LE VOLUME DES DOMES DANS LES MATHEMATIQUES ARABES,

par Yvonne Dold-Samplonius, Université de Heidelberg.

1 Introduction.

Le mot arabe désignant un dôme ou une coupole est *qubba*, pluriel *qibab* ou *qubab*. Par extension *qubba* signifie aussi : édifice construit en voûte, mémorial en dôme ou koubba (monument élevé sur la tombe d'un marabout). A l'époque pré-islamique la *qubba* était une petite tente de cuir en dôme, portée par un chameau, dans laquelle certaines tribus gardaient des pierres sacrées. Ainsi le dôme situé en face du mihrâb[1] - par exemple dans les Grandes Mosquées de Damas, Qayrawan, le Caire et Cordoue - pourrait avoir une signification particulière. A partir de la fin du 9ème siècle et au 10ème siècle apparaît la construction de structures commémoratives sur certains lieux d'inhumation, notamment ceux des saints Shiʿi . A travers le monde islamique, tous les noms spéciaux pour les constructions sépulcrales , qui varient avec le pays, la langue aussi bien que la personne enterrée, sont regroupés sous le nom générique de *qubba*.[2]

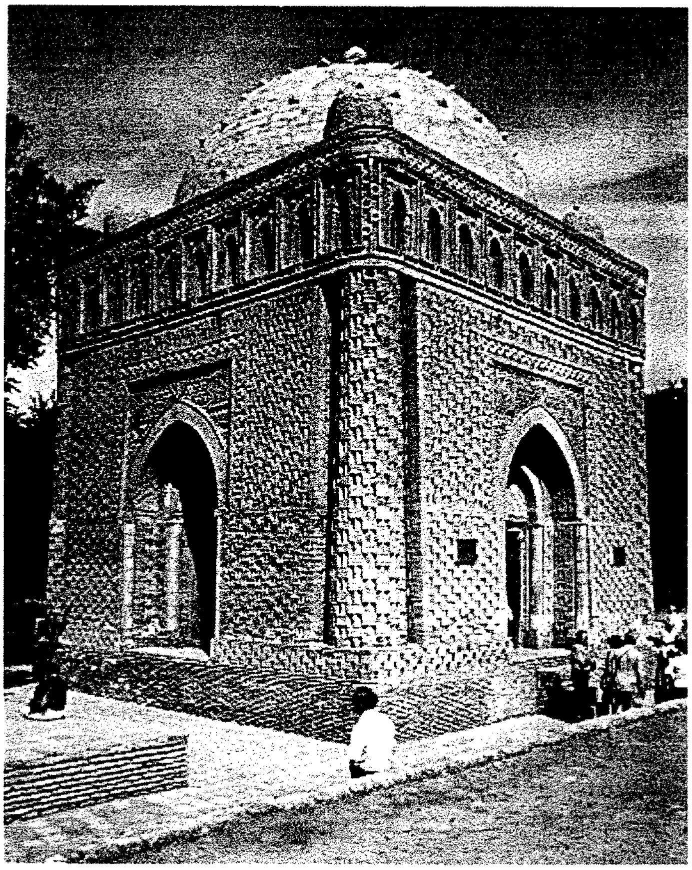


Figure 1 : La Qubba des Samanides à Bukhara .

Il y a fondamentalement deux types de monuments : le circulaire, en forme de tour, et le carré ou polygonal, souvent plus grandiose. Tous deux peuvent être couverts par un dôme

[1] Niche pratiquée dans la muraille d'une mosquée et orientée vers La Mecque.
[2] cf. Diez [1838/1986] et Ettinghausen [1976] p.65 et 68.

circulaire ou un toit conique ou pyramidal. La forme originale , devenue plus tard stéréotype, est une construction carrée couverte par un dôme. Le plus ancien exemple conservé est la *Qubba des Samanides* à Bukhara (figure 1), construite autour de 907 mais certainement avant 943. Il consiste en une structure carrée avec un grand dôme central et quatre petits dômes en coin élevés sur une galerie.
Dès la période Seljuq (11ème siècle) la construction de dômes avec une double coque fut essayée , avec un aboutissement réussi à l'époque Timuride (première moitié du 15ème siècle). L'objectif d'un tambour monté d'un dôme à double coque est de donner un aspect de tour à l'extérieur. Un exemple frappant est la *Qubba de Tamerlan et Ulugh Beg* à Samarkand (figure 2).
Aussi longtemps que les dômes étaient constitués de cônes ou de portions de sphères, leurs mesures étaient automatiquement rattachées à la mesure des solides et la qubba *en tant que telle* n'avait pas à être mentionnée. Il n'est toutefois pas étonnant que seul Ghiyath-al-Din al-Kashi explique la mesure de qubbas complexes dans son livre « Sur les mesures », une des cinq parties de sa *Clé de l'Arithmétique*. Dans cet article j'étudie d'abord le calcul de la qubba hémisphérique et ensuite la partie[3] dans laquelle al-Kashi calcule le volume d'un type de qubba plus complexe. Dans les deux cas les résultats sont vérifiés par des méthodes modernes.

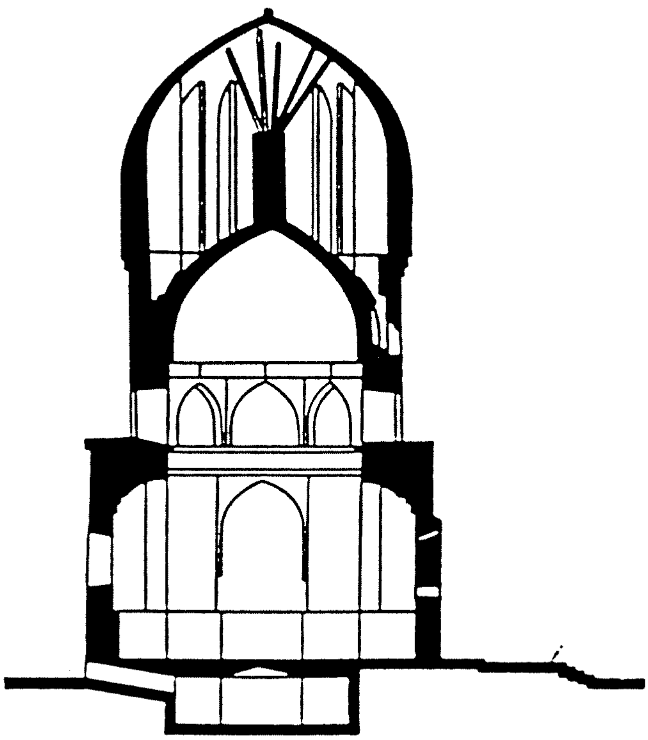


Figure 2 :La Qubba de Tamerlan avec un dôme à deux coques (Pougatchenkova).

