

# VERSIONS POLYEDRIQUES DU RETOURNEMENT DE LA SPHERE

par Richard Denner  
Institution La Providence Strasbourg, annexe de Vendenheim.

*" ... les mathématiques donnent à ceux qui les aiment, les pratiquent, les utilisent ou, mieux encore, à qui les inventent, la certitude immédiate et expérimentale, oui, vécue, de la présence inévitable d'une corne d'abondance d'où l'on tire toujours tout de rien. Certes tout s'y trouve, mais nous n'avons pas d'yeux pour le voir ! "*

*Michel Serres, les origines de la géométrie, p 333.*

## Première partie : Utilisation de la surface de Boy.

### Introduction :

Il est des problèmes, qui sont de véritables défis lancés à l'imagination. En 1957, un jeune chercheur Stephen Smale travaillant sur les déformations de sphères conjectura, puis démontra un an plus tard, qu'une sphère pouvait être retournée.

Sans entrer dans plus de détails, disons que **retourner une sphère, c'est imaginer une déformation permettant d'échanger sa face interne avec sa face externe !**

Les pages qui suivent, retracent le chemin que j'ai eu l'occasion de parcourir, suite à ma préparation au capes, avec le professeur Bernard Morin, mathématicien aveugle, de l'Université Louis Pasteur. Il s'est attaché à plusieurs reprises au cours de sa carrière à ce problème avec toute la puissance de son imagination. Ensemble, nous avons mené à son terme une version polyédrique de ce problème.

On a beau appuyer de toutes les manières possibles sur un ballon, on n'arrivera jamais à échanger ses faces interne et externe, sans trous sa membrane.

Si l'on veut quand même le faire, une première condition est d'autoriser la surface à se traverser elle-même. Matériellement cela est évidemment impossible. Cependant si l'on considère une sphère dessinée sur un écran d'ordinateur, ou simplement sur une feuille de papier, rien n'empêche d'essayer.

C'est ce qu'avait fait Jean Pierre Petit dans un article de "Pour la Science" [1] paru en janvier 1979. On y découvre des dessins illustrant la transformation imaginée par Bernard Morin ainsi qu'un historique du retournement de la sphère.

Une collection de 8 modèles en grillage fut réalisée en 1973 par Charles Pugh. Mystérieusement disparue de la salle de réunion du département de mathématiques de

Berkeley où elle fut exposée, elle ne subsiste plus que sous la forme d'un film pédagogique réalisé en 1976 par Nelson Max.

Le présent travail, mené de 1989 à 1992, a conduit à la réalisation d'une série de 45 modèles en trois dimensions qui permettent de donner très rapidement une vision globale du processus tout en montrant sa complexité. Ces modèles n'ont malheureusement pas pu être exposés à la Villette ou au Palais de la Découverte comme Morin l'avait souhaité. De nombreuses photos ont été prises ainsi que des diapositives, elles complètent cet article. C'est sur le chemin de la découverte de cette déformation que je me propose de vous accompagner. Le point de départ sera le plan projectif.

### 1. Le plan projectif.

Il s'agit de l'ensemble de toutes les droites de  $\mathbf{R}^3$  qui passent par l'origine. On note cet espace  $\mathbf{P}_2$ . Comme toutes les droites ont deux vecteurs unitaires cet espace ressemble beaucoup à la sphère. Toutefois, il est difficile de se le représenter dans  $\mathbf{R}^3$  contrairement à la sphère.

Pour cela, considérons la sphère unité  $S^2$  de  $\mathbf{R}^3$ . Toute droite passant par l'origine la recoupe en deux points  $M$  et  $M'$ . Représenter l'espace projectif  $\mathbf{P}_2$  consiste à ne garder qu'un seul de ces deux points.

De cette manière, on identifie deux points diamétralement opposés sur la sphère : **on réalise une identification antipodale.**

Afin de mieux cerner le problème, il est commode de découper sur la sphère unité  $S^2$  une bande équatoriale de largeur  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  strictement positif et pouvant être choisi aussi petit que l'on veut) . Les deux calottes, situées de part et d'autre de cette bande, se correspondent dans la symétrie centrale par rapport à l'origine. On peut n'en conserver qu'une, disons celle contenant le pôle nord. Les points de la bande se correspondent également deux par deux, partageons la en deux, en la sectionnant par un plan contenant l'axe vertical  $Oz$ . Une des deux demi-bandes peut alors être éliminée. En ce qui concerne l'autre, il suffit d'identifier les points diamétralement opposés des deux segments verticaux extrêmes.

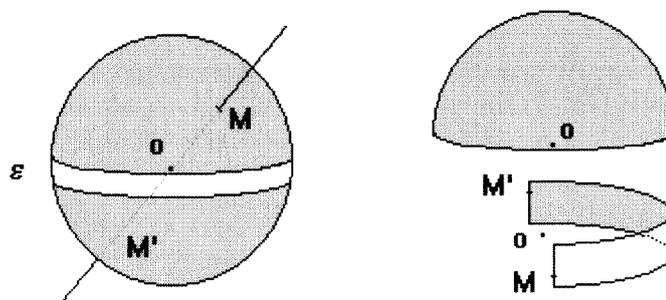


Figure 1 : la sphère  $S^2$  et l'identification antipodale.

