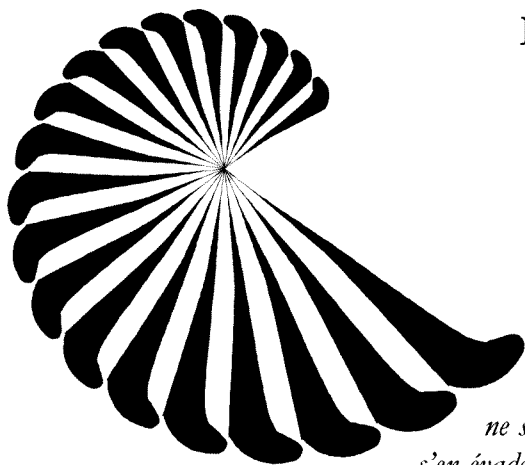




LES SPIRALES (1^{re} partie)

André STOLL
Lycée Louis Couffignal
IREM de Strasbourg¹

« Quelle spirale, que l'être de l'homme. Dans cette spirale, que de dynamismes qui s'inversent. On ne sait plus tout de suite si l'on court au centre ou si l'on s'en évade. »

BACHELARD, Poétique de l'espace.

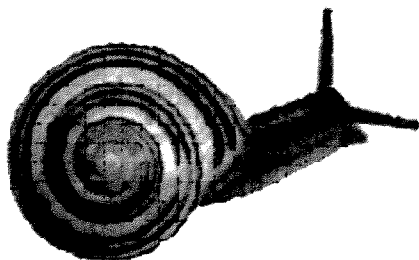
1. Introduction

Les spirales ? Elles sont présentes partout. Dans le monde animal ou végétal, admirez la forme superbe d'un nautilus ou d'une coquille d'escargot. Admirez également la fleur de la marguerite. Celle-ci est composée d'une centaine de fleurons élémentaires jaunes, disposés en son cœur selon une double gerbe de spirales droites ou gauches. Vous en trouverez également dans les tableaux de Léonard de Vinci, de Dürer et autres artistes peintres, en architecture, en ferronnerie, en mécanique... Sur une pellicule photo, un banal escalier hélicoïdal devient une spirale. En astronomie, nul ne peut ignorer les galaxies en forme de spirale.



LÉONARD DE VINCI : L'ANNONCIATION

Cette figure est présente dans toutes les cultures. Elle est chargée de signification symbolique. C'est un motif ouvert et optimiste. Elle représente les rythmes répétés de la vie, le caractère cyclique de l'évolution.



Paradoxalement pourtant, dans la langue française, on ne parle d'elles que pour évoquer un échec, une crise... la spirale du chômage, la spirale de la violence...

Paradoxalement encore, si ces courbes sont si présentes dans notre environnement, elles sont

¹ Ce texte est un résumé de la conférence donnée le 28 mars 1998 à la régionale d'Alsace de l'APMEP.

presque complètement oubliées dans l'enseignement des mathématiques. Pourquoi ? Difficile de répondre de manière précise à cette question. Certains disent qu'elles sont trop difficiles à tracer. C'est évidemment une fausse raison. D'ailleurs à l'ère des calculatrices graphiques et autres traceurs de courbes cette raison ne peut pas expliquer leur absence.

Dans l'histoire des mathématiques, ces figures sont intervenues comme solutions de problèmes fondamentaux et extrêmement variés. Et très souvent, elles apparaissent là où on ne les attendait pas !

Au cours de l'article ci-dessous, je souhaiterais d'une part présenter quelques spirales en les remettant dans leur contexte historique et d'autre part, montrer ce que l'étude de ces courbes peut apporter à un enseignant de mathématiques.

2. La spirale de Théodore de Cyrène.

1. De l'incommensurabilité de la diagonale du carré à la spirale de Théodore.

Dans l'ouvrage de Platon qui porte son nom, *Théétète* affirme que son maître, *Théo-*

THÉODORE DE CYRÈNE (fin V^e – début IV^e siècle avant J.C.)

Mathématicien grec, qui enseignait à Cyrène. D'après Diogène Laërce, Théodore de Cyrène aurait connu et même instruit Platon, lors de son passage à Cyrène. Platon fait d'ailleurs de lui un des personnages de la trilogie du *Théétète*, en le présentant à la fois comme ami de Socrate et comme ami de Protagoras (un disciple de Pythagore). Dans le catalogue d'Eudème conservé par Proclus, Théodore est cité après Hippocrate de Chios. Il figure également dans la liste de Jamblique comme pythagoricien. C'est, en tout cas, de la grande découverte pythagoricienne de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré (racine carrée de 2) qu'il est parti pour étudier ce que nous appelons actuellement l'irrationalité des racines carrées des nombres de 3 à 17, sans doute par des procédés géométriques comme nous pouvons le lire dans le «*Théétète*» de Platon :

THÉÉTÈTE. - *Théodore [...] avait fait, devant nous, les constructions relatives à quelques-unes des puissances, montré que celles de trois pieds et de cinq pieds ne sont point, considérées selon leur longueur, commensurables à celle d'un pied, et continué ainsi à les étudier, une par une, jusqu'à celle de dix-sept pieds : il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là.* [Platon : *Théétète* 147d]

dore, a étudié l'irrationalité des nombres $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5} \dots$ jusqu'à $\sqrt{17}$ et qu'il a construit ces nombres devant lui (voir encadré). Comment ? Pourquoi Théodore s'est-il arrêté à $\sqrt{17}$?

