

LES REMARQUES DE MÉRAY : UN TÉMOIGNAGE IMPORTANT DANS LA PRÉHISTOIRE DE L'AXIOME DU CHOIX (*)

Michel GUILLEMOT

Université Paul Sabatier de Toulouse

Les historiens des mathématiques considèrent que les **Remarques sur la nature des quantités par la condition de servir de limites à des variables données**, parues en 1869, dans la **Revue des Sociétés Savantes** constituent la première publication d'une construction des nombres réels à l'aide des suites de Cauchy. Elles sont l'oeuvre d'un mathématicien français, Charles Méray, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon, dont les différents travaux, tant en analyse qu'en géométrie méritent d'être reconnus (voir DUGAC 1970). Dans notre étude, nous ne nous intéresserons pas à la construction proprement dite mais à son introduction, où Méray nous montre que toute suite de Cauchy de nombres réels converge si l'on admet que toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente. L'auteur y emploie, en effet, implicitement, l'axiome du choix, dont nous donnons, brièvement, pour commencer, quelques éléments historiques.

Quelques éléments sur l'histoire de l'axiome du choix

Les différentes études qui ont été conduites sur l'histoire de l'axiome du choix [Medvedev 1982; Moore 1982; Cassinet, Guillemot 1983] s'accordent pour en préciser trois étapes :

- avant 1904 : la préhistoire,
- entre 1904 et 1908 : les polémiques,
- après 1908 : l'installation

dont nous retraçons quelques éléments principaux. A proprement parler, nous ne devons pas tout d'abord parler de choix mais plutôt de bon ordre puisque d'une part, historiquement, c'est le bon ordre qui a donné naissance à l'axiome du choix et que d'autre part, logiquement, l'axiome du choix est équivalent à l'affirmation suivante :

tout ensemble peut être bien ordonné.

Par bon ordre qu'entend-on? En gros, qu'un ensemble peut être ordonné selon un ordre qui ressemble à celui des entiers naturels : en quelque sorte on peut classer tous les entiers naturels, ou si l'on considère un ensemble quelconque non vide de nombres naturels celui-ci comporte un plus petit élément. En généralisant cela, on dit qu'un ensemble est bien ordonné s'il est ordonné, c'est-à-dire si l'on

(*) Conférence tenue à Strasbourg le 15 janvier 1999 à l'occasion du séminaire d'histoire des mathématiques Heidelberg-Nancy-Strasbourg.

peut définir une relation d'ordre sur cet ensemble et si toute partie non vide de cet ensemble possède un plus petit élément. Evidemment $(N, \leq)$ est bien ordonné mais $(Z, \leq)$ n'est pas bien ordonné : $(Z, \leq)$, par exemple, ne possède pas de plus petit élément. Toutefois Z , comme Q ou encore l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable c'est-à-dire qu'on peut le mettre en bijection avec l'ensemble des entiers naturels. Utilisant une de ces bijections on peut alors transporter l'ordre des entiers naturels sur cet ensemble de manière à en faire un bon ordre sur ces ensembles. Par exemple, on peut considérer la bijection b de N sur Z , telle que pour tout entier naturel n

$$b(n) = p \text{ si } n = 2p \text{ et } b(n) = -p \text{ si } n = 2p + 1$$

et on dira que $b(n)$ est inférieur ou égal à $b(n')$ si et seulement si n est inférieur ou égal à n' . Nous laissons au lecteur le plaisir de voir que nous avons ainsi défini un bon ordre sur l'ensemble des entiers relatifs.

La notion de bon ordre a été mise en avant par Georg Cantor dans ses fameuses publications sur la théorie (naïve) des ensembles. Sans doute encouragé par sa création des nombres transfinis qui lui permettait de classer au-delà de l'infini dénombrable, toute sa vie il a cherché à démontrer ce qu'il affirmait en 1883 :

on peut toujours mettre tout ensemble bien défini sous la forme d'un ensemble bien ordonné.

Plus prudent, David Hilbert, restreignait, en 1900, la bonne ordonnabilité à l'ensemble des nombres réels : il en faisait l'objet de son premier problème :

le continu peut-il être bien ordonné? A cette question, M. Cantor croit que l'on peut répondre par l'affirmative. Il me semble extrêmement désirable d'obtenir une démonstration directe de cette remarquable affirmation de M. Cantor, en assignant, par exemple un ordre des nombres tel que dans tout ensemble partiel, on puisse assigner un nombre précédant tous les autres [Hilbert 1900, 71].