2 Mathématiques pratiques.

Sous le règne du calife al-Ma'mun (813-33) le mathématicien et astronome Abu Ja^{c}far Muh. b. Musa al-Khwarizmi[4] écrivit à Bagdad sa célèbre *Algèbre* , un travail de mathématiques

[3] Fols.83r/83v ;Nader[1977] pp.375-380.
[4] cf. Toomer dans DSB VII, pp 358-365.

pratiques élémentaires. L'intention déclarée par l'auteur est de proposer « ce qui est le plus utile et le plus facile en arithmétique, comme on peut constamment l'éprouver dans des cas d'héritage , de legs , de partage, de décision de justice, de commerce, et dans toutes les transactions avec quelqu'un, ou dans l'arpentage, le creusement de canaux, des calculs géométriques, et d'autres objets de toutes sortes et espèces en rapport »[5]. Il apparaît qu'on avait besoin de conseils le plus souvent pour résoudre les problèmes surgissant à la suite de legs ; ainsi cette partie, la troisième et la dernière du traité , est de loin la plus longue. Ces problèmes impliquent seulement l'arithmétique ou des équations linéaires simples mais exigent une connaissance considérable des lois islamiques sur l'héritage. La seconde partie du traité d'al-Khwarizmi concerne les mesures pratiques[6]. Il donne des règles pour trouver l'aire de différentes figures planes , incluant le cercle, et pour déterminer le volume de nombreux solides, incluant les cônes, les piliers de base circulaire, les pyramides, et les pyramides tronquées. Cette partie est réellement en rapport avec l'application pratique de la mesure, comme le montrent déjà les premières lignes : « On sait que le sens de l'expression *un sur un* est une mesure : à savoir une coudée [*dhira*] (en longueur) par une coudée (en largeur) »[7].
Plus de 600 ans plus tard, en 1427 à Samarkand, durant le règne de Ulugh Beg (1394-1449), l'astronome et mathématicien timuride, Ghiyath al-Din Jamshid al-Kashi[8] compléta sa *Clé de l'Arithmétique.* Le titre arabe « Miftah al-hisab » peut aussi être lu comme « Miftah al-hussab », *Clé des calculateurs* , les deux versions indiquant la perspective pratique du traité : l'arithmétique est vue comme la clé pour résoudre tous les problèmes qui peuvent être ramenés à des calculs. Dans l'introduction al-Kashi explique : « j'ai rédigé ce livre et rassemblé dedans tout ce qui est utile pour celui qui calcule soigneusement, évitant la longueur ennuyeuse ou la brièveté disgracieuse ». Ce travail est une sorte d'encyclopédie de mathématiques élémentaires, mais pas trop élémentaires. Les problèmes d'héritage n'interviennent pas ici. Le travail est réparti en cinq livres , le plus long étant le livre IV *Sur les mesures.* Des règles y sont données pour mesurer des aires de toutes sortes, incluant des figures planes comme les surfaces en anneaux ou en étoiles aussi bien que les aires de surfaces courbées , et pour trouver des volumes de solides : cylindre, cône, cône tronqué, intersection de cônes, sphère, etc. jusqu'à des constructions réelles. Son dernier chapitre, numéro neuf, *Mesures de structures et constructions* est constitué en fait de mathématiques pratiques, comme al-Kashi l'explique : « Les spécialistes se sont exprimés simplement à ce sujet (c-à-d la mesure) pour l'arche et la voûte, et le reste n'était pas considéré comme nécessaire. Mais je présente cela parmi les nécessités ensemble avec le reste, parce que c'est plus souvent requis dans la mesure des constructions que dans le reste ». Le chapitre neuf est divisé en trois sections :

1. Mesure de l'arche et de la voûte .
2. Mesure de la qubba.
3. Mesure de muqarnas.[9]

Al-Kashi distingue les catégories suivantes de qubba : « Elles apparaissent sous la forme d'hémisphère creux , sous la forme d'une partie de sphère creuse , sous la forme d'un cône polygonal , ou sous la forme produite en imaginant une rotation d'une coupe d'arche , c-à-d d'une arche comme mentionnée en section 1, autour de sa hauteur , qui est le segment joignant sa limite la plus haute avec le milieu du segment entre ses bases ».

---

[5] Rosen [1831] trad. ,p.3.
[6] Rosen l.c. trad., pp.70-86.
[7] Dans la traduction de Gandz ce passage est : « On sait que le sens de l'expression *un par un* est l'aire, et sa signification est : une coudée par une coudée.
[8] cf Dold-Samplonius [1992/3]
[9] cf Dold-Samplonius l.c.

