'égalité $1 \cdot 2 \cdot 4 = 1 + 1 + 2 + 4$. Le problème de Bill est donc résolu.

Commentaires : Cet exercice a permis de mettre en évidence quelques erreurs souvent commises, parfois indépendamment des sujets.

- 1) L'énoncé est parfois mal compris ou trop vite lu. On raisonne dans $\mathbf{N}$, pas dans $\mathbf{Z}$, et les entiers considérés ne sont pas supposés consécutifs.
- 2) Un serpent de mer ensuite : on ne divise par un nombre qu'après s'être assuré qu'il n'est pas nul. On est alors souvent amené à faire une petite discussion de cas ($a = 0$, $a \neq 0 \dots$). En tout cas, on n'affirme pas qu'un nombre est non nul sous prétexte qu'on a soi-même pris l'initiative de diviser par ce nombre à la ligne précédente...
- 3) Le classement ($1 \leq a \leq b \leq c$) des trois entiers permet de simplifier la résolution, de majorer, de minorer. Cela ne semble pas toujours naturel à nos élèves de premières.
- 4) On note, comme chaque année depuis quelque temps, une démarche désormais courante : la seule vérification que 1, 2, 3 sont effectivement des solutions pour en déduire ensuite qu'on a là toutes les solutions.
- 5) Une dernière remarque : la seule phrase "un produit d'entiers tend plus vite vers l'infini que leur somme", même intuitivement légitime pour guider une preuve, ne saurait tenir lieu de démonstration dans un exercice de Rallye Mathématique.

Rallye Mathématique d'Alsace 1999 - Terminale

Sujet 1

Commentaires :

- 1) Beaucoup de candidats ont effectué leurs calculs sans tenir compte du fait que la Terre est ronde; d'autres ont cru démontrer que la courbure de la Terre est négligeable.
- 2) Curieusement, la collégiale Saint-Thiébaud de Thann s'est parfois retrouvée sur le Rossberg, quand ce n'était pas sur le Wildstrubel, surmontée de plus du gros bourdon.
- 3) Un certain nombre de candidats ont fait preuve de beaucoup d'humour et de poésie dans leurs conclusions.

Sujet 2

On a distribué au total $20 + 10 + 9 = 39$ sesterces, d'où $n \cdot (a + b + c) = 39$. Par hypothèse, $n \geq 2$ et $1 \leq a < b < c$, donc comme a, b, c sont entiers, $b \geq 2$ et $c \geq 3$, d'où $a + b + c \geq 6$. Le seul diviseur entier de 39 supérieur ou égal à 6 est 13. Donc $a + b + c = 13$ et donc $n = 3$.

Ielosubmarine a reçu a jetons les deux premières donnes, car sinon elle aurait reçu au moins $a + b + c = 13$ jetons au cours des trois tours. Si Bonnemine avait reçu c jetons à la première partie, elle aurait reçu au moins b et a jetons aux deux tours, soit au moins $a + b + c = 13$ jetons, ce qui est impossible.

F	I	B
	a	$\geq b$
	a	$\geq b$
	c	$\geq a$

Donc c'est Bonnemine qui a reçu b jetons à la première partie.

Commentaires :

- 1) On peut sans grand mal reconstituer le jeu en montrant que $a = 1$, $b = 4$ et $c = 8$, puis que les trois tours furent

F	I	B
8	1	4
8	1	4
4	8	1

- 2) L'étude exhaustive de tous les cas est lourde et inélégante. Elle nécessite de plus de ne pas oublier de cas, comme certains l'ont fait.
- 3) La solution précédente permet de conclure sans connaître (a, b, c) .

Sujet 3

Soit A un ensemble formé de dix entiers compris (au sens large) entre 11 et 99. Il possède $\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k = (1+1)^{10} = 2^{10}$ sous-ensembles, donc $2^{10} - 2$ sous-ensembles à part l'ensemble vide et A . Soit B un sous-ensemble de A différent de l'ensemble vide et de A . Alors $1 \leq \text{Card}B \leq 9$ et la somme des éléments de B est inférieure ou égale à $99 \times \text{Card}B$, donc à $9 \times 99 = 891$. Donc il y a deux sous-ensembles de A distincts, différents de l'ensemble vide et de A , ayant des sommes des éléments égales. En enlevant les éléments communs à ces deux sous-ensembles, on obtient deux sous-ensembles de A disjoints ayant des sommes d'éléments égales. L'Alsace peut ainsi compter sur la protection de la déesse Iremia pour 1999 grâce à l'excellente réponse d'Emile le Sage.

Commentaires :

- 1) Cet exercice n'a pas été traité par tous les candidats.
- 2) Les bonnes solutions furent rares.
- 3) Nombre de candidats ont pris dix entiers choisis par leurs soins et ont raisonné sur un exemple, de manière erronée qui plus est.
- 4) Beaucoup d'élèves ont considéré que lorsqu'on prend deux sous-ensembles disjoints dans un ensemble à 10 éléments, ils doivent forcément être complémentaires.
- 5) L'emploi de la formule du binôme de Newton pour déterminer le nombre de sous-ensembles d'une ensemble (dont le résultat n'est plus au programme de terminale) ne semble pas immédiat pour les candidats.
- 6) Heureusement que le Sage veillait...