Nous ignorons les réponses à ces questions. Depuis plus de 2 millénaires, les mathématiciens et les historiens se posent ces questions et, encore de nos jours, les spéculations continuent.

Une réponse, pleine d'imagination, a été donnée, il y a environ 70 ans par un mathématicien allemand, J.H. Anderhub. Celui-ci imagina que Théodore construisit $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5} \dots$ à l'aide d'une suite de triangles rectangles dont l'un des côtés de

l'angle droit mesure une unité et l'autre côté de l'angle droit est l'hypoténuse du triangle rectangle précédent, le premier triangle étant rectangle et isocèle (voir figure 1)

Il est aisé de démontrer à l'aide du théorème de Pythagore que les hypoténuses des triangles ainsi construits mesurent $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$

J.H. Anderhub observa que $\sqrt{17}$ est l'hypoténuse du dernier triangle rectangle avant que la figure ne se superpose à elle-même. En poursuivant la construction, nous obtenons une spirale que J.H. Anderhub dénomma „die Quadratwurzelschnecke“ c'est-à-dire « l'escargot de la racine-carrée » pour rappeler que l'hypoténuse du n-ième triangle est $\sqrt{n+1}$. En l'honneur de Théodore de Cyrène, elle est aussi appelée « la spirale de Théodore » Il se pourrait ainsi que cette spirale, tout en étant une découverte récente, soit la plus ancienne des spirales.

2. Construction de la spirale de Théodore.

La spirale de Théodore est une spirale discrète.

Pour la tracer, nous construisons un triangle rectangle et isocèle (OA_1A_2) puis, par récurrence, les points $A_3, A_4, A_5, \dots$ tels que :

- les angles $\widehat{OA_nA_{n+1}}$

sont droits :

$$\widehat{OA_1A_2} = \widehat{OA_2A_3} = \widehat{OA_3A_4} = \dots = 1 \text{ droit}$$

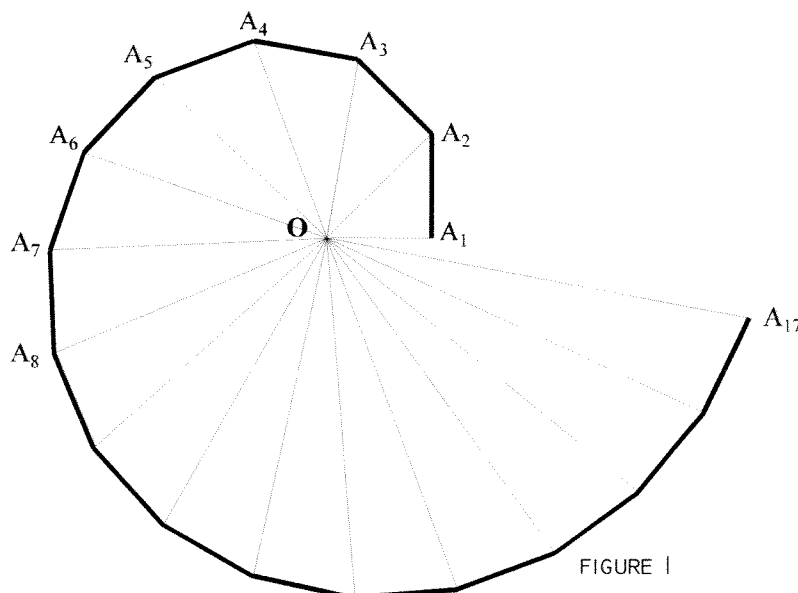
- les côtés $[A_nA_{n+1}]$ ont tous même longueur : $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$

En prenant comme unité de mesure la longueur commune des côtés $[A_nA_{n+1}]$, il est facile de montrer, à l'aide du théorème de Pythagore, que la longueur du segment $[OA_n]$ est $\sqrt{n}$:

$$OA_1 = \sqrt{1}, OA_2 = \sqrt{2}, OA_3 = \sqrt{3}, OA_4 = \sqrt{4}, OA_5 = \sqrt{5}, \dots$$

3. Pour les enseignants : quelques sujets de réflexion.

La construction de la spirale de Théodore est, sans aucun doute possible, à la portée d'un élève de collège. Mais, en faisant preuve d'un peu d'imagination, elle peut susciter des questions dont le niveau peut dépasser le niveau d'une classe préparatoire. En voici quelques exemples sous forme d'exercices.



Exercice 1

Dans le repère orthonormé direct $R = (O ; \vec{i} ; \vec{j})$ où $\vec{i} = \overrightarrow{OA_1}$, on appelle z_n l'affixe du point A_n . Montrer que $z_{n+1} = i \frac{z_n}{|z_n|}$

Retrouver le résultat ci-dessus c'est à dire :

$$|z_n| = \sqrt{n}.$$

Montrer qu'un argument de z_n est, pour

$$n \geq 2 : \arg(z_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Atan} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

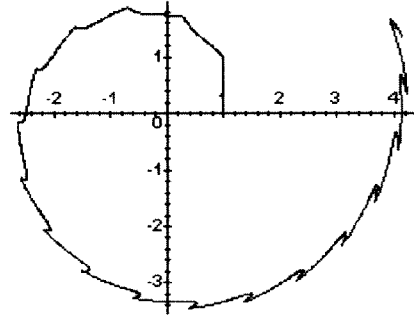


FIGURE 2

Exercice 2

À l'aide du logiciel *Maple*, construire n points de la spirale de Théodore.