De façon imagée, on recolle les deux extrémités de la demi-bande en lui faisant subir un demi-tour. Ce faisant on obtient un ruban de Möbius.

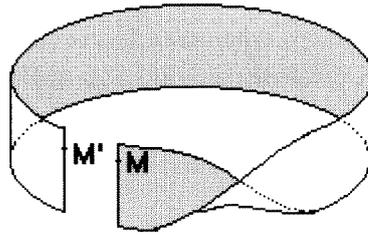


Figure 2 : ruban de Möbius.

Rappelons qu'un ruban de Möbius n'a qu'une seule face : c'est une **surface unilatère**. Son bord est d'un seul tenant et peut être déformé en un cercle. De plus cette surface **n'est pas orientable**.

**Pour terminer la représentation dans  $\mathbb{R}^3$  de l'espace projectif  $P_2$ , il ne reste plus qu'à coller bord à bord la calotte et le ruban de Möbius !**

En effet, les points qui se trouvent sur le bord inférieur de la demi-bande de la figure 1 s'identifient avec leurs symétriques par rapport à  $O$  se trouvant sur le bord de la calotte supérieure.

Quiconque tentera l'opération se rendra vite compte de son impossibilité matérielle. A moins d'autoriser la surface à se recouper elle même ! En d'autres termes, **il n'y a pas de représentation injective du plan projectif**.

Afin de mieux se familiariser avec l'identification antipodale, l'exemple suivant décrit une telle représentation.

Si l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, le ruban de Möbius se réduit à une courbe fermée à laquelle on a fait subir un demi-tour avant de la raccorder. A la limite, l'identification antipodale sur la sphère consiste à garder son hémisphère nord, et à identifier les points diamétralement opposés de l'équateur ! C'est ce que l'on va faire à présent sur un cuboctaèdre.

## 2. Identification antipodale sur le cuboctaèdre et représentation du plan projectif.

Rappelons qu'un cuboctaèdre s'obtient en traçant le quadrilatère des milieux sur chacune des faces carrées d'un cube puis, en lui enlevant les huit tétraèdres ainsi obtenus.

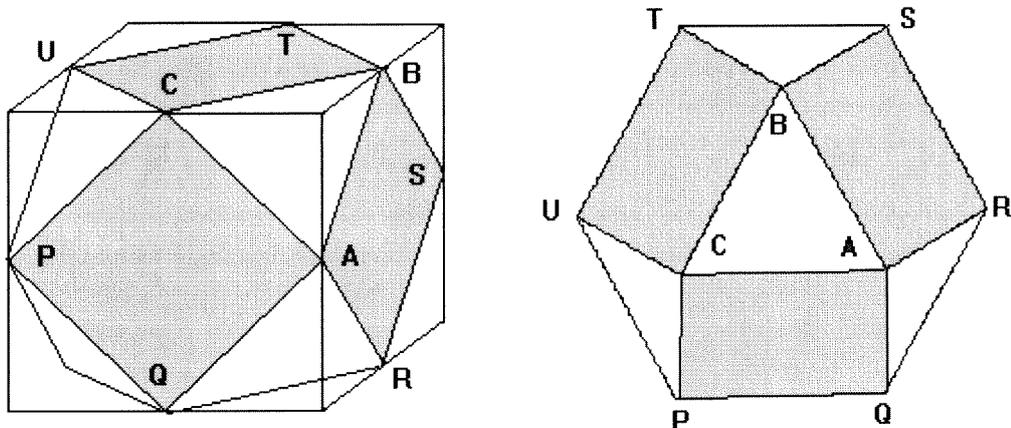


Figure 3 : cuboctaèdre.

Si l'on regarde un cuboctaèdre en se plaçant au-dessus d'une de ses faces triangulaires, son contour apparent est un hexagone régulier. On aperçoit ainsi tout son hémisphère nord, composé de quatre faces triangulaires et de trois faces carrées, ainsi que son équateur. L'identification antipodale sur le cuboctaèdre conduit à la fabrication d'un nouveau polyèdre appelé **heptaèdre de Rheinhardt** que l'on va décrire à présent.

Sur la figure suivante considérons les deux faces  $ABSR$  et  $AQPC$  et amenons le point  $S$  sur le point  $P$ . Pour réaliser cette opération, il est nécessaire d'autoriser ces deux carrés à se traverser. Ce faisant, la diagonale  $[AP]$  devient une ligne de points doubles.

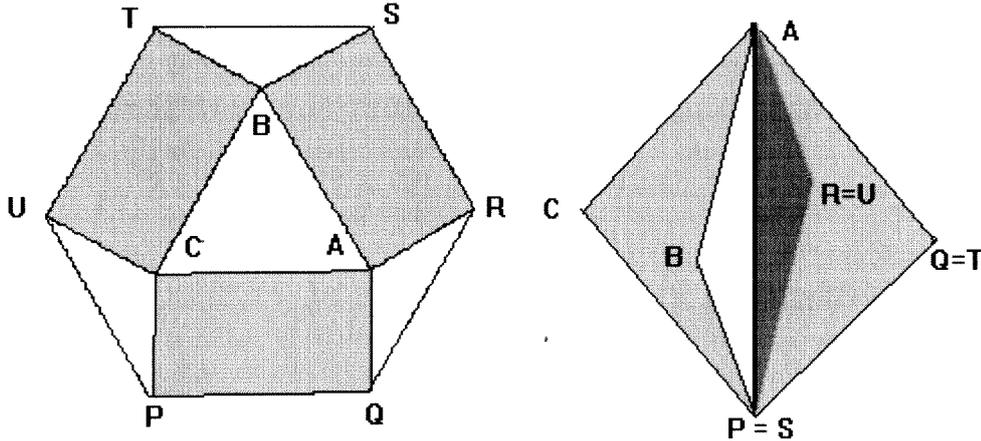


Figure 4 : identification antipodale.