Al-Kashi indique seulement comment calculer la dernière catégorie de qubba. Le calcul des deux premières catégories , remarque-t-il , avait été signalé plus tôt dans le livre IV, en relation avec la mesure de la sphère et de ses sections, c-à-d les surfaces dans le chapitre 6, sections 4 et 5, et leurs volumes dans le chapitre 7, section 5 et 6. La catégorie 3 a été mentionnée en lien avec la mesure du cône, c-à-d dans le chapitre 6, section 3 et chapitre 7, section 2 pour la surface et le volume respectivement.
La première mention de la mesure de la qubba est trouvé dans un livre d'Abu'l-Wafa al-Buzjani,[10] écrit entre 961 et 976. Ce travail sur l'arithmétique pratique, *Livre sur ce qui est nécessaire dans la science de l'arithmétique pour les scribes et pour les hommes d'affaires*[11] est constitué de sept parts. Les trois premières parties, sont purement mathématiques, c-à-d sur les ratios, les multiplications, les divisions, et les mesures. Les quatre autres parties contiennent les solutions de problèmes pratiques, c-à-d taxes, échanges et partages relatifs à la récolte, problèmes concernant le paiement du travail, et l'estimation de constructions.[12] Dans l'introduction à la troisième partie, il est annoncé que le chapitre 6, *Sur la mesure des solides* , sera sur la mesure de « ...autres choses tombant sous la formes de sphères, comme les cylindres, les cônes et les **qubbas**. » Les solides considérés par Abu'l-Wafa dans le chapitre 6 cité sont le cube, le cuboïde, le prisme, le cylindre, le cône, le tronc de cône , la sphère, aussi bien que les sections sphériques. La qubba n'est mentionnée nulle part. Bien qu'un cône ou les sections d'une sphère incluent toutes les qubbas existant à l'époque d' Abu'l-Wafa (voir ci-dessus).
Depuis, le calcul du volume et des aires de qubbas forme un chapitre courant de beaucoup de livres d'arithmétiques pratiques. A présent il semble que seules les qubbas de forme hémisphèrique creuse ont été considérées, comme c'est le cas dans le traité *L'indispensable pour les calculateurs* (MS. Ayasofya Kutuphanesi 2728 fol. 26r-125v) par Ahmad b. Thabat (d 1234).[13] Le type complexe de qubba calculé par al-Kashi était déjà considéré à cette époque mais n'atteindra son plein développement que beaucoup plus tard.

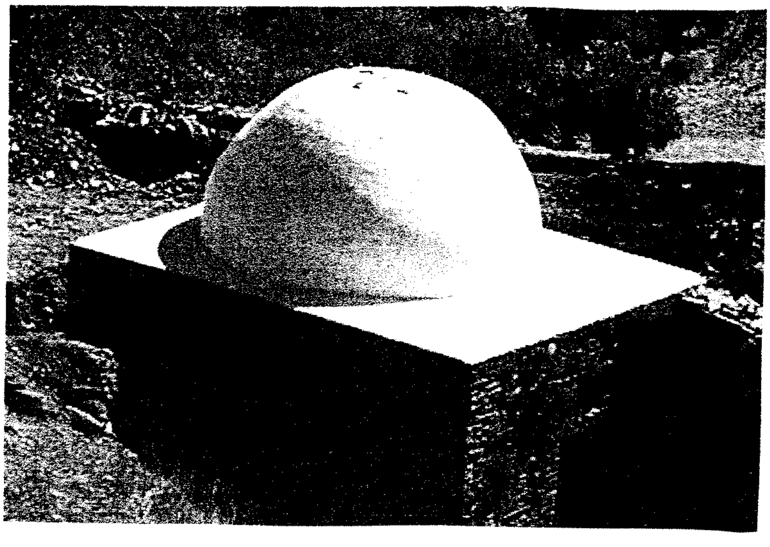


Figure 3 : Qubba du 11ième siècle , à Monsaras (Portugal), christianisée au 14ième siècle.

[10] cf Youschkevitch in DSB I, pp 39-43.
[11] Edité par Saidan [1971], basé sur Leiden MS.Or.103 et sur Caire MS. Riyada 42 M.
[12] cf Saidan [1974] pp. 369-375.
[13] Je remercie Dr Ulrich Rebstock [Tübingen] pour avoir fourni les informations et les photocopies d'extraits aussi bien du traité de Ahmad b. Thabat que des commentaires de ibn al-Hanbali cf Rebstock pp.132-133.

3 Mesure d'une Qubba hémisphérique.

Une Qubba hémisphérique (figure 3) est supposée se composer d'une coque solide entre deux hémisphères concentriques. En pratique (figure 2) les surfaces intérieures et extérieures de la coque ne sont jamais réellement parallèles , parce que dans la partie plus basse , jusqu'à un angle de 61 degrés, il y a la pression et il y a le tirage dans la partie supérieure.[14] Quand les diamètres intérieur et extérieur de l'hémisphère de qubba sont connus, son volume et les aires des surfaces intérieures et extérieures peuvent être calculées comme suit : on sait comment calculer l'aire d'une sphère de diamètre égal au diamètre extérieur. La moitié de cette valeur est la surface extérieure de la qubba. De manière analogue , la surface intérieure peut être calculée.
Pour calculer le volume de la qubba, on calcule les volumes des sphères intérieure et extérieure et on prend chaque fois la moitié. La différence entre les deux nombres est le volume de la qubba.
Les formules de calcul sont : Aire de la sphère = $(2r)^2\pi$, et
Volume de la sphère = Aire de la sphère $\times\frac{r}{3}$, où 2r est le diamètre.

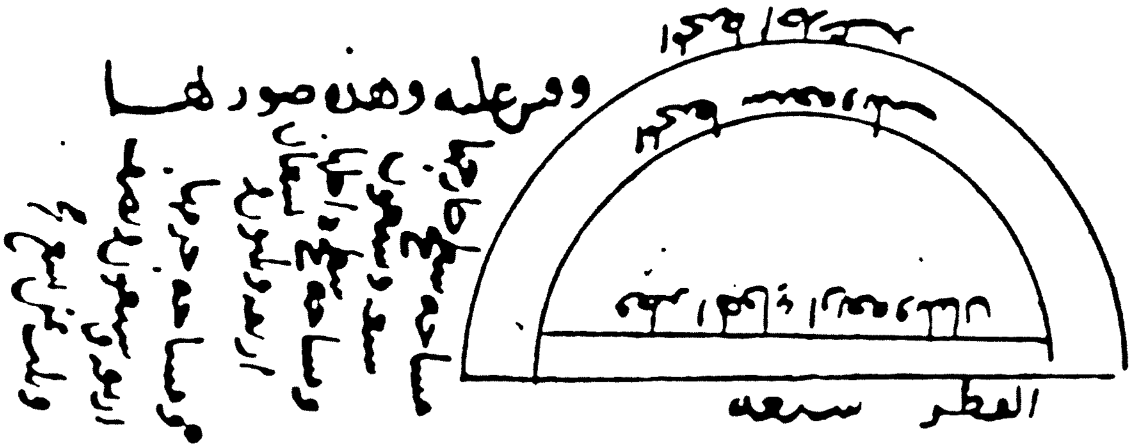


Figure 4 : Figure du calcul de la qubba hémisphérique.[15] Les valeurs des deux diamètres sont précisées sur chaque diamètre et les calculs du volume et de l'aire sont écrits à gauche.