Exercice 3 : Prolongement par « continuité »

La spirale de Théodore est une spirale discrète. Le but de cet exercice est de la transformer en une spirale continue en s'imposant bien évidemment certaines contraintes.

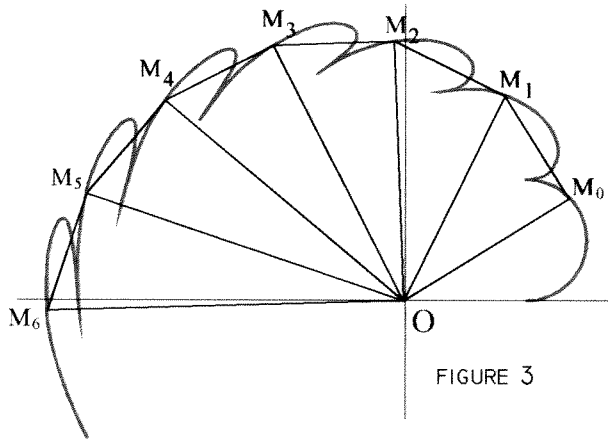


FIGURE 3

Une première idée, très simple, consiste à relier les points A_n par un segment de droite.

Malheureusement, dans ce cas, nous ne pouvons pas généraliser la propriété qui a donné naissance à cette spirale. En effet, on voudrait que si le point M est sur la courbe, alors le point M' tel que $MM' = 1$ et le triangle OMM' est rectangle soit également sur la courbe. En langage des nombres complexes, cette

propriété se traduit par : la courbe est invariante par la transformation

$$\Gamma : z \rightarrow z \times \left(1 + \frac{i}{|z|}\right).$$

D'où l'idée suivante : on relie les points A_1 et A_2 par une courbe (C) quelconque et on applique la transformation Γ à chaque point de cette courbe (C) . La figure 2 et la figure 3 montrent le résultat lorsque (C) est un segment de droite ou un demi-cercle.

Écrire un programme permettant à des logiciels de calcul formel comme *Maple*, *Derive* ... de tracer les courbes correspondantes et tracer la courbe obtenue lorsque (C) est un segment de parabole. (Une solution est proposée en figure 3)

Les spirales ainsi obtenues ne sont pas assez « régulières » (comment définir correctement ce terme ?). D'où la deuxième question : trouver l'équation d'une courbe (S) « bien régulière » qui passe par tous les points A_n et telle que si le point M est sur (S) alors le point $\Gamma(M)$ y est également. (Une réponse se trouve en figure 4)

Exercice 4 : Nombre de tours ...

Au dix-septième point, la spirale a presque fait un tour complet.

Montrer que le nombre de spires réalisées lorsque $n \geq 18$ est égal à la partie entière de :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} A \tan \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Calculer, par exemple, le nombre de tour lorsque $n = 10^9$.

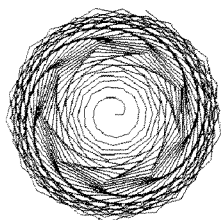


FIGURE 4

4. Pour le plaisir : généralisons !

Pour construire la spirale de Théodore, nous avons pris une succession de triangles rectangles dont l'un des côtés mesure 1 unité.

(En langage des nombres complexes, ceci correspond à la transformation

$$z \rightarrow z + i \frac{z}{|z|})$$

Généralisons en prenant, non plus un angle droit, mais un angle quelconque et le côté $A_n A_{n+1}$ quelconque (Soit une transformation de la forme

$$z \rightarrow z + b \frac{z}{|z|} \text{ où } b \text{ est un nombre}$$

complexe quelconque). Généralisons encore d'avantage par la transformation

$$z \rightarrow az + b \frac{z}{|z|} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux}$$

nombres complexes quelconques. Le lecteur inspiré pourra encore généraliser en prenant par exemple a et b dépendant de n. Les résultats sont parfois spectaculaires.

La figure 4 et la figure 5 ont été obtenues en prenant :

$$a = \exp(i \frac{\pi}{4}), b = \exp(-i \frac{\pi}{4}) \text{ (nombre de points : 300) et}$$

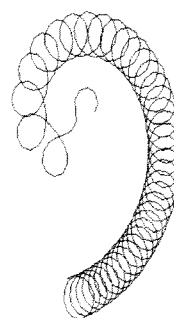


FIGURE 5

$$a = 1, b = \frac{1}{2} \exp(i \frac{n}{2}) \text{ (nombre de points : 500).}$$

3. La spirale d'Archimède.

Il est fort probable que c'est en cherchant les solutions des problèmes de la trisection de l'angle et/ou de la quadrature du cercle qu'Archimède eut l'idée d'introduire la spirale qui porte désormais son nom.