De plus,  $U$  doit s'identifier avec  $R$  et  $T$  avec  $Q$ . La troisième face carrée  $BCUT$  du cuboctaèdre devient donc la face  $BCRQ$  du nouveau polyèdre.

On peut décrire complètement l'**heptaèdre de Rheinhardt** en partant de l'octaèdre formé par les six sommets  $A, B, C, R, Q$  et  $P$ . Ses sept faces se composent d'une part des trois faces carrées  $ABPR, ACPQ$  et  $BQRC$  (représentées de manière transparente sur le dessin suivant) qui matérialisent les plans diagonaux de l'octaèdre précédent et d'autre part des quatre faces triangulaires  $ABC, ARQ, BQP$  et  $CPR$  n'ayant deux à deux qu'un sommet en commun.

Observons que les trois plans diagonaux se coupent en un **point triple**  $O$  et que **les trois lignes de points doubles aboutissent à des sommets de l'heptaèdre**.

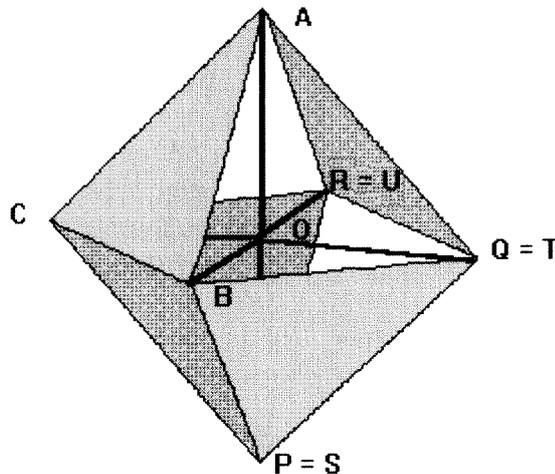


Figure 5 : heptaèdre de Rheinhardt.

**Remarque :** L'heptaèdre de Rheinhardt est une **représentation** du plan projectif. Cependant, on ne peut le qualifier de "surface". En effet, une **surface** doit admettre en tout point un voisinage homéomorphe à (continûment déformable en) un disque, ce qui n'est le cas en aucun point de la ligne de points doubles.

On peut à présent citer le résultat suivant (cf. par ex. [2]) :

**Théorème : le plan projectif est une surface compacte.**

De fait, il a été démontré que cette surface comporte nécessairement un **point triple**. Une telle surface est dit **immergée** dans  $\mathbb{R}^3$ , alors qu'une sphère, un tore sont des surfaces fermées n'ayant aucun point d'auto-intersection, on dit qu'elles sont **plongées** dans  $\mathbb{R}^3$ . De telles surfaces admettent en tout point un plan tangent.

La suite de l'article va présenter une telle surface. On dira encore, en s'autorisant l'abus de langage consistant à identifier une application et son image, qu'une telle surface est une **immersion** alors qu'une sphère ou un tore sont des **plongements**.

On dira d'une **immersion** qu'elle est **transverse** si la surface ne présente que des **lignes de points doubles** le long desquelles les nappes ne sont jamais tangentes entre elles et un nombre fini de **points triples** en lesquels les trois plans tangents aux trois nappes forment un trièdre.

### **3. Immersion polyédrique du plan projectif ayant une symétrie d'ordre trois : surface de Boy.**

#### **Historique :**

Lorsque David HILBERT dressa une liste de vingt-trois problèmes devant guider les recherches des mathématiciens pour les années à venir, il en confia un vingt-quatrième à son élève Werner BOY : **prouver l'impossibilité d'immerger le plan projectif dans l'espace à trois dimensions.**

En 1901, Werner BOY résolvait négativement le problème de HILBERT et présentait à son maître une surface qui porte depuis son nom. Déjà présente dans les pages de l'Ouvert n° 38 [3] sous sa forme différentiable, cette surface exerce, de part son esthétique, un attrait certain sur l'observateur qui la découvre la première fois. Le sculpteur Max Sauze eut l'intuition d'utiliser des ellipses pour réaliser un remarquable modèle.

Dans son ouvrage "Models of the real projective plane" [4], François Apéry retrace l'évolution des représentations du plan projectif et décrit une très belle construction de la surface de Boy par un bouquet d'ellipses. Le lecteur y trouvera également une série de magnifiques photos d'images réalisées sur ordinateur et qui ont inspiré une partie du présent travail.

La recherche d'une version polyédrique minimale (ayant le minimum de sommets, de faces et d'arêtes) de la surface de BOY a été menée par le Professeur Ulrich Brehm de l'Université de Berlin [5]. La simplicité de la surface obtenue ne doit pas faire oublier que

de nombreux essais préliminaires furent nécessaires pour y parvenir. Bernard Morin y en a apporté les dernières retouches.