Dans le traité mentionné ci-dessus par Ahmad b.Thabat un exemple est donné (figure 4), dans lequel le diamètre extérieur égale sept et le diamètre intérieur égale quatre et deux tiers , $(2r)_{\text{extérieur}} = 7$; $(2r)_{\text{intérieur}} = 4\frac{2}{3}$. π est exprimé comme d'habitude : écarte un septième et la moitié d'un septième et multiplie par quatre : $\pi = (1-\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{7})\times 4 = \frac{11}{14}\times 4 = 3\frac{1}{7}$.
Avec ces valeurs les aires des surfaces et le volume de la qubba sont calculés ainsi :

[14] L'information a été communiqué aimablement par le professeur Erich Rossmann, architecte à Karlsruhe.
[15] Fol.116v.

Aire de la sphère extérieure $= 7^2 \times \frac{11}{14} \times 4 = 154 \Rightarrow$ Aire de la qubba extérieure $= \frac{154}{2} = 77$

Aire de la sphère intérieure $= (4\frac{2}{3})^2 \times \frac{11}{14} \times 4 = 68\frac{4}{9} \Rightarrow$ Aire de la qubba intérieure $= 34\frac{2}{9}$.

Pour calculer le volume de la qubba, Ahmad b.Thabat procède comme suit, utilisant une formule incorrecte mais répandue :

Volume de la sphère $= (2r)^3 \times \frac{11}{14} \times \frac{11}{14}$;

Volume de la sphère extérieure $= 7^3 \times \frac{11}{14} \times \frac{11}{14} = 211\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}$ Volume sphère extérieure $= 105\frac{7}{8}$.

Volume de la sphère intérieure $= (4\frac{2}{3})^3 \times \frac{11}{14} \times \frac{11}{14} = 62 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \times 9}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ Volume de la sphère intérieure $= 31 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 9}$.

Volume de la qubba $= \frac{1}{2}$ Volume de la sphère extérieure $- \frac{1}{2}$ Volume de la sphère intérieure $=$

$74 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{9}$.

Quand on calcule le volume de qubba au moyen de formules correctes, en prenant pour π la valeur $3\frac{1}{7}$, on obtient :

$\frac{1}{2}$ Volume de la sphère extérieure $= \frac{1}{2}$ Aire de la sphère extérieure $\times \frac{r}{3} = 77 \times \frac{7}{2 \times 3} = 89\frac{5}{6}$

$\frac{1}{2}$ Volume de la sphère intérieure $= \frac{1}{2}$ Aire de la sphère intérieure $\times \frac{r}{3}$

$$= 34\frac{2}{9} \times \frac{4\frac{2}{3}}{2 \times 3} = 26 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{3 \times 6 \times 9}.$$

Volume de la qubba $= \frac{1}{2}$ Volume de la sphère intérieure $- \frac{1}{2}$ Volume de la sphère intérieure

$$= 63 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3 \times 9} + \frac{1}{9 \times 9}.$$

L'erreur relative est indépendante du diamètre. En comparant les résultats calculés avec la formule correcte et avec la formule extraite du traité d' Ahmad b. Thabat, on trouve la différence (D) :

$$D = (2r)^3 \times \frac{11}{14} \times \frac{11}{14} - \pi(2r)^2 \times \frac{r}{3} = (2r)^3 \left[(\frac{11}{14})^2 - \frac{\pi}{6} \right], \text{ avec } \pi = 3\frac{1}{7},$$

$$D = (2r)^3 (\frac{121}{196} - \frac{22}{42}) = (2r)^3 (0{,}6173 - 0{,}5238) = 0{,}0935\ (2r)^3.$$

cela signifie que le volume calculé est plus grand de 17,86% (!) par rapport au volume correct, indépendamment de la valeur du diamètre.

Al-Kashi n'effectue pas le calcul de la qubba hémisphérique, mais se réfère à son calcul de la sphère. Là, il utilise , comme attendu, les formules correctes pour l'aire et le volume, exprimant π comme rapport entre la circonférence et le diamètre du cercle. Ainsi Abu'l-Wafa donne les définitions ou formules correctes, mentionnant Archimède [16]. Bien qu' al-Karaji[17], qui vécut un siècle après Abu'l-Wafa, emploie dans *Ce qui suffit en arithmétique* exactement les mêmes formules que Ahmad b. Thabat[18]. Ici il explique aussi comment mesurer un hémisphère creux en soustrayant l'intérieur creux de l'hémisphère.

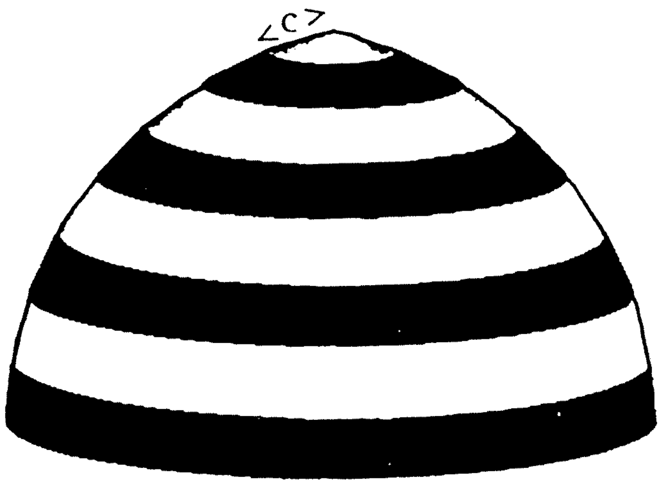


Figure 5 : Qubba, découpée en huit tranches (simulation , avec ordinateur , de Kindl).

