A VOS STYLOS

PROBLÈME 51

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Démontrer l'identité

$$tg\,x = \frac{x - \dfrac{1.3.5}{1.2.3}\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5}\dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{1.3}{1.2}\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

2°) Généraliser l'identité précédente au quotient

$$\frac{x - \dfrac{a(a+2)(a+4)}{a(a+1)(a+2)}\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}\dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{a(a+2)}{a(a+1)}\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{a(a+2)(a+4)(a+6)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}\dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Solution (par P. Renfer) :

1) Deux fonctions auxiliaires

Soit la fonction $f(z)$ définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+2)(a+4)\cdots(a+2n-2)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} \frac{z^n}{n!}$$

qui est entière, car

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} : \frac{u_n}{n!} = 0.$$

On pose $g(z) = e^{-z} f(z)$; pour x élément de on a

$$f(ix) = e^{ix} g(ix) = g(ix)\cos x + ig(ix)\sin x = D(x) + iN(x),$$

où $D(x)$ et $N(x)$ désignent respectivement les numérateur et dénominateur de la fraction de l'énoncé.

Si l'on démontre que g est une fonction paire, le problème est résolu, car alors $g(ix)$ est réel, d'où $D(x) = g(ix)\cos x$, $N(x) = g(ix)\sin x$, $\tan x = \dfrac{N(x)}{D(x)}$

A cet effet, nous allons prouver que, pour tout n, $g^{(2n+1)}(0) = 0$.

2) Parité de g quand a est un entier strictement positif

On a, pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{a+2n}{a+n} u_n = 2u_n - \dfrac{a}{a+n} u_n$

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} \frac{z^n}{n!} = 2f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{z^n}{n!} - a \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{z^n}{(n+a)n!}$$

$$z^a f'(z) = 2z^a f(z) - a \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{z^{n+a}}{(n+a)n!}$$

En dérivant membre à membre,

$$az^{a-1} f'(z) + z^a f''(z) = 2az^{a-1} f(z) + 2z^a f'(z) - az^{a-1} f(z),$$

d'où une équation différentielle satisfaite par f :

$$zf''(z) + (a-2z)f'(z) - af(z) = 0,$$

d'où l'on déduit, en dérivant $f(z) = e^z g(z)$, une équation différentielle satisfaite par g :

$$zg''(z) + ag'(z) - zg(z) = 0.$$

On a $g'0) = 0$. Dérivant $2n$ fois la relation $ag'(z) = z[g(z) - g''(z)]$ grâce à la formule de Leibniz, on trouve :

$$ag^{(2n+1)}(z) = z[g^{(2n)}(z) - g^{(2n+2)}(z)] + 2n[g^{(2n-1)}(z) - g^{(2n+1)}(z)],$$

d'où $(a+2n)g^{(2n+1)}(0) = 2ng^{(2n-1)}(0)$, et, par induction sur n, $g^{(2n+1)}(0) = 0$.

3) Parité de g dans le cas général

Développons g en série entière :

$$g(z) = e^{-z} f(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \frac{z^n}{n!},$$

où

$$v_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_k.$$

Ainsi, v_n est une fraction rationnelle de la variable a. En particulier, le numérateur de v_{2n+1} est un polynôme de la variable a dont on sait qu'il s'annule pour toute valeur entière > 0 de a. Ce polynôme est donc identiquement nul.

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1,D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2), puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3).
Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

PROBLÈME 53

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des $2-$mélanges réguliers (pour la définition d'un $2-$mélange, voir les articles sur les tours de cartes dans les numéros 90 et 93 de l'Ouvert).
1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.
2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.

PROBLÈME 54

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Montrer que si x, y et z sont des entiers impairs, la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier congru à 3 modulo 8.
2°) Soit n un entier congru à 3 modulo 8. Montrer, si possible par une bijection, que le nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \tag{1}$$

est égal au nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$xy + yz + zx = n. \tag{2}$$

Exemple.— n=35. L'équation (1) possède six solutions : $(1,3,5)$, $(1,5,3)$, $(3,1,5)$, $(3,5,1)$, $(5,1,3)$ et $(5,3,1)$; l'équation (2) possède également six solutions : $(1,5,5)$, $(5,1,5)$, $(5,5,1)$, $(1,1,17)$, $(1,17,1)$ et $(17,1,1)$.

PROBLÈME 55

Énoncé (proposé par J. Lefort) : Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = f(x+1)$$

dans l'ensemble le plus vaste possible.