Celle-ci mériterait à elle seule un long exposé. Aussi, me contenterais-je de ne donner que quelques résultats concernant la spirale d'Archimède²

1. Définition.

Dans le « Traité des spirales », Archimède nous donne la définition suivante :

« Lorsqu'une [demi] droite tourne uniformément dans un plan pendant que l'une de ses extrémités reste fixe et qu'elle revient à sa position initiale, et si sur cette droite en rotation un point se déplace uniformément à partir du point fixe, le point décrira dans le plan une spirale. »

Il est tout à fait remarquable que si la définition que nous donne Archimède est purement mécanique, ses démonstrations quant à elles sont purement géométriques !

Archimède a-t-il utilisé la mécanique pour découvrir les résultats concernant la tangente et d'autres propriétés de la spirale ? La réponse nous est inconnue. Toutefois, replaçant le traité de la spirale dans l'ensemble de son œuvre, cela est

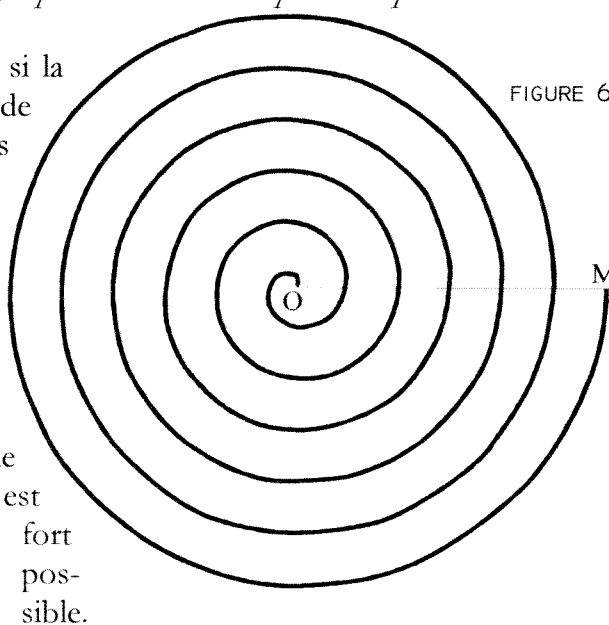


FIGURE 6

fort possible.

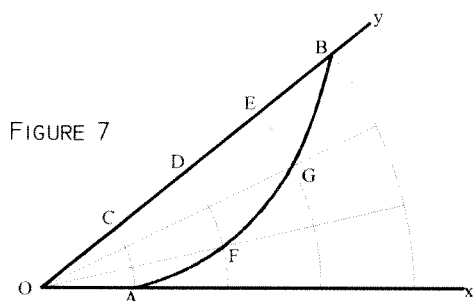


FIGURE 7

2. La spirale d'Archimède et le problème de la trisection de l'angle.

En fait, cette spirale permet de partager un angle en n angles égaux.

² Le lecteur intéressé pourra consulter l'œuvre d'Archimède : Éditions « Les Belles Lettres » – texte établi et traduit par Charles Mugler - Tome II.

Les enseignants quant à eux pourront consulter la brochure de l'IREM de Strasbourg – « Activités géométriques pour le collège et le lycée présentées dans une perspective historique » – janvier 1996

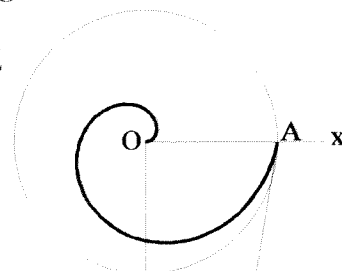
En effet, pour partager l'angle $\widehat{xOy}$ en n angles égaux, il suffit de :

– Faire coïncider le sommet de l'angle avec l'origine de la spirale. (Sur la figure 7, n'a été tracé que l'arc de spirale $\widehat{AB}$ où A (resp. B) est l'intersection de Ox (resp. Oy) avec la spirale).

– Le cercle de centre O et de rayon OA coupe la demi-droite [Oy) en C. On partage le segment [CB] en n segments de même longueur (sur la figure, $n = 3$) : $CD = DE = EB$.

– Les cercles de centre O et de rayons OD et OE coupent la spirale en F et G.

– On démontre que : $\widehat{xOF} = \widehat{FOG} = \widehat{GOy}$
(La démonstration est laissée au lecteur)



3. Tangente à la spirale d'Archimède et quadrature du cercle.

Poursuivant la lecture du traité des spirales, nous trouvons la proposition suivante:

« Et si une droite est tangente à la spirale en son extrémité atteinte en dernier lieu, et qu'on élève, sur la droite ayant tourné et repris sa position initiale, la perpendiculaire à l'extrémité restée fixe jusqu'à sa rencontre avec la tangente, je dis que le segment de droite ainsi mené est égal à la circonférence du cercle. »

Sur la figure ci-contre, cette proposition se traduit par : soit T le point d'intersection de la tangente à la spirale en A et de la perpendiculaire à (OA) en O ; alors la longueur OT est égale à la circonférence du cercle de centre O et de rayon OA

Ainsi la construction d'une tangente à la spirale est un problème équivalent au problème de la rectification (donc de la quadrature) T du cercle.

FIGURE 8

La démonstration que nous donne Archimède de ce théorème offre un bel exemple de la méthode géométrique des Anciens. Elle présente certes des longueurs, mais celles-ci sont nécessaires. Elle est remarquable par sa rigueur et se trouve dégagée de tout usage de considération d'infini.

Au début du XVII^e siècle, G. P. de Roberval utilise la composition des vitesses pour aboutir au même résultat.