4 Mesure de la Qubba par al-Kashi.

Comme mentionné ci-dessus , al-Kashi indique seulement comment calculer le type complexe de qubba, c'est-à-dire le dôme engendré par une rotation d'un arc, autour de son axe vertical. La méthode est la suivante (figure 5) : le dôme est divisé en tranches parallèles en traçant des cercles , centrés sur l'axe , sur sa surface. Ces cercles doivent être si proches que les arcs entre deux de ces cercles égalent les cordes correspondantes. Sept ou huit de ces cercles devraient normalement suffire, d'après al-Kashi. De cette façon, le dôme est coupé en un cône et plusieurs troncs de cône. On mesure d'abord tous les cercles sur la surface du dôme. La prochaine étape est la mesure de la distance du sommet du dôme au cercle le plus proche , c'est-à-dire la corde (figure 5 :c) égalant l'arc sur le cercle. En multipliant cette valeur avec la demi-circonférence du cercle le plus proche, on obtient l'aire de la surface du cône. Enfin on multiplie la demi-somme de chacun des deux cercles voisins par leur distance pour obtenir l'aire de la surface de tous les troncs de cône. La somme de ces produits vaut l'aire de la surface de la qubba.

Pour obtenir le volume de la qubba, qui est un solide creux, on mesure d'abord les volumes du cône et des troncs de cône, qui remplissent la surface extérieure de la coque , et on les ajoute. De cette somme, on soustrait ensuite la somme des volumes du cône et des troncs de

[16] Saidan [1971] l.c. p.268.

[17] cf. Rashed dans DSB VII, pp. 240-246.

[18] Hochheim [1877-80] part 2, p.28.

cône qui remplissent l'intérieur de la coque. La différence entre les deux sommes est le volume de la qubba, comme on l'a vu auparavant dans le cas de la qubba hémisphérique.
Dans la section *Mesure de l'arche et de la voûte*, al-Kashi décrit cinq méthodes pour tracer la coupe d'une arche, tous les cinq types étant basés sur des arcs de cercle. Pour illustrer la méthode générale il l'applique à une qubba du quatrième type, construite comme suit [19] (figure 6) :

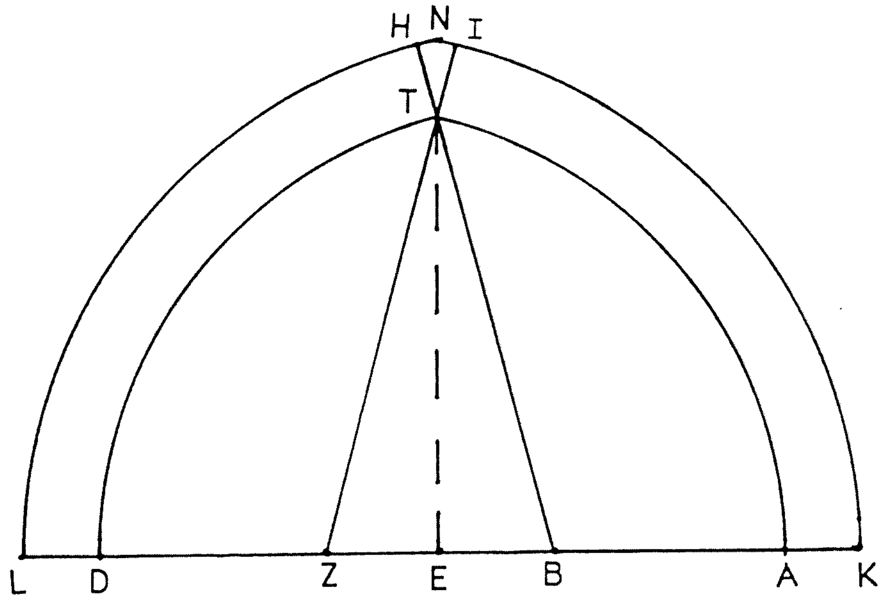


Figure 6 : Construction d'une arche du quatrième type.

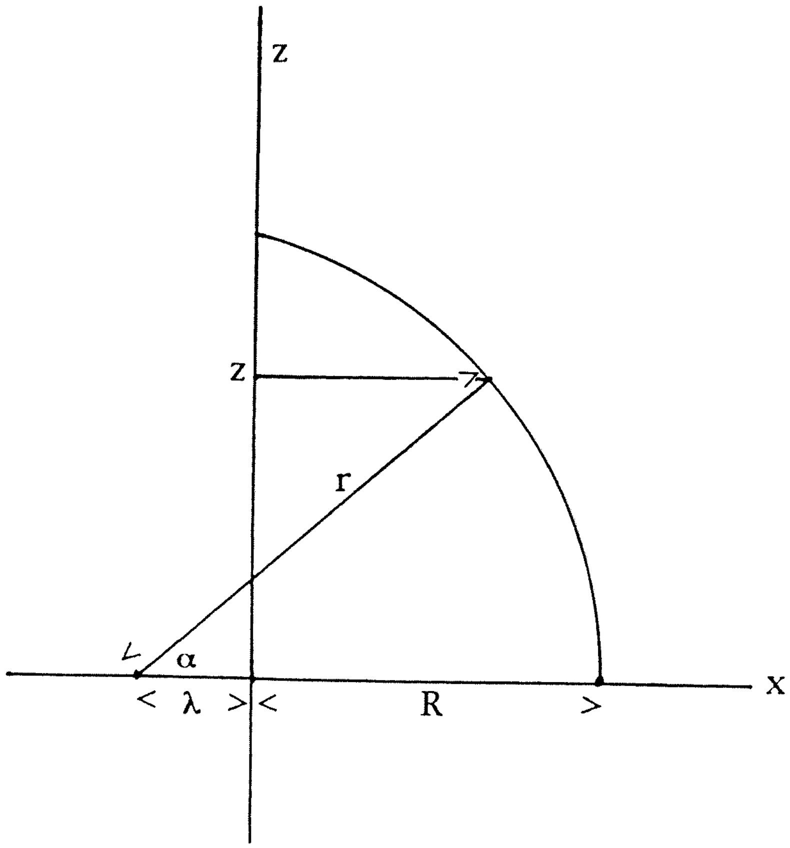
AD, c'est-à-dire l'écartement intérieur de l'arche, est divisé par les points B et Z en trois parties de longueurs égales. On trace l'arc DT de centre B et l'arc AT de centre Z. BT et ZT sont prolongés de l'épaisseur de l'arche , à partir de T, et donnent les points H et I. On trace alors l'arc LH de centre B et l'arc IK de centre Z. On construit en H et I les perpendiculaires à TH et TI, qui se coupent en N. Le complexe des trois sections TK, TN, et TL constitue alors la coupe de l'arche. Pour les calculs il suffit de dire que la coupe de l'arche consiste en deux sections entre deux arcs parallèles , c'est-à-dire ND et NA. Je suppose que al-Kashi mentionne le coin TN à cause de son importance pratique.
Pour obtenir l'aire de la surface intérieure du dôme on multiplie le carré du diamètre de la base de l'intérieur du dôme creux par 1°46'32'', si on calcule en sexagésimal, ou par 1,775, en calculant en décimal[20]. Quand on multiplie le carré du diamètre de la base de la coque extérieure du dôme par le même nombre, on obtient l'aire de la surface extérieure du dôme, en supposant les surfaces extérieures et intérieures parallèles entre elles. Quand on multiplie le cube du diamètre de l'intérieur du dôme aussi bien que le cube du diamètre de la base du dôme par 0°18'23'' en sexagésimal, ou par 0,306 en décimal, et qu'on prend la différence de deux produits, on obtient le volume de la qubba creuse.
« Pour simplifier l'exposé», al-Kashi n'explique pas comment il est arrivé à ces résultats. Pour une application pratique, les règles seules suffisent. Les questions suivantes nous