Comme il a déjà été signalé précédemment, une telle surface comporte au moins un point triple ; on a en plus le résultat suivant :

**Théorème : Il n'existe aucune immersion polyédrique du plan projectif ayant moins de neuf sommets.**

Preuve : Le point triple appartient nécessairement à trois triangles déterminés par neuf sommets. Deux quelconques d'entre eux ne peuvent pas coïncider car sinon il se formerait une ligne de points doubles joignant le point triple à ce sommet. Comme dans le cas de l'heptaèdre de Rheinhardt, ce ne serait plus une surface.

La description suivante propose une immersion du plan projectif ayant exactement neuf sommets.

**Version polyédrique minimale de la surface de Boy :**

Dans  $\mathbf{R}^3$  identifié à  $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ , où  $\mathbf{C}$  est représenté par le plan  $xOy$ , soit  $S$  un point de l'axe  $Oz$  situé au-dessus du plan  $xOy$ .

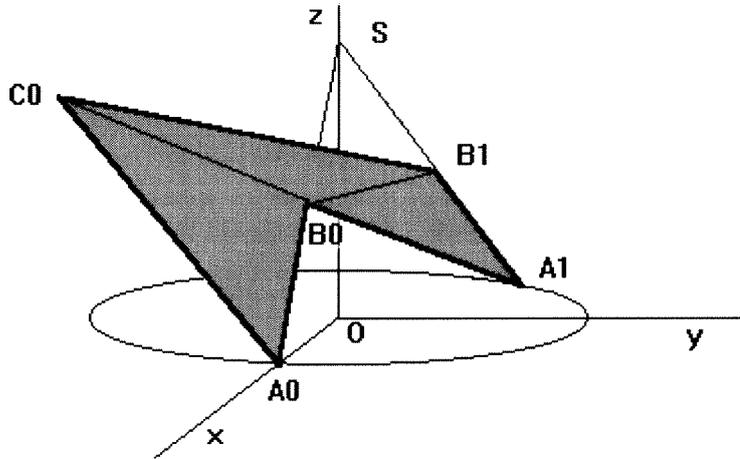


Figure 6 : le pentagone concave  $P_0$  et sa triangulation.

Considérons les points suivants :

$$A_0 = (1, 0), \quad A_1 = (j, 0) \quad \text{et} \quad A_2 = (j^2, 0) \quad \text{avec} \quad j = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$$

Soit  $B_0$  un point du segment  $[A_0S]$ ,  $B_0 \neq A_0$  et  $B_0 \neq S$ .

Soient  $B_1$  le point de la droite  $(A_1S)$  et  $B_2$  le point de la droite  $(A_2S)$  tels que :

$$\frac{A_0S}{B_0S} = \frac{A_1S}{B_1S} = \frac{A_2S}{B_2S}$$

Dans le plan  $A_0B_0B_1A_1$ , partagé en deux demi-plans par la droite  $(A_0S)$ , considérons celui qui ne contient pas le point  $A_1$ . Dans ce demi-plan choisissons un point  $C_0$  situé au-dessus de la droite  $(B_0B_1)$ . On obtient ainsi un **pentagone concave**  $A_0B_0B_1A_1C_0$  que l'on appelle  $P_0$ . En traçant les segments  $[B_0C_0]$  et  $[B_0B_1]$ , on fait apparaître une triangulation de  $P_0$  dont l'utilité se révélera par la suite.

On construit ensuite les points  $C_1$  et  $C_2$  en prenant les transformés de  $C_0$  par les rotations d'axes  $Oz$  et d'angles de  $120^\circ$  et  $240^\circ$ .

La **surface de Boy** s'obtient alors de la manière suivante :

**Sommets :**  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2$ .

Les points  $A_i, B_i, C_i, i = 1 \text{ à } 2$ , sont les transformés des points  $A_0, B_0, C_0$  par les rotations d'axe  $Oz$  et d'angles de mesures respectives  $120^\circ$  et  $240^\circ$ .

**Faces pentagonales :**  $P_0 = A_0B_0A_1B_1C_0, P_1 = A_1B_1A_2B_2C_1, P_2 = A_2B_2A_0B_0C_2$ .  
**Faces triangulaires :**  $Q_0 = C_0B_1A_2, Q_1 = C_1B_2A_0, Q_2 = C_2B_0A_1$ ,  
 $R_0 = C_0A_0A_2, R_1 = C_1A_1A_0, R_2 = C_2A_2A_1$ ,  
 $\Pi = A_0A_1A_2$ .

Elle a 9 sommets, 10 faces et 18 arêtes. Les faces  $Q_0, Q_1$  et  $Q_2$  se coupent en un même point triple. Sur la figure ci-dessous apparaît également la ligne d'intersection, en forme d'hélice tripale, formée des points doubles de la surface.

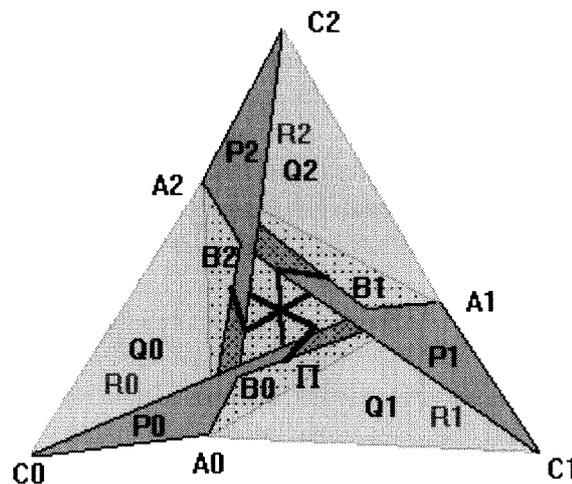


Figure 7 : surface de Boy vue de dessus, sa ligne d'auto-intersection et son point triple.