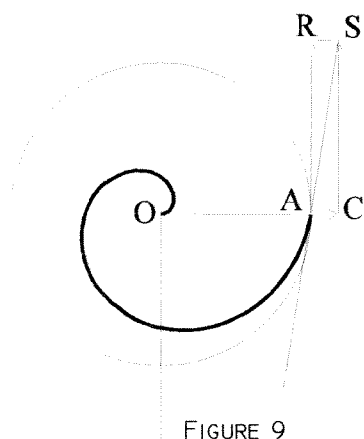


FIGURE 9

Le calcul suivant illustre sa méthode avec des notations contemporaines et la notion de vecteur qui est plus récente.

Supposons, pour fixer les idées, que la demi-droite Ox tourne autour de O à la vitesse constante de 1 tour par seconde. Le mouvement du point A résulte d'un mouvement linéaire représenté par le vecteur $\overrightarrow{AC}$ et de la rotation de Ox représentée par le vecteur $\overrightarrow{AR}$ (voir la figure 8 et la figure 9). La direction du mouvement du point A, qui est la tangente à la spirale en ce point, est donnée par le vecteur $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AR}$.

Les triangles rectangles (ACS) et (AOT) sont semblables, d'où :

$$OT = OA \times \frac{CS}{CA} = OA \times \frac{AR}{AC} = 2\pi \times OA \text{ .}$$

Nous retrouvons ainsi le résultat démontré par Archimède il y a plus de deux mille ans.

4. Aire d'un segment de spirale.

Après avoir étudié la tangente à la spirale, Archimède s'intéresse à l'aire d'un segment de spirale. Il énonce la proposition suivante :

« Je dis, dès lors, que l'aire comprise entre la spirale et la droite revenue à sa position initiale est égale au tiers du cercle décrit autour du point fixe comme centre avec un rayon égal au segment de droite parcouru par le point pendant une révolution de la droite. »

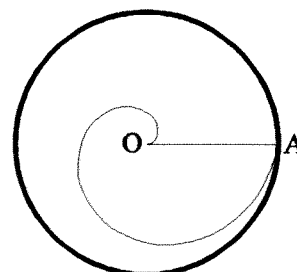


FIGURE 10

(Sur la figure 10, cette proposition se traduit par : l'aire de la surface hachurée est le tiers de l'aire du disque de centre O et rayon OA)

Pour démontrer ce théorème, Archimède partage le cercle en un certain nombre de secteurs angulaires. Il encadre alors l'aire $\mathcal{A}$ à calculer par deux aires Σ_1 et Σ_2 dont la différence est aussi petite que l'on voudra. Puis par un double raisonnement par l'absurde, il en déduit le résultat.

L'exercice ci-dessous traduit la méthode d'Archimède en utilisant les notations contemporaines et, contrairement à Archimède, le recours à la notion d'infini.

Exercice 5 : calcul de l'aire d'un segment de spirale

Soit p un nombre entier quelconque, on partage le plan en p secteurs angulaires : $w_0Ow_1, w_1Ow_2, \dots, w_{p-2}Ow_{p-1}, w_{p-1}Ow_p$ (sur la figure 12, on a pris $p = 9$).

Si $0 \leq n \leq p$ la demi-droite $[Ow_n]$, coupe la spirale en M_n .
(pour les notations, voir la figure 12).

L'aire $\mathcal{A}$ à calculer est alors égale à la somme des aires des segments de spirale $(OM_nM_{n+1}) = \mathcal{A}_n$ $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{p-1} \mathcal{A}_n$.

Exprimer en fonction de l'angle θ et du rayon $r = OA = OB$ l'aire du secteur angulaire OAB (voir figure 11 pour les notations).

La réponse est : $\frac{1}{2} r^2 \theta$

Exprimer en fonction de p et de n les angles orientés $([Ow_n, [Ow_{n+1})$ et $([Ox, [Ow_n)$.
En déduire la longueur OM_n et l'aire des secteurs (OM_nR_{n+1}) et (OP_nM_{n+1}) .

Trouver un encadrement de $\mathcal{A}_n$ et en déduire :

$C \sum_{n=0}^{p-1} \frac{n^2}{p^3} \leq \mathcal{A} \leq C \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(n+1)^2}{p^3}$ où C désigne l'aire du cercle de centre O et de rayon OA .

Démontrer que $\sum_{n=0}^{p-1} n^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$.

En déduire l'encadrement suivant de $\mathcal{A}$:

$C \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{2p} + \frac{1}{6p^2} \right) \leq \mathcal{A} \leq C \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{2p} + \frac{1}{6p^2} \right)$

Que se passe-t-il lorsque p tend vers « plus l'infini » ?

En déduire le résultat annoncé par Archimède.

Transcrit en algorithme moderne, l'obtention de ce résultat ne pose aucun problème.

En effet, dans un repère orthonormé convenablement choisi, une équation de la spirale d'Archimède en coordonnées polaires est : $\rho = k\theta$ où $k = \frac{OA}{2\pi}$.