[19] Fol. 79v ; Nader l.c., p.359.
[20] Sur le calcul de ce facteur et la vérification de cette valeur par des méthodes modernes cf. l'annexe et Dold-Samplonius [1992].

viennent à l'esprit : (1) Quelle est la précision des facteurs d'al-Kashi ? (2) En combien de tranches a-t-il coupé le dôme pour obtenir ces facteurs ?

5 La précision du facteur de calcul du volume.

Pour vérifier la valeur d' al-Kashi, 0°18'23'' en sexagésimal, ou 0,306 en décimal, on intègre le volume comme suit (figure 7) :



diamètre 2R

$r = R + \lambda$

$0 \leq \alpha \leq \mu$

$x = r \cos\alpha - \lambda$

$z = r \sin\alpha$

$0 \leq z \leq r \sin\mu$

$dz = r \cos\alpha \, d\alpha$

Figure 7.

L'aire F(z) du disque au niveau z est $F(z) = x^2\pi$. Le volume de la qubba est donc :

$$\text{Volume de la Qubba} = \int_0^{r\sin\mu} F(z)dz \quad \text{où} \quad \cos\mu = \frac{\lambda}{r},$$

$$\int_0^{r\sin\mu} F(z)dz = \pi\int_0^{r\sin\mu} (r\cos\alpha - \lambda)^2 dz = \pi r\int_0^{\mu} (r\cos\alpha - \lambda)^2 \cos\alpha d\alpha =$$

$$\pi r\int_0^{\mu} (r^2\cos^3\alpha - 2\lambda r\cos^2\alpha + \lambda^2\cos\alpha)d\alpha =$$

$$\pi r^3\int_0^{\mu} \cos^3\alpha d\alpha - 2\lambda\pi r^2\int_0^{\mu} \cos^2\alpha d\alpha + \lambda^2\pi r\int_0^{\mu} \cos\alpha d\alpha =$$

$$\frac{\pi r^3}{3}(\sin\mu\cos^2\mu + 2\sin\mu) - \lambda\pi r^2(\sin\mu\cos\mu + \mu) + \lambda^2\pi r\sin\mu.$$

Comme $\cos\mu = \frac{\lambda}{r}$,avec $\sin\mu = \frac{\sqrt{r^2-\lambda^2}}{r}$, on obtient:

$$\text{Volume de la Qubba} = \pi\,(\sqrt{r^2-\lambda^2} \times \frac{\lambda^2+2r^2}{3} - \lambda r^2 \arccos(\frac{\lambda}{r}))\ .$$

Dans l'exemple pratique d' al-Kashi, le diamètre intérieur 2R de la qubba est égal à 6, ce qui signifie que :

$$r = 4\ ,\quad \lambda = 1 \text{ et } \text{Volume} = \pi(\sqrt{15} \times \frac{33}{3} - 4^2 \arccos(\frac{1}{4})) = 67{,}584955.$$

$$\frac{\text{Volume}}{(2R)^3} = 0{,}3128933(\text{décimal}) = 0°18'46''(\text{sexagésimal}).$$

Ici encore, pour la même raison que dans le cas de l'aire de la surface de la qubba, notre valeur approchée est supérieure à la valeur calculée d' al-Kashi. Cependant, dans le cas de l' aire, l'erreur était seulement de 0,48%, alors que dans le cas du volume c'est une erreur de 2,2%. C'est une erreur très modérée en comparaison des 18% dans le calcul de l'hémisphère de la qubba ci-dessous et acceptable pour des architectes modernes. Mais comme al-Kashi calculait un facteur avec seulement 0,48% d'écart pour l'aire de la surface, pourquoi n'a-t-il pas fait de même pour le volume ?

Il y a une autre erreur évidente, quand al-Kashi utilise le même facteur pour l'intérieur et l'extérieur du volume creux. Que se passe-t-il quand le diamètre croît ? Supposons que le diamètre extérieur (2R) du dôme égale 6,5 (cf figure 6). On calcule son volume par la formule développée ci-dessous :

$$\text{Volume de la Qubba} = \pi\,(\sqrt{r^2-\lambda^2} \times \frac{\lambda^2+2r^2}{3} - \lambda r^2 \arccos(\frac{\lambda}{r}))\ .$$

$$2R = 6{,}5\ ,\quad \lambda = 1\ ,\ \text{et } r = \frac{6{,}5}{2} + 1 = 4{,}25.$$

$$\text{Alors, Volume} = \pi(\sqrt{(\frac{17}{4})^2 - 1} \times \frac{2 \times (\frac{17}{4})^2 + 1}{3} - (\frac{17}{4})^2 \arccos\frac{4}{17}) = 84{,}932507.$$

$$\frac{\text{Volume}}{(2R)^3} = \frac{84{,}932507}{(6{,}5)^3} = 0{,}3092672.$$

Dans ce cas , le facteur d' al-Kashi de 0,306 pour le calcul du volume est trop petit de seulement 1,0564%. Cela signifie qu'en prenant la différence avec le volume intérieur, trop petit de 2,2%, le volume résultant de la qubba est plus ou moins correct. Ceci, dans un exemple pratique , où le diamètre intérieur de la qubba mesure 6 m et où la coque de la qubba a une largeur de 25 cm, tandis que le diamètre extérieur égale 6,5 m, le volume de la coque de qubba calculé par la méthode d' al-Kashi est correct pour toutes les utilisations pratiques.