On remarquera également que la réunion des trois pentagones concaves  $P_0, P_1$  et  $P_2$  forme un ruban de Möbius qui admet une triangulation en neuf triangles comme le suggère la figure 6. De plus, la réunion de tous les autres triangles est homéomorphe à un disque. De cette manière, **on a donc soudé bord à bord un ruban de Möbius et un disque**. C'est l'objectif que l'on s'était proposé.

**Remarques :**

Il existe, pour tout polyèdre, une constante reliant son nombre de sommets  $S$ , son nombre d'arêtes  $A$  et son nombre de faces  $F$ , valable lorsque chaque face est homéomorphe à un disque : c'est la **caractéristique d'Euler** définie par  $\chi = S - A + F$ .

Dans le cas présent,  $\chi = 9 - 18 + 10 = 1$ . C'est le cas pour toute surface polyédrique représentant le plan projectif  $P_2$ .

Le même calcul, effectué sur des surfaces polyédriques homéomorphes à la sphère  $S^2$  (cube, tétraèdre, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre...) fera apparaître que dans tous ces cas  $\chi$  prend comme valeur 2. De même, une surface polyédrique homéomorphe à un tore possède une caractéristique d'Euler égale à 0.

**4. Construction d'une surface de Boy.**

Dans le modèle que l'on se propose de construire, la pyramide  $SA_0A_1A_2$  est régulière. De plus le triangle  $A_0B_1C_0$  est équilatéral et le quadrilatère  $A_1B_1C_0B_0$  est un parallélogramme.

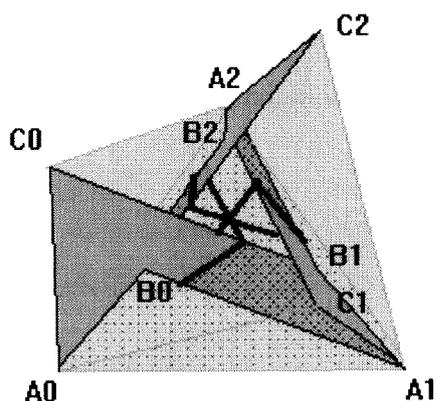


Figure 8 : surface de Boy d'Ulrich Brehm.

Voici les coordonnées de ses neuf sommets :

$A_0(1, 0, 0)$	$A_1(-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$	$A_2(-1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$
$B_0(1/2, 0, \sqrt{2}/2)$	$B_1(-1/4, \sqrt{3}/4, \sqrt{2}/2)$	$B_2(-1/4, -\sqrt{3}/4, \sqrt{2}/2)$
$C_0(3/4, -\sqrt{3}/4, \sqrt{2})$	$C_1(0, \sqrt{3}/2, \sqrt{2})$	$C_2(-3/4, -\sqrt{3}/4, \sqrt{2})$

On obtient le patron suivant :

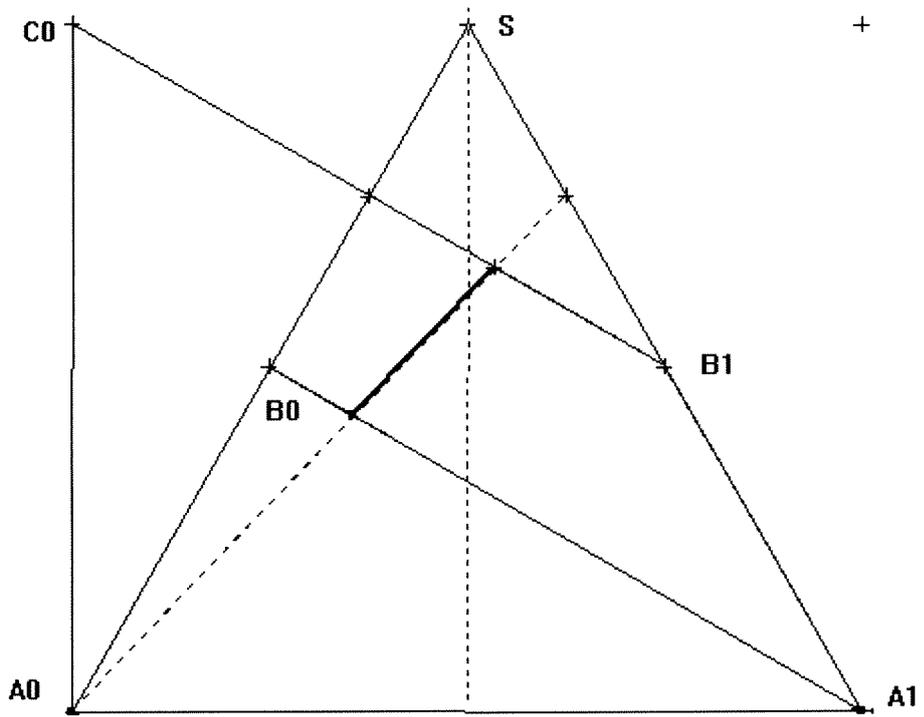


Figure 9 : le pentagone  $P_0$ .