Ceci se passait au Deuxième Congrès des Mathématiciens, à Paris, en 1900. Quatre ans après, au Troisième Congrès, Julius König jette le désarroi dans la communauté allemande en croyant démontrer que le continu ne pouvait pas être bien ordonné. Peu après, Ernst Zermelo envoyait à Hilbert une preuve que au contraire tout ensemble pouvait être bien ordonné, que ce dernier s'empressait de publier dans les **“Mathematische Annalen”** Beweis dass jede Menge wohlgeordnet sein kann [Zermelo 1904].

Ceci fait l'effet d'une bombe dans la communauté mathématique internationale car son auteur y affirmait que

La démonstration dont il est ici question est faite à partir du principe que, même pour une totalité infinie d'ensembles, il y a toujours une correspondance qui à chaque ensemble associe un de ses éléments ou, exprimé formellement, que le produit d'une totalité infinie d'ensembles, dont chacun contient au moins un élément, diffère lui-même de zéro.

Ce principe logique, ne peut, à la vérité, être réduit encore à un plus simple, mais il est appliqué partout, sans hésitation, dans les déductions mathématiques [Zermelo 1904, 516].

Le principe du choix prenait ses lettres de noblesse même si, auparavant, d'autres savants comme par exemple Beppo Levi ou Rodolfo Bettazzi ou encore Bertrand Russell et Alfred Whitehead avaient mis l'accent sur l'insuffisance de certaines démonstrations.

Après 1904 les polémiques vont surgir de tous les côtés. Pour ne citer que le cas de la France, l'échange de cinq lettres entre René Baire, Emile Borel, Jacques Hadamard et Henri Lebesgue marque la vigueur des propos échangés. Toutefois, en 1908, les clameurs commencent à se taire car Zermelo publie d'une part une deuxième preuve du bon ordre [Zermelo 1908a] où il en profite pour répondre de manière complète à toutes les critiques et d'autre part ses recherches sur ce qu'il est convenu d'appeler la première théorie axiomatique des ensembles où l'axiome du choix trouvait sa place [Zermelo 1908b].

Aujourd'hui, cette théorie est généralement acceptée par l'ensemble de la communauté mathématique : elle prend toutefois une forme légèrement modifiée à la suite des travaux de Abraham Fraenkel et on parle de la théorie ZF des ensembles. Quand à l'axiome du choix proprement dit, deux événements majeurs marquent ensuite son histoire. Le premier est la démonstration de sa consistance par Kurt Gdel en 1938 et le second est celle de son indépendance par Paul Cohen en 1963. Les travaux des logiciens permettent de mieux préciser le rôle joué par cet axiome dans l'établissement des démonstrations mathématiques. En dehors du bon ordre et des principes énoncés par Zermelo on connaît de très nombreux énoncés équivalents de l'axiome du choix que les ouvrages de la famille Rubin ont brillamment recensés.

D'autres principes, tel le principe des choix dépendants dont nous aurons l'occasion de parler ont aussi été mis en avant pour remplacer l'axiome du choix mais ceci est une autre histoire!

Les suites adjacentes

Les approximations successives des racines d'une équation par excès et par défaut conduisent naturellement à la notion de suites adjacentes. Ainsi, lorsqu'il désire fournir une deuxième démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, dans le **Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique**, qu'il publie en 1821, Augustin Louis Cauchy se place dans le cadre de la résolution numérique des équations. Auparavant, la première preuve avait pour domaine celui de la démonstration classique géométrique :

LES REMARQUES DE MÉRAY

Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation

$$y = f(x)$$

rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation

$$y = b$$

dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X ; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise. En effet, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x = x_0, x = X \dots$ [Cauchy 1821, 50].