Examinons à nouveau le calcul de l'aire de la surface et observons ce qui se passe dans ce cas avec l'aire de la surface extérieure. Appliquant notre formule, explicitée dans l'annexe[21], nous avons :

[21]cf. Dold-Samplonius [1992] I.c.

$$F = 2\pi r\,(\sqrt{r^2 - 1} - \arccos(\frac{1}{r}))$$

$2R = 6{,}5$, $r = R + 1$ soit $r = 4{,}25$, alors:

$$F = 8{,}5\pi(\sqrt{(\frac{17}{4})^2 - 1} - \arccos\frac{4}{17}) = 74{,}700548.$$

Quand nous divisons l'aire de la surface par le carré du diamètre, nous obtenons:

$$\frac{F}{(2R)^2} = \frac{74{,}700548}{6{,}5^2} = 1{,}768.$$

Ici la valeur d' al-Kashi de 1,775 est supérieure à notre valeur calculée de 0,39%, ce qui ne pose pas de problèmes pour les applications pratiques. Si les constructeurs ont à calculer l'aire d'une surface intérieure aussi bien qu'extérieure, par exemple pour déterminer la quantité nécessaire de plâtre , les erreurs s'équilibrent également.

6 Comment découper le dôme en tranches ?

Combien de cercles al-Kashi a-t-il tracé sur la surface du dôme ? Ou pour le formuler autrement, combien de tranches a-t-il utilisé pour obtenir ses facteurs ? Dans la figure 8 nous voyons une simulation par ordinateur de trois qubbas, découpées en sept , trente-six et six tranches de la gauche vers la droite. De manière plutôt étonnante, six tranches, soit seulement cinq cercles tracés sur la surface, approchent assez bien la courbe désirée. Comme je l'ai mentionné en lien avec les calculs du muqarnas[22], al-Kashi avait beaucoup de connaissances pratiques.

Pour établir le nombre de tranches , nous avons calculé le volume et les aires de surface pour plusieurs cas. Les calculs ont été faits à l'ordinateur en accord avec les méthodes indiquées par al-Kashi. A partir du résultat, nous avons déduit les facteurs respectifs :

Aire : Comme le facteur d'al-Kashi pour l'aire est plus exact que son facteur pour le volume , nous avons d'abord calculé l'aire, ajoutant l'aire du cône supérieur et de tous les troncs de cônes. Sept ou huit cercles , huit ou neuf tranches, suffisent normalement d'après al-Kashi.

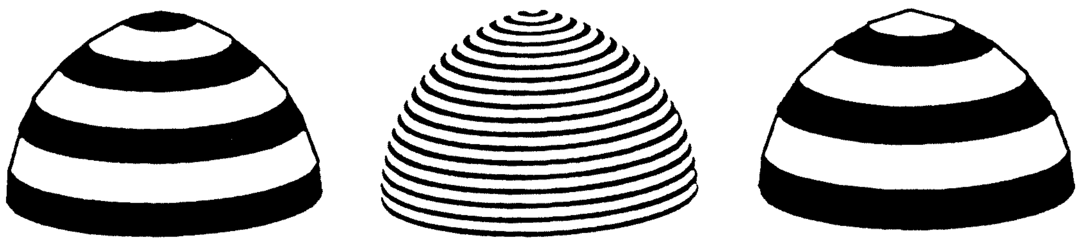


Figure 8 : Qubbas coupées en sept, trente-six et six tranches
(simulation par ordinateur de Kindl)

[22] Dold-Samplonius [1992/3], l.c.

En calculant avec huit tranches on obtient ce qui suit : l'aire du cône supérieur plus l'aire de surface des sept troncs de cônes s'élève à 63,918, pour lesquelles le facteur serait de 1,77551. En calculant avec neuf tranches le résultat pour le dôme donne une aire de 67,1268, ou un facteur égal à 1,77721. Avec six tranches nous obtenons une aire totale de 63,6908, ce qui signifie un facteur égal à 1,76919.
Al-Kashi propose comme facteur 1,775, ce qui veut dire qu'il a fait le calcul avec huit tranches, c'est-à-dire à partir de sept cercles tracés sur la surface du dôme. Une telle qubba est montrée en figure 5.

Volume : En calculant le volume du dôme pour huit tranches, nous devons ajouter le volume du cône supérieur et les volumes des sept troncs de cône, ce qui s'élève à 67,0055 avec un facteur de 0,310211.
Pour six tranches le volume total serait 66,557, avec un facteur de 0,308134. Et pour cinq tranches nous obtenons un volume de 66,1078, avec un facteur de 0,306055. Le dernier facteur est la valeur indiquée par al-Kashi, mais je ne pense pas que ce facteur soit le résultat d'un calcul pour cinq tranches seulement . Comme il obtenait une excellente valeur dans le cas de l'aire, il aurait été parfaitement capable de faire la même chose dans le cas du volume.
Ma conclusion est que les écarts entre facteurs pour le volume sont en rapport avec les raisons pratiques expliquées ci-dessus.

7 Conclusion

Dans tous les exemples, l'intérieur et l'extérieur de la surface de la coque de la qubba sont supposées parallèles. En pratique la partie basse d'un dôme doit être renforcée et le haut peut être relativement fin. Cependant, cet effet n'affecte que la surface extérieure, qui devient quelque peu déformée. C'est spécifiquement un problème si le dôme est très large, comme dans le cas de Hagia Sophia. Pour des qubbas plus petites l'effet ne sera pas significatif.
Un résultat acceptable pour le volume peut être probablement calculé avec le facteur découvert par al-Kashi. Dans le cas d'une qubba hémisphérique, l'erreur de 18% est beaucoup trop grande, erreur bien avantageuse aux architectes, leur honoraire étant basé sur le volume construit.