L'aire de la première spire est égale à l'intégrale définie :

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta = \frac{k^2}{2} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{k^2}{6} [\theta^3]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3 k^2}{6} = \frac{\pi OA^2}{3}.$$

Malheureusement cet algorithme nous fait oublier les raisonnements géométriques qui sont les fondements du calcul intégral. Nous l'appliquons machinalement à un grand nombre de courbes dont nous connaissons une équation sans nous préoc-

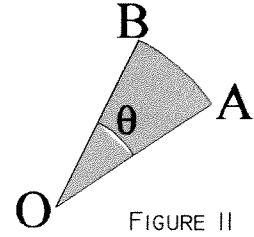


FIGURE 11

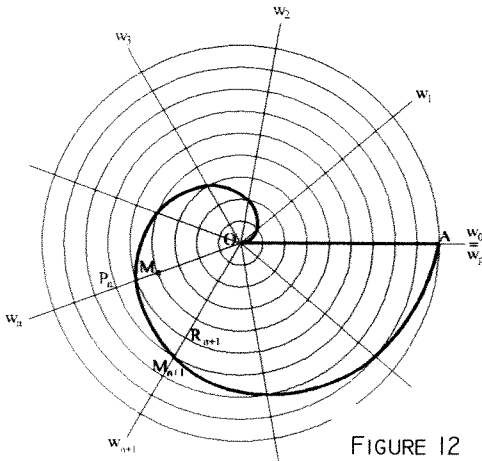


FIGURE 12

cuper de la décomposition de l'aire à calculer en tranches et de l'inscription et de la circonscription de celles-ci. Il n'en est pas de même pour les Anciens pour lesquels chaque problème de quadrature est un problème spécifique qui reçoit une solution particulière.

5. Longueur d'un segment de spirale.

Au XVII^e siècle, à l'aide de la méthode des indivisibles, les mathématiciens démontrent que le problème de la rectification d'un arc de la spirale d'Archimède est équivalent à la rectification d'un arc de parabole (voir figure 13).

La méthode des indivisibles étant contestée, Blaise Pascal démontre le résultat ci-dessus à l'aide de la méthode des Anciens: « [...] et sans m'arrêter, ni aux méthodes des mouvements, ni à celles des indivisibles, mais en suivant celles des anciens afin que la chose pût être désormais ferme et sans dispute. Je l'ai donc fait, et j'ai trouvé que M. de Roberval avait eu raison, et que la ligne parabolique et la spirale sont égales l'une à l'autre; c'est ce que vous verrez. La démonstration est entière et exactement accomplie, et vous pourra plaire d'autant qu'elle est la seule de cette espèce, aucune autre n'ayant encore paru à la manière des anciens de la comparaison de deux lignes de différente nature. Ainsi je puis dire avec certitude que la ligne parabolique est égale à la spirale et je m'assure que cette preuve arrêtera toutes les contradictions. Voilà ce que vous avez demandé de moi : je souhaite que cela vous agrée, et que ce vous soit au moins une marque du désir que j'ai de vous satisfaire et de vous témoigner que je suis de tout mon cœur, etc.

De Paris, ce 10 décembre 1658. »³

La spirale ($\mathcal{S}$) est donnée. M est un point quelconque de ($\mathcal{S}$) et I est le point de l'axe des abscisses qui vérifie $OM = OI$. Soit ($\mathcal{P}$) une parabole, α l'angle formé par la demi-droite $[OM$ et la tangente à la spirale en M, β l'angle formé par l'axe des abscisses et la tangente à la parabole en P. Lorsque la parabole ($\mathcal{P}$) est correctement choisie, les angles α et β sont égaux et l'arc de spirale $\widehat{OM}$ a la même longueur que l'arc de parabole $\widehat{OP}$.

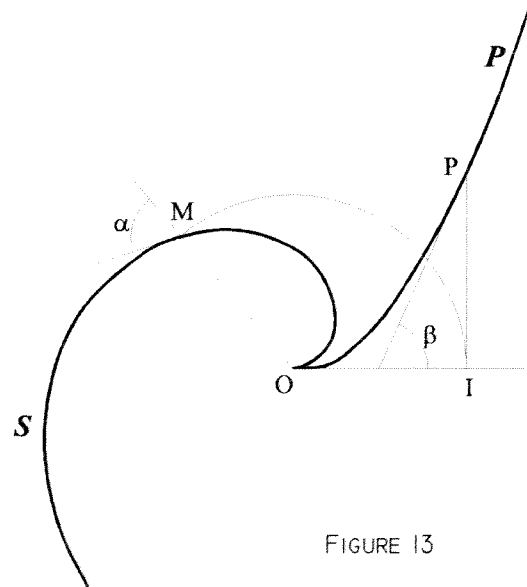


FIGURE 13

(Par exemple si la spirale ($\mathcal{S}$) a pour équation polaire $\rho = k\theta$, il faut prendre la parabole ($\mathcal{P}$) qui a pour équation cartésienne $y = \frac{1}{2k} x^2$).

³ « Lettre de A. DETTONVILLE [c'est-à-dire de Blaise PASCAL] à Monsieur A.D.D.S. » in Blaise PASCAL, Œuvres Complètes, Bibliothèque de la Pléiade p. 314. La démonstration de PASCAL est jointe à la lettre.