Cauchy sent bien que sa preuve n'a peut-être pas toute la rigueur qu'il mettrait en évidence dans l'introduction de son ouvrage. Aussi prend-t-il soin d'avertir le lecteur :

on peut, au reste, comme on le fera dans la Note III, démontrer le théorème IV par une méthode directe et purement analytique, qui a même l'avantage de fournir la résolution numérique de l'équation

$$f(x) = b$$

[Cauchy 1821, 51]

En fait, en se plaçant dans le cadre de la résolution numérique des équations Cauchy est amené, dans cette Note III à formuler différemment son théorème IV. Il considère le cas particulier où b est nul et introduit, de manière classique, les signes contraires de $f(x)$ aux bornes de l'intervalle où la fonction est continue :

Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable x , qui demeure continue par rapport à cette variable entre les limites $x = x_0, x = X$. Si les deux quantités $f(x_0), f(X)$ sont de signes contraires, on pourra satisfaire à l'équation

$$(1) \quad f(x) = 0$$

par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X [Cauchy 1821, 378].

Cauchy considère que x_0 est inférieur à X et il pose

$$X - x_0 = h.$$

Prenant alors un entier naturel m supérieur à l'unité il considère la suite finie

$$f(x_0), f(x_0 + \frac{h}{m}), f(x_0 + 2\frac{h}{m}), \dots, f(X - \frac{h}{m}), f(X)$$

dont il compare les termes :

“si l’on compare successivement le premier terme avec le second, le second avec le troisième, le troisième avec le quatrième, etc... on finira nécessairement par trouver une ou plusieurs fois deux termes consécutifs qui seront désignés contraires. Soient

$$f(x_1), f(X')$$

deux termes de cette espèce, x_1 étant la plus petite des deux valeurs correspondantes de X [Cauchy 1821, 378-9].

Il est clair qu’ici Cauchy a en vue la résolution numérique de l’équation (1). Dès lors, il se peut que dans l’intervalle $[x_0, X]$, cette équation ait plusieurs racines et que les changements de signes interviennent plusieurs fois dans la suite considérée. Ce qui importe donc n’est pas le choix de x_1 et X' mais plutôt le fait que pour un tel choix, on puisse ultérieurement trouver une racine dans l’intervalle $[x_1, X']$ strictement contenu dans l’intervalle précédent $[x_0, X]$.

Pour cela Cauchy réitère ce procédé

Ayant déterminé x_1 et X' comme on vient de le dire, on pourra de même, entre ces deux nouvelles valeurs de x , en placer deux autres x_2, X'' qui, substituées dans $f(x)$ donnent des résultats de signes contraires [...]. En continuant ainsi, on obtiendra : 1) une série de valeurs croissantes de x , savoir

$$(2) \quad x_0, x_1, x_2, \dots;$$

2) une série de valeurs décroissantes

$$(3) \quad X, X', X'', \dots,$$

qui, surpassant les premières de quantités respectivement égales aux produits

$$1(X - x_0), \frac{1}{m}(X - x_0), \frac{1}{m^2}(X - x_0), \dots,$$

finiront par différer de ces premières valeurs aussi peu que l’on voudra [Cauchy 1821, 379].

Autrement dit, Cauchy obtient les deux suites adjacentes (x_n) et $(X^{(n)})$ qui convergent vers une limite commune, racine de l’équation (1), puisque la fonction f est continue sur l’intervalle $[x_0, X]$.

Strictement parlant, Cauchy effectue donc une **infinité** de choix pour déterminer les suites adjacentes. Mais, à chaque fois, ce choix est effectué parmi un nombre **fini** de termes et il peut donc être aisément précisé. Par exemple, si Cauchy avait

en vue, seulement, l'obtention d'une racine de l'équation (1) il pourrait, à chaque fois, choisir les premiers changements de signe afin de bien déterminer x_n et $X^{(n)}$. De même, si l'équation (1) ne possède qu'un nombre **fini** de racines, au bout d'un certain nombre de découpages on aboutira à un intervalle $[x_p, X^{(p)}]$ où ne figure plus qu'une seule racine de l'équation (1). Bien sûr, il se peut que dans l'intervalle $[x_0, X]$ cette équation ait une infinité de racines et que, dès lors, à chaque étape, on doive choisir : il ne semble pas que Cauchy ait envisagé une telle éventualité et, dès lors, nous ne pouvons pas dire qu'il ait, ici, utilisé implicitement, l'axiome du choix. Ceci ne sera pas toujours le cas lorsque les suites adjacentes seront employées dans un autre cadre. Nous allons voir ce qu'il en est pour les **Remarques** de Charles Méray.