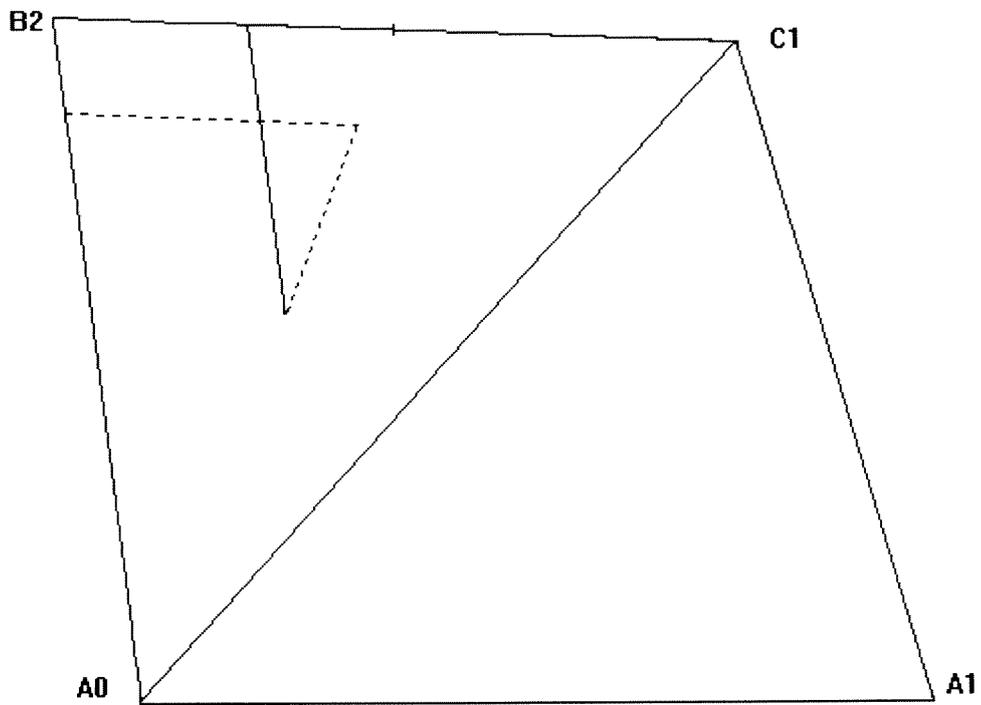


Figure 10 : les faces  $Q_1$  et  $R_1$ .

Chacune des faces précédentes est à découper trois fois, et l'on rajoutera un triangle équilatéral  $A_0A_1A_2$  qui constituera la dernière face  $\Pi$ .

**Consignes de montage :**

Après avoir découpé séparément les différentes faces et après avoir préparé la ligne d'auto-intersection comme indiqué sur les patrons précédents (le pointillé du triangle  $Q_1$  indique une découpe), on assemblera dans l'ordre :

- les trois faces dorsales  $Q_0$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  (on verra ainsi apparaître le point triple),
- les faces  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  en les faisant passer par la fente prévue à cet usage sur les faces précédentes,
- les faces ventrales  $R_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ ,
- et pour terminer, la face du fond  $\Pi$  dans laquelle on peut, si on le désire, aménager une ouverture circulaire permettant de voir le point triple par en-dessous.

Il ne reste plus qu'à coller, à l'aide d'un ruban adhésif, les faces les unes aux autres le long de chaque arête.

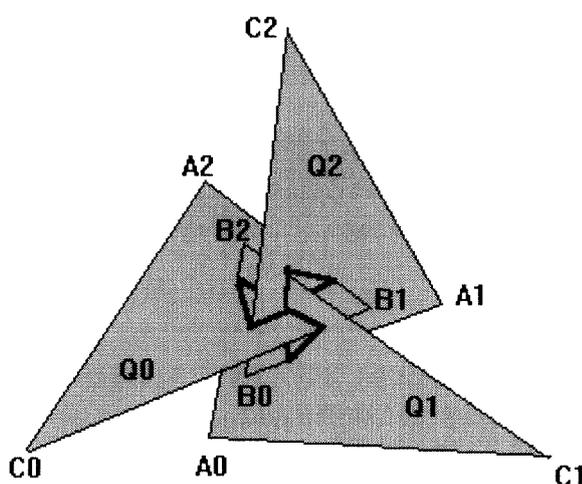


Figure 11 : les trois faces dorsales  $Q_0$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  et le point triple.

Si l'on utilise des feuilles de dessin ordinaires, le modèle prendra une rigidité suffisante. On observera en particulier, le passage vers le point triple, en passant sous les aisselles  $B_0$ ,  $B_1$  et  $B_2$ .

Il est possible, d'obtenir une réalisation de meilleure qualité, et permettant surtout de percevoir le modèle en toute transparence en procédant comme suit :

On trouve en papeterie, des feuilles dont l'une des faces est plastifiée et en couleur. En collant deux feuilles l'une contre l'autre, à l'aide d'une colle de montage définitif, on va pouvoir y découper, à l'aide d'un cutter et d'un réglet, les faces pentagonales  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ .

Pour les autres faces, il est possible d'utiliser des feuilles de rhodoïd de 0,5 mm d'épaisseur (on peut en trouver dans un magasin de modèles réduits). La ligne d'auto-intersection pourra y être dessinée à l'aide d'un marqueur permanent.

**Version pointue de la surface de Boy.**

Dans cette version, dont l'intérêt est, d'une part de permettre une généralisation ultérieure, et, d'autre part de mieux comprendre le retournement décrit dans le paragraphe suivant, on considère le point d'intersection  $K$  des trois faces ventrales  $R_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

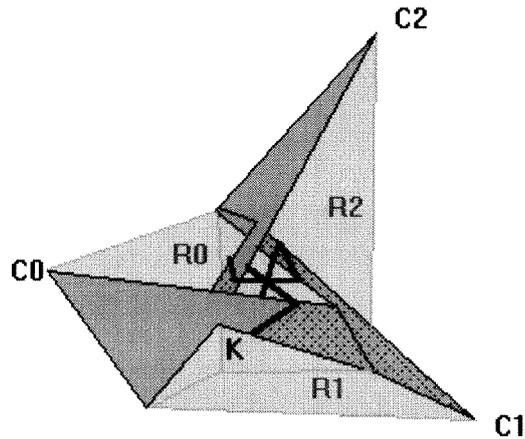


Figure 12 : version pointue, le point d'intersection des plans ventraux.

### 5. La surface de Boy considérée comme modèle central du retournement de la sphère.

Le résultat étonnant de Stephen Smale prouvant qu'il était possible de retourner une sphère fut facilement accepté par la communauté mathématique. Cependant, Smale n'a jamais montré effectivement comment cela était possible.

Il fallut attendre respectivement 1961 et 1966, pour que Arnold Shapiro puis Anthony Phillips, imaginent, chacun de leur côté, une transformation permettant effectivement de réaliser le retournement.

L'idée clé commune à ces deux scénarios consiste à déformer la sphère de façon à revêtir la surface de Boy avec deux feuillets, puis **d'échanger les deux feuillets au travers de la surface de Boy**.

Dans cette opération, deux points diamétralement opposés se croisent. L'opération inverse de celle ayant amené la sphère à revêtir la surface de Boy permet alors d'aboutir à une sphère dont les deux faces interne et externe ont été échangées. La **surface de Boy** intervient ainsi comme **étape centrale** de la déformation.

La manipulation suivante permet de mieux comprendre cette brève esquisse.

#### **Manipulation : revêtement à deux feuillets d'un ruban de Möbius.**

La figure 2 proposait de fabriquer un ruban de Möbius. En prenant, non plus une, mais trois bandes de papier de dessin superposées et en les recollant comme précédemment après torsion d'un demi-tour, on verra apparaître **un ruban de Möbius pris en sandwich entre deux feuillets**. A titre indicatif, une longueur de 50 cm et une largeur de 4 cm seront du plus bel effet.

Un peu de couleur rehaussera le tout ! On coloriera respectivement en rouge et bleu les deux faces de deux des trois bandes, puis on mettra en contact les faces rouges avec les faces blanches de la troisième bande avant recollement.

De cette façon, le ruban de Möbius blanc sera entièrement entouré de rouge alors que, si les trois bandes sont bien serrées l'une contre l'autre, on n'y verra que du bleu !

A l'envers de la revue Le Plot n°76 d'automne 96 on trouve un très beau dessin montrant ce revêtement.

Marquons, sur chacun des deux feuillet, deux points A et A' pris face à face de part et d'autre du ruban de Möbius puis, défaisons le tout. On obtiendra ainsi une bande dont l'une des faces est rouge et l'autre bleue entrelacée avec le ruban de Möbius. On observera alors que **les deux points A et A' sont diamétralement opposés sur la bande bilatère**. D'autre part on pourra constater ouvrant l'un des raccords que **celle-ci a subi une torsion de deux tours !**

Les figures suivantes illustrent comment passer, d'une boucle simple à une boucle tordue deux fois, en autorisant la nappe à se traverser.

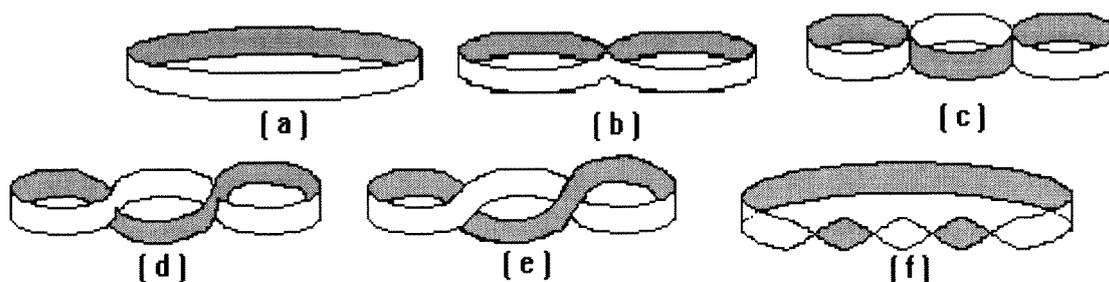


Figure13 : croisement (a), (b) et (c) d'un ruban, puis décroisement par le bas et le haut (d) et (e) permettant d'aboutir à un ruban tordu deux fois ( f).