Exercice 6 : Théodore et Archimède, deux spirales si proches

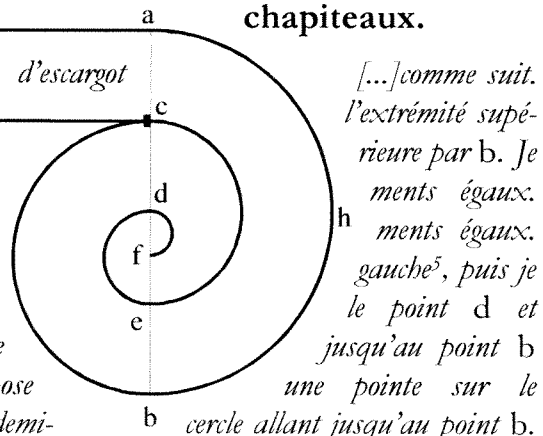
Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la spirale de Théodore est asymptote à une spirale d'Archimède .

4. Les spirales de Albrecht Dürer

Dans son livre intitulé „Underweysung der messung / mit dem zirckel und richtscheyt / in Linien ebenen und gantzen corporen / durch Albrecht Dürer zu samen getzogen / und zu nutz aller kuntstliebhabenden mit zu gehörigen figuren in truck gebracht / im jar MDXXV.“⁴, Albrecht Dürer nous montre comment construire quelques spirales. Les trois constructions ci-dessous sont extraites de ce livre.

1. Une ligne en escargot utile dans la réalisation d'une corne de bélier pour les chapiteaux.

« Je tracerai au compas une ligne en forme d'escargot J'élève une ligne verticale dont l'extrémité supérieure soit désignée par a, l'extrémité inférieure celle-ci par trois points c, d, e en quatre segments égaux. Puis, je divise de par un point f en deux segments égaux. Je mets ensuite à droite de la ligne un g, un h à g prends un compas, dont je place une des pointes sur l'autre sur le point a et je décris vers h un demi-cercle situé en bas. Je prends de nouveau le compas, je pose point f, l'autre sur le point c et je décris vers g un demi-cercle allant jusqu'au point b. Je reprends le compas, pose une pointe sur le point d et décris de l'autre un demi-cercle situé vers h allant du point c vers le point e. Je pose ensuite une pointe du compas sur le point f l'autre sur le point d et je décris du côté g le demi-cercle s'arrêtant au point e. Je pose enfin le compas sur la ligne ab, une de ses pointes au milieu de df et l'autre sur le point d, et je décris du côté h le demi-cercle s'arrêtant au point f. Cette ligne est ainsi achevée et servira dans de multiples ouvrages. Entre autres, elle sera utile dans la réalisation d'une corne de bélier pour les chapiteaux. Pour mieux me faire comprendre, j'ai ajouté, ci-dessous, à main gauche de la ligne en escargot, deux lignes droites horizontales issues de ses points a et c.»



⁴ Instruction pour la mesure / à la règle et au compas / des lignes, plans et corps solides / réunies par Albrecht Dürer / et imprimées avec les figures correspondantes / à l'usage de tous les amateurs d'art / en l'an MDXXV.

Une traduction de ce livre est paru en 1995 aux Éditions du Seuil sous le titre « Albrecht Dürer: Géométrie » Traduction de Jeanne Peiffer.

⁵ Dans le livre d'A. Dürer, la figure gravée est inversée par rapport au texte.

2. Construction d'une autre ligne en escargot où l'on ne peut s'empêcher de penser à Archimède.

« Je me propose de construire au compas une ligne en escargot, mais par une autre voie. Fixe d'abord un centre *a*, puis décris un cercle que tu diviseras comme ci-devant par 12 points en 12 parties égales.

Mène des lignes droites de chacun de ces points vers le centre *a*. Ajoutes-y des nombres en commençant à compter en haut, poses-y le 12, puis parcours tous les points en les marquant par 1, 2, 3, etc., jusqu'au 12. Divise ensuite la ligne *a12* par 35 points en 36 parties égales et commence à les compter en haut, au point 12, puis en descendant 1, 2, 3, etc. Prends alors un compas, pose une de ses pointes sur le centre *a* et l'autre, sur la ligne 12a, sur le point 1.

Décris de là un arc de cercle allant jusqu'au rayon 1a.

Garde une des pointes du compas immobile sur le centre *a*, déplace l'autre pointe sur le rayon 12a jusqu'au deuxième point, 2, et décris avec elle un arc de cercle situé entre les deux rayons 1a et 2a.

Déplace ainsi cette pointe du compas sur le rayon *a12* de degré en degré et décris de façon ordonnée des arcs de cercle situés entre tous les rayons, et ce jusqu'à ce que tu aies fait le tour trois fois. Par les déplacements successifs d'une des pointes, l'ouverture du compas sera de plus en plus faible jusqu'à ce que cette pointe coïncide pratiquement avec le centre *a*. Toute cette construction ayant été effectuée au compas, tu pourras tracer la ligne en escargot en joignant un point à l'autre. Commence avec le point 12 de la circonférence et fais le tour trois fois jusqu'à ce que tu arrives au centre *a*....»