Les remarques de Méray

Les **Remarques sur la nature des quantités par la condition de servir de limites à des variables données**, publiées en 1869 dans la **Revue des Sociétés Savantes** par Charles Méray, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon sont très importantes puisqu'elles fournissent la première étude sur la construction des nombres réels à l'aide des suites de Cauchy. Ici, nous considérerons seulement le début de l'article.

A la différence de Cauchy qui se plaçait dans le cadre de la résolution numérique des équations, Méray se situe dans un domaine plus vaste :

la théorie des quantités incommensurables, celle des séries, des quadratures, et en général toutes les parties des mathématiques où il y a lieu de considérer des limites de quantités variables [Méray 1869, 280].

Il note que deux principes en constituent le "fondement essentiel". Le premier consiste à affirmer que **toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) de nombres réels est convergente** :

Une quantité variable v , qui prend successivement les valeurs en nombre indéfini :

$$v_1, v_2, \dots, v_n \dots$$

tend vers une certaine limite, si les termes de cette limite vont toujours soit en augmentant, soit en diminuant, pourvu qu'ils restent dans le premier cas, inférieurs, dans le second cas supérieurs à une quantité fixe quelconque [Méray 1869, 280].

Quant au second principe, il s'agit du critère dit de Cauchy, **toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente** :

La variable v , définie comme ci-dessus, jouit encore de la même propriété si la différence $v_{n+p} - v_n$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, quelque relation que l'on puisse établir entre n et p [Méray 1869, 280].

A la lecture de cet énoncé une remarque s'impose : Méray ne se situe pas dans le cadre de l'arithmétisation de l'analyse développée, au même moment, par Karl Weierstrass et ses élèves. Pour nous en convaincre il nous suffit de tourner notre regard vers la définition des suites de Cauchy – l'auteur parle de *Zahlenreihe*, suite-de-nombres donnée par Eduard Heine dans son fameux article "**Die Elemente der Functionenlehre** (Les éléments de la théorie des fonctions) publiée en 1872, dans le **Journal für die reine und angewandte Mathematik** :

On appelle suite-de-nombres une suite de nombres a_1, a_2 , etc, a_n , etc, telle que pour chaque nombre η non nul aussi petit que l'on veut, il existe une valeur n telle que $a_n - a_{n+v}$ soit inférieur à η , pour tout entier positif v [Heine 1872, 174].

Cette définition ressemble à celle que nous formulons aujourd'hui et elle peut nous permettre de donner une démonstration distincte de celle fournie par Méray. En effet, ce dernier se propose de prouver que son premier principe implique le second, en d'autres termes que toute suite de Cauchy converge si l'on admet, ici, que deux suites adjacentes vers la même limite.

En effet, soit (v_n) une suite de Cauchy quelconque. Par définition, pour tout ε strictement positif, il existe un entier n_ε bien déterminé tel que

$$|v_{n_\varepsilon+p} - v_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$$

(il suffit de prendre le plus petit entier naturel satisfaisant à la proposition ci-dessus) pour tout entier naturel p .

Soit maintenant un nombre réel a strictement positif quelconque. Pour tout entier naturel q , prenant

$$\varepsilon = \frac{a}{2^q}$$

nous pouvons ainsi déterminer un entier naturel m_q , tel que, pour tout entier naturel p ,

$$|v_{m_q+p} - v_{m_q}| < \frac{a}{2^q}$$

c'est-à-dire que

$$(1) \quad v_{m_q} - \frac{a}{2^q} < v_{m_q} < v_{m_q} + \frac{a}{2^q}.$$

Ne pouvant être ainsi assuré d'obtenir des suites adjacentes, nous pouvons poser

$$s_0 = v_{m_0} - a, t_0 = v_{m_0} + a$$

et pour tout entier naturel q

$$[b_{q+1}, t_{q+1}] = [s_q, t_q] \cap [v_{m_{q+1}} - \frac{a}{2^{q+1}}, v_{m_{q+1}} + \frac{a}{2^{q+1}}].$$

Ainsi il est clair que les suites (s_q) et (t_q) sont adjacentes. D'après le premier principe de Méray elles convergent vers une même limite et d'après (1) la suite (v_n) converge aussi vers cette limite.