La figure [ f ] représente l'état du ruban bicolore à la fin du paragraphe précédent. En parcourant à rebours cette séquence de dessins on aboutit à une bande cylindrique dont la face extérieure est rouge.

Le même chemin, parcouru en sens direct, transforme une ceinture d'extérieur rouge à un revêtement à deux feuillet dont l'apparence extérieure est bleue !

Comme la matière utilisée pour confectionner tous nos modèles possède la propriété mirifique de pouvoir se traverser, en échangeant les deux feuillet au travers du ruban de Möbius ce dernier se retrouve d'un coup entouré de bleu alors qu'un observateur extérieur n'y verra plus que du rouge !

Un scénario semblable à celui décrit précédemment permet alors d'obtenir une ceinture d'extérieur bleu !

Il ne reste plus alors qu'à faire le lien avec la figure 1, pour concevoir que toute la sphère puisse être déformée et venir revêtir la **surface de Boy**. En échangeant les deux feuillet de la sphère, au travers de la surface de Boy, ses deux faces interne et externe

s'intervertissent. La transformation inverse aboutit alors à la sphère retournée. C'est ainsi que la surface de Boy sert comme premier **modèle central** d'une transformation aboutissant au retournement de la sphère.

Pour en savoir plus sur la surface de Boy, on pourra également consulter les références [6] et [7] données dans la bibliographie.

Jouons le même jeu en version polyédrique ! Pour cela considérons un ruban composé de dix-huit triangles équilatéraux et procédons à l'identification antipodale en amenant l'un sur l'autre les triangles dont les numéros appartiennent à la même classe modulo neuf : 1 sur 10, 2 sur 11, ... , 9 sur 18.

La manipulation n'est pas tout à fait évidente, mais avec un peu de persévérance, on obtient un revêtement à deux feuillets d'un ruban de Möbius.

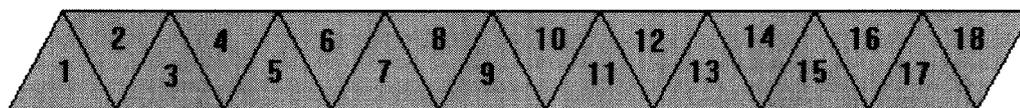


Figure 14 : bande permettant d'obtenir un revêtement à deux feuillets d'un ruban de Möbius par juxtaposition antipodale.

Pour terminer cette première partie, il ne reste plus qu'à présenter un polyèdre en forme de tonneau, sur lequel on voit osciller, autour de l'équateur, une bande de dix-huit triangles équilatéraux et qui, d'après un scénario analogue au précédent, peut être déformé, pour venir revêtir deux fois la surface de Boy (version pointue de la figure 12). **Après échange des deux feuillets, le chemin en sens inverse aboutit au tonneau retourné dont l'extérieur est bleu !**

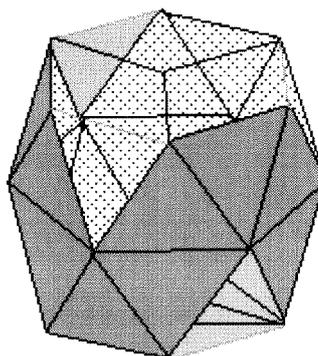


Figure 15 : polyèdre en forme de tonneau pouvant être retourné à l'aide de la surface de Boy.

Il est à noter que le pôle nord et le pôle sud de ce tonneau, viennent se placer, dans le revêtement à deux feuillets de la surface de Boy, de part et d'autre du point K de la figure 12. Au moment du passage au travers de la surface de Boy, chaque point croise son point antipodal. De plus, à ce moment précis, les deux feuillets sont en contact direct l'un avec l'autre et ne se coupent donc pas transversalement.

Même si l'idée précédente est intéressante en soi, elle se heurte aux limites de l'imagination et ne permet pas de suivre, de proche en proche, la déformation.

La suite de cet article retracera le chemin qui a permis de construire un **modèle central** d'une déformation permettant de retourner le **cuboctaèdre** et en indiquera les étapes essentielles.

**Bibliographie :**

- [1] Pour la Science n° 15 , janvier 1979.
- [2] Daniel Lehmann, Carlos Sacré, Géométrie et topologie des surfaces, PUF.
- [3] L'Ouvert n° 38 , mars 1985.
- [4] François Apéry, Models of the real projective plane, Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [5] Ulrich Brehm Minimal polyedral versions of the Boy surface, Preprint Reihe Mathematik, Technische Universität Berlin, n° 189.
- [6] Jean Pierre Petit, Le topologicon, Le géométricon, Belin.
- [7] François Apéry, La surface de Boy, thèse de troisième cycle, Irma Strasbourg, 1984. Le retournement du cuboctaèdre, 1994/003.

---

Dans ce calendrier lunaire, en vigueur dans toutes les cités grecques, l'année avait 12 mois et totalisait 354 jours :

Hecatombéon .....	30 j	}	Total : 354 jours
Metagitnion .....	29 j		
Boédromion .....	30 j		
Pyanepsion .....	30 j		
Mœmactérion .....	29 j		
Posidéon .....	29 j		
Gaméliion .....	30 j		
Anthestérion .....	29 j		
Elaphébolion .....	30 j		
Munychion .....	29 j		
Thagéliion .....	30 j		
Scirophorion .....	29 j		