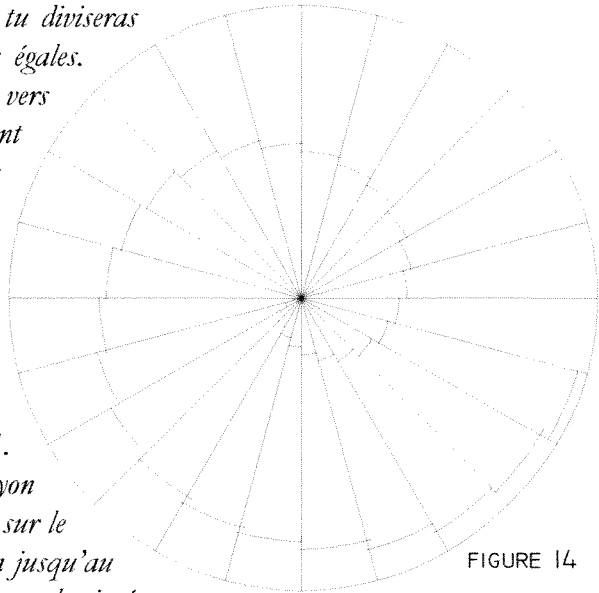


FIGURE 14

3. Construction d'une spirale sans début ni fin.

« On peut concevoir une ligne éternelle qui s'enroule continûment autour d'un centre et qui décrit aussi à l'autre extrémité des révolutions de plus en plus amples, sans jamais s'arrêter. On ne peut réaliser cette ligne à la main, à cause de ses infinies grandeur et petitesse. Car comme son début et sa fin n'existent pas, ils sont introuvables et concevables mentalement seulement. Mais je veux la représenter ci-dessous, tant qu'il est possible, avec un début et une fin. Je commence avec un point *a* et je décris la ligne à l'aide d'arcs de cercle comme si elle s'enroulait autour d'un centre, et à chaque révolution j'ôte une moitié de l'ampleur de la ligne. Je procède de même avec la ligne partant de *a* et allant vers l'extérieur. À chaque révolution, j'ajoute une moitié de l'ampleur. Ainsi cette ligne, plus

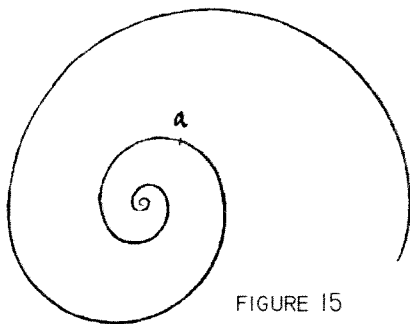


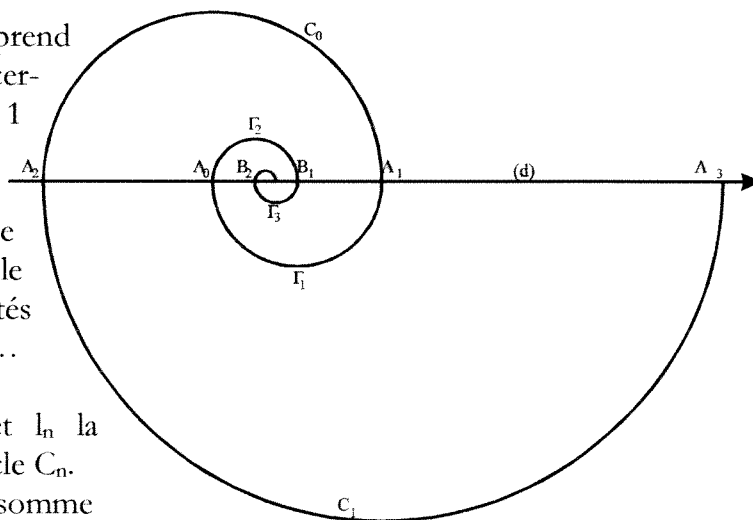
FIGURE 15

elle s'enroule, plus elle se resserre, et plus elle se déroule, plus elle se desserre, sans jamais s'arrêter, ni en son centre, ni en son contour, comme j'en ai donné, afin de me faire comprendre, une représentation ...» (Dürer, opus cité)

Les enseignants qui sont à la recherche d'exercices portant sur les suites (notamment les suites adjacentes, les suites et les séries géométriques) sauront tirer le plus grand profit de cette construction d'Albrecht Dürer.

Voici, par exemple, un exercice que l'on pourrait proposer à des élèves de première :

Sur une droite orientée (d), on prend un point A_0 et on trace le demi-cercle C_0 de centre A_0 et de rayon 1 unité qui coupe (d) en A_1 et A_2 puis le demi-cercle C_1 de centre A_1 et de rayon 2 unités qui coupe (d) en A_2 et A_3 puis le demi-cercle C_2 de centre A_2 et de rayon 4 unités qui coupe (d) en A_3 et A_4 puis le...



1. On appelle A_n le centre et l_n la longueur du n -ième demi-cercle C_n .
Calculer, en fonction de n , la somme

$$S_n = l_0 + l_1 + \dots + l_n \text{ et l'abscisse } a_n \text{ de } A_n \text{ dans le repère } (A_0, \overrightarrow{A_0A_1}) .$$

2. Soit à présent Γ_1 le demi-cercle d'extrémités A_1 et A_0 (on appelle B_1 son centre), Γ_2 le demi-cercle d'extrémités A_0 et B_1 (on appelle B_2 son centre), Γ_3 le demi-cercle d'extrémités B_1 et B_2 (on appelle B_3 son centre), etc.

On appelle B_n le centre et λ_n la longueur du n -ième demi-cercle Γ_n .

Calculer, en fonction de n , la somme $\Sigma_n = \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ et l'abscisse b_n de B_n dans le repère $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1})$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Sigma_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.