A cette démonstration, nous pouvons opposer celle de Méray. En quelque sorte, point de souci, comme précédemment d'effectivité et par deux fois, Méray ne va pas raisonner directement mais, au contraire, par l'absurde. De plus, peu à peu, Méray va préciser comment il obtient les suites adjacentes. Dans une première étape, il se propose de démontrer un résultat semblable à (1) :

Quel que soit le nombre n il existe deux quantités l_k, L_k telles que l'on a

$$l_k < v_n < L_k$$

pour toute valeur de n supérieure à k [Méray 1869, 281].

En fait, ayant en vue une propriété comme (1) valable, avec ses notations, pour tout entier naturel k il énonce une proposition générale qui à tout prendre n'a pas, démonstrativement, une portée tout aussi générale. Il suffit, en effet, de démontrer que la suite (v_n) est bornée pour être assuré du résultat. Méray ne s'y trompe pas puisque sa preuve revient à démontrer que la suite est majorée, même s'il invoque L_k . Écoutons-le :

En effet, si la limite L_k n'existait pas, v_n pourrait être rendue plus grande que toute quantité donnée, et il serait possible de choisir successivement et indéfiniment les nombres $k', k'', k''' \dots$ de manière à obtenir :

$$v_{k'} > v_k + a, v_{k''} > v_{k'} + a, v_{k'''} > v_{k''} + a, \dots$$

où a désigne une quantité quelconque. Or, on en conclurait, contrairement à l'hypothèse, qu'en attribuant à n les valeurs successives $k, k', k'', k''', \dots$, qui croissent à l'infini, et à p les valeurs correspondantes $k' - k, k'' - k', k''' - k'', \dots$ la différence $v_{n+p} - v_n$ conserverait une valeur supérieure à a [Méray 1869, 281].

Nous l'avons dit, Méray ne se préoccupe pas de trouver effectivement un majorant et en l'absence d'une définition du critère de Cauchy semblable à celle donnée par Heine, il a recours à un raisonnement par l'absurde. Pour, peut-être, mieux saisir son heuristique supposons donc que la suite (v_n) ne soit pas majorée et précisons comment Méray peut obtenir la suite $(k^{(n)})$ de sa démonstration.

La suite (v_n) n'étant pas majorée, pour tout nombre M , il existe au moins un terme v_n de la suite supérieur à M . Si a est une quantité strictement positive quelconque, prenant M égal à $(v_k + a)$ il existe au moins un terme v_n tel que

$$(2) \quad v_n > M = v_k + a.$$

Méray affirme seulement qu'il est "possible de choisir" un tel terme. Aujourd'hui, comme précédemment, si nous désirons **effectivement** préciser ce choix, nous

pouvons prendre pour k' le plus petit entier naturel n vérifiant (2).

De même, en prenant cette fois M égal à $(v_{k'} + a)$, il existe au moins un terme v_n tel que

$$(3) \quad v_n > v_{k'} + a.$$

Comme précédemment, nous pouvons choisir pour k'' le plus petit entier naturel n vérifiant (3). Nous avons ainsi

$$(4) \quad v_{k''} > v_{k'} + a \text{ et } k' < k''.$$

On en déduit donc que pour tout entier naturel

$$v_{k^{(n+1)}} - v_{k^{(n)}} > a \text{ et } k^{(n)} < k^{(n+1)}$$

ce qui contredit la condition de Cauchy. En effet, la suite $(k^{(n)})$ étant strictement croissante, quel que soit l'entier naturel m que l'on considère il existe deux termes d'indices supérieurs à m dont la différence est strictement supérieure à a .

A tout prendre, comme Méray le dira plus tard, il vient seulement de démontrer le résultat suivant où k n'intervient pas

on pourra assigner successivement à v deux premières limites l_{h_0}, L_{h_0} [Méray 1869, 282].

Pour obtenir “deux autres l_{h_1}, L_{h_1} renfermées (l'une au moins) dans l'intervalle des précédentes” nous devons examiner la deuxième partie de la démonstration qui revient à affirmer que l'on peut définir une suite d'intervalle emboîtés :

2) Quel que soit k , on peut, sauf à prendre k suffisamment grand supposer à la fois

$$l_h > l_k \text{ et } l_h \leq L_k$$

ou

$$l_h \geq l_k \text{ et } L_h < L_k.$$

Sinon, en effet, concevons deux quantités l', L' , dont la seconde surpasse la première et qui satisfassent à toutes ces conditions, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$l_k < l' < L' < L_k.$$

Quelque valeur de v que l'on considère, il en existera de rangs plus éloignés qui seront les unes égales ou supérieures à L' , les autres égales ou inférieures à l' , car autrement on pourrait prendre soit $l_h = l'$, soit $L_h = L'$. Ainsi on peut trouver un nombre h assez grand pour avoir $v_h \geq L'$ puis un autre $h' > h$ qui fasse $v_{h'} \leq l'$, puis un troisième $h'' > h'$ qui ramène la première inégalité $v_{h''} \geq L'$, et ainsi de suite alternativement jusqu'à l'infini.

LES REMARQUES DE MÉRAY

Il arriverait donc, contrairement à l'hypothèse, que la différence $v_{n+p} - v_n$ conserverait une valeur numérique au moins égale à $L' - l'$ pour les valeurs indéfiniment croissantes au moins égale à $L' - l'$ pour les valeurs indéfiniment croissantes $h, h', h'', \dots$ attribuées à n , et les valeurs correspondantes $h' - h, h'' - h', h''' - h'', \dots$ imposées à p [Méray 1869, 281-2].

Une nouvelle fois, Méray ne détermine pas effectivement l_h et L_h : il raisonne par l'absurde. Avec ses notations il s'agit de démontrer que pour tout entier naturel k et tout intervalle $]l_k, L_k[$ auquel appartiennent tous les v_n d'indice supérieur à k , il existe un entier h supérieur à k et un intervalle $]l_h, L_h[$ strictement contenu dans le précédent, auquel appartiennent tous les v_n d'indice supérieur à h . Suivant Méray, soit donc un entier naturel k et un intervalle $]l_k, L_k[$ auquel appartiennent tous les v_n d'indice supérieur à k . Raisonnons alors par l'absurde et supposons que pour tout entier h supérieur à k et pour tout intervalle $]l_h, L_h[$ strictement contenu dans $]l_k, L_k[$ il existe au moins un terme v_n d'indice n supérieur à h n'appartenant pas à $]l_h, L_h[$. Soit alors $]l', L'[$ tel que

$$l_k < l' < L' < L_k.$$

S'il existait un nombre fini de termes supérieurs à L' (resp. inférieurs à l') alors on poserait

$$l_h = l_k \text{ et } l_h = L' \text{ resp. } l_h = l' \text{ et } L_h = L_k)$$

ce qui serait en contradiction avec notre hypothèse : on aurait obtenu $]l_h, L_h[$ strictement contenu dans $]l_k, L_k[$ tel que tous les termes v_n d'indice supérieur à h lui appartiennent.

Autrement dit, il existe un nombre infini de termes à la fois dans $]l_{k'}, l'[$ et dans $]L', L_k[$. A partir de cette double infinité de termes v on pourrait extraire la suite (n'_n) telle que v'_{2p} appartient à $]l_{k'}, l'[$ et v'_{2p+1} appartient à $]L', L_k[$. Ainsi pour tout entier naturel p

$$v'_{2p+1} - v'_{2p} > L' - l'$$

ce qui contredit le fait que la suite (v'_n) est une suite infinie extraite de la suite de Cauchy (v_n) .

Bien sûr, comme nous, Méray ne s'est pas préoccupé de définir effectivement la suite extraite : une nouvelle fois il suffit de considérer le bon ordre de l'ensemble des entiers naturels pour définir précisément la suite (v'_n) . En revanche, Méray indexe les intervalles $]l_k, L_k[$ et il revient même à la charge à la fin de sa démonstration lorsqu'il précise le caractère "adjacent" des suites $(l_k), (L_k)$.

On pourra assigner successivement à v deux premières limites l_{h_0}, L_{h_0} , puis deux autres l_{h_1}, L_{h_1} , renfermées (l'une au moins) dans l'intervalle des précédentes puis deux nouvelles l_{h_2}, L_{h_2} , encore plus rapprochées que celles-ci et cela indéfiniment [Méray 1869, 282].

En fait, Méray n'explicite ici que l'emboîtement des intervalles mais il est clair que dans son esprit les bornes l_{h_n} et L_{h_n} sont infiniment rapprochées l'une de

l'autre. Il n'en demeure pas moins qu'en raisonnant par l'absurde, pour chaque k , il a seulement démontré l'**existence** d'un intervalle $]l_h, L_h[$ et qu'il ne l'a pas précisément déterminé afin d'en assurer l'**indexation** souhaitée. Nous pouvons penser qu'ici, en prenant non plus $]l', L'[$ quelconque mais l'un des intervalles $]l_k, \frac{l_k + L_k}{2} [\cup] \frac{l_k + L_k}{2}, L_k[$ Méray aurait pu mener à bien l'effectivité des suites (l_{h_n}) et (L_{h_n}) . D'un autre côté, nous savons aussi qu'en adoptant les suites de termes rationnels (l_{h_n}) et (L_{h_n}) , compte tenu d'un bon ordre possible sur l'ensemble des rationnels, nous pouvons choisir effectivement les bornes.

Conclusion

Si aujourd'hui nous pouvons **effectivement** déterminer les suites adjacentes (l_{h_n}) et (L_{h_n}) invoquées par Méray dans sa démonstration, nous sommes, en revanche assurés que pour cet auteur, ceci relevait de l'implicite. Plus tard avant la bombe de Zermelo et bien après, partisans ou adversaires de l'axiome du choix commettrons de telles absences de rigueur. Guidés en quelque sorte par leurs intuitions, les mathématiciens ne prendront pas garde que, parfois, leurs raisonnements nécessitaient l'acceptation de l'axiome du choix pour valider leurs preuves. L'exemple fourni par les **remarques** de Méray nous montre qu'en suivant de telles démarches on pouvait passer peu à peu d'une certaine effectivité à une imprécision beaucoup plus préjudiciable à la valeur des arguments invoqués.

En fait, nous pouvons penser que pour de nombreux mathématiciens de la fin du XIX^e ou du début du XX^e l'**existence** d'un être mathématique suffisait pour la transformer en une **existence fonctionnelle**. En analyse, nous pouvons invoquer au lieu de l'axiome du choix, le **principe des choix dépendants** énoncé par Paul Bernays en 1942.

Si R est une relation sur un ensemble E tel que pour tout x de E il existe un y de E tel que xRy alors il existe une suite (x_n) telle que pour tout entier naturel n , $x_n R x_{n+1}$.

Sans aucun doute, formulé plus tôt, ce principe aurait sans doute reçu l'assentiment de la communauté des analystes alors que l'axiome du choix général proné par Zermelo fit l'effet d'une bombe. Même si nous avons pu rendre effective la démonstration proposée par Méray nous savons qu'en d'autres endroits nous ne pouvons pas réussir. Par exemple, d'après les travaux de Jaegermann, nous savons que l'axiome du choix dénombrable est essentiel pour démontrer l'équivalence des deux définitions de la continuité (voir ci-après). Pourtant, soucieux de rigueur, trois ans après Méray, Heine n'a pas décelé **la faille** dans son raisonnement. Pour Heine

une fonction est dite continue pour une valeur particulière déterminée $x = X$, quand, pour chaque grandeur ε donnée aussi petite que l'on veut, il existe un autre nombre positif η_0 ayant la propriété que, pour aucune grandeur positive η , qui soit plus petite que η_0 , la valeur numérique de $f(X \pm \eta) - f(X)$ ne dépasse ε [Heine 1872, 182].

et il veut montrer que

si pour chaque suite de nombre x_1, x_2 , etc..., ayant pour symbole $X, f(x_1), f(x_2)$, etc formant aussi une suite de nombres de symbole numérique $f(x)$ alors $f(x)$ est continue pour $x = X$ [Heine 1872, 182].

Comme Méray, Heine raisonne par l'absurde. Il suppose donc que pour toute suite (x_n) convergeant vers X la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(X)$ et il veut en déduire que la fonction f est continue au point X . Raisonnant par l'absurde et supposant dont f non continue au point X , il existe une grandeur ε telle que pour tout nombre y_0 positif, il existe une grandeur y plus petite que y_0 telle que $f(X \pm y) - f(X)$ soit en valeur absolue supérieure à ε . Cette existence de y à partir de y_0 lui sert pour définir une suite $(z^{(n)})$ moyennant implicitement l'axiome du choix. Écoutons-le.

Quand on fixe un nombre déterminé ε tel que, aussi petit que l'on prenne un nombre η_0 , la condition de continuité ne soit jamais remplie, alors il existe toujours des valeurs η inférieures à η_0 telles que $f(X + y) - f(x)$ reste supérieur à ε ; ainsi, pour une grandeur quelconque η_0 , on a une telle valeur η , égale à η' (inférieure à cet η_0), pour laquelle la différence précitée n'est pas plus petite que ε . Pour une moitié de la grandeur de la valeur η_0 la différence ne peut être plus petite que ε pour $\eta = \eta''$; pour un η_0 égal à la moitié du précédent (le quart du premier, ceci peut avoir lieu pour $\eta = \eta'''$ et ainsi de suite [Heine 1872, 183].

Pour le lecteur que la théorie des modèles mise en oeuvre par Jaegermann pourrait effaroucher, contentons-nous ici, de remarquer que les η', η'' et η''' mis en avant par Heine sont des nombres réels non nécessairement rationnels. Dès lors, nous ne pouvons plus, comme pour Méray, invoquer un bon ordre sauf à admettre celui des nombres réels ou de manière plus générale l'axiome du choix même si ce dernier peut ici être remplacé par une forme plus faible, axiome du choix dénombrable ou principe des choix dépendants. Cet exemple nous montre combien, resituée dans un certain cadre, la démarche suivie par Méray est un témoignage certain de la préhistoire de l'axiome du choix : dans un cadre semblable, Heine développe une argumentation tout à fait comparable à celle suivie par Méray, mais où cette fois on ne peut évacuer l'axiome du choix.

Bibliographie

CANTOR Georg 1883 Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten V **Mathematische Annalen** t. 21, 1883, 545-586, in **Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts**, Hildesheim, Olms, 1966, 165-208 trad. partielle Fondements d'une théorie générale des ensembles **Acta mathematica** t. 2, 1883, 381-408.

CASSINET Jean, GUILLEMOT Michel 1983 L'axiome du choix dans les mathématiques de Cauchy (1821) à Gödel (1940), **Thèse d'Etat**, Toulouse

CAUCHY Augustin 1821 **Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique**, Paris : Imprimerie Royale, réimp. Oeuvres complètes II^e série, t. III. Paris, Gauthiers-Villars, 1897.

COHEN Paul 1963 **The independance of the axiom of choice**, Stanford University

- DIEUDONNE Jean (éd.) 1978 **Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900**, t. I, Paris, Hermann
- DUGAC Pierre 1970 Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite, **Revue d'Histoire des Sciences**, t. 23, 1970, 333-350.
- GÖDEL Kurt 1938 The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, t. 24, 1938, 556-557.
- HEINE Heinrich Eduard 1872 Die Elemente der Functionenlehre, **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, t. 74, 1872, 172-188.
- HILBERT David 1900 Mathematische Problem Vortrag, gehalten auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900, **Nachrichten von den Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen**, 1900, 253-297 in *Oeuvres*, t. 3, 290-329, trad. Sur les problèmes futurs des mathématiques, **Compte-rendu du 2^e Congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900**, Paris, Gauthier-Villars, 1902, 58-114.
- HOWARD Paul, RUBIN Jean 1998 **Consequences of the axiom of choice**, American Mathematical Society.
- JAEGERMANN, M. 1965 The axiom of choice and the two definitions of continuity, **Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques**, t. 13, 1965, 699-704.
- KÖNIG Julius 1904 Zum Kontinuum Problem **Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg vom 8 bis 13 August 1905**, Leipzig, Teubner, 1905, 144-147.
- MEDVEDEV Fedor 1982 **Ramnyaya istoriya aksiani vibrira** (Brève Histoire de l'Axiome du Choix), Moscou, Nauka.
- MERAY Charles 1869 Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données, **Revue des Sociétés Savantes**, t. 4, 1869, 280-289.
- MOORE Gregory 1982 **Zermelo's axiom of choice. Its origins, development and influence**, New-York, Springer.
- RUBIN Herman, RUBIN Jean 1985 **Equivalents of axiom of choice II**, Amsterdam, North Holland
- ZERMELO Ernst 1904 Beweis dass jede Menge wohlgeordnet sein kann **Mathematische Annalen**, t. 59 (1904), 514-516.
 1908a Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung **Mathematische Annalen**, t. 65, 1908, 107-128.
 1908b Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, **Mathematische Annalen**, t. 65, 1908, 261-281.
- ZORN Max 1935 A remark on method in transfinite Algebra, **Bulletin of the American Mathematical Society**, t. 41, 1935, 667-670.