Annexe : calcul de l'aire de la Qubba :

Pour calculer l'aire de la Qubba, basé sur la coupe 4 , al-Kashi dit « multiplier le carré du diamètre de base de l'intérieur du dôme creux par 1°46'32'' ou par 1,775 pour obtenir l'aire de la surface du dôme creux. » Pour déterminer la précision des calculs d'al-Kashi, le nombre 1,775 a été vérifié. Pour cette raison, l'aire de la coque intérieure de la Qubba a été calculée par des méthodes modernes et cette valeur a été divisée par le carré du diamètre de sa base.

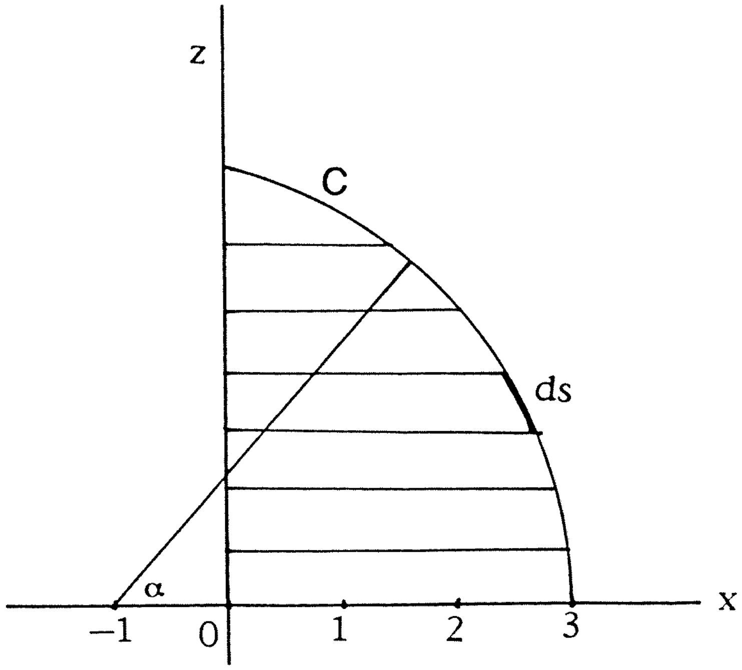


Figure 9.

L'aire F de surface de la Qubba est obtenue par rotation de son méridien C dans le plan (Oxy) autour de l'axe (Oz) (figure 9). Le méridien C est paramétré par l'angle α comme suit :

$$x = 4\cos\alpha - 1 \quad , \quad z = 4\sin\alpha \quad , \quad \text{où} : 0 \leq \alpha \leq \mu \quad \text{et} \quad \cos\mu = \frac{1}{4} \quad .$$

La surface de révolution se calcule par : $F = 2\pi\int_0^\mu x\,ds$, $(\cos\mu = \frac{1}{4})$

et l'élément de l'arc ds : $ds = 4\,d\alpha$ (arc de cercle de rayon 4),

d'où: $F = 2\pi\int_0^\mu x\,ds \; = \; 2\pi\int_0^\mu 4(4\cos\alpha - 1)\;d\alpha \; = \; 8\pi(4\sin\mu \; - \; \mu)$

et comme : $\cos\mu = \frac{1}{4}$ et $\sin\mu = \frac{1}{4}\sqrt{15}$ alors: $F = 8\pi(\sqrt{15} \; - \; \arccos(\frac{1}{4}))$.

Comme $\sqrt{15} = 3{,}8729833$, $\arccos(\frac{1}{4}) = \frac{75{,}5225}{360} \times 2\pi = 1{,}3181163$,

nous avons: $\sqrt{15} \; - \; \arccos(\frac{1}{4}) = 2{,}554867$ et $F = 8\pi \times 2{,}554867 = 64{,}210812$.

Alors le rapport entre l'aire F et le carré du diamètre est:

$$\frac{64{,}210812}{36} = 1{,}7836337 = 1°47'1''.$$

La valeur d'al-Kashi est légèrement inférieure, parce qu'il approximait à partir de l'intérieur. Quand on exprime en mode sexagésimal, qui est le mode avec lequel al-Kashi calculait, la différence est même moindre. Cependant, la plus petite valeur n'est pas un problème, car la pratique de la vie quotidienne les quantités de matériaux de construction, de peinture ... seront normalement arrondies à la valeur supérieure.

Bibliographie :

Bretanizkij, L.S. et Rosenfeld, Boris A., 1956 : « Architecture dans le traité « Clé de l'arithmétique ' de Ghiyath al-Din al-Kashi », (Russe) *Iskusstwo Azerbaidjana* 5, pp. 87- 130.

DSB, 1970-80 : *Dictionary of scientific Biography* , 16 vols. New York.

Diez, E., 1938 /1986 : « Kubba », *Encyclopaedia of Islam* , Volume supplémentaire, pp. 139-146, repr. dans la 2[nde] édition Vol. V, pp.289-296.

Dold-Samplonius, Yvonne 1992 : « The XVth Century Timurid Mathematician Ghiyath al-Din Jamshid al-Kashi and his computation of the Qubba ». « *Amphora* », *Festschrift for Hans Wussing on the Occasion of his 65[th] Birthday.* Ed.S.S. Demidov, M. Folkerts, D ; E. Rowe, Ch.J.Scriba. Basel et al., pp.171-181.

Dold-Samplonius, Yvonne 1993 : « Practical Arabic Arithmetics : Mesuring the Muqarnas by al-Kashi » . *Centaurus* 35 pp.193-242.

Ettinghausen , Richard , 1976 : « *The Man-made Setting* ». *The World of Islam*. Ed. B. Lewis. London, pp. 57-88.

Gandz, Solomon , 1932 : « The Mischnat ha Middot »(Allemand). *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik.* Abt. A Quellen, Vol.2.Berlin.

Hochheim, Adolf, 1877-80 : *Kafi fi l Hisab* (Genügendes über Arithmetik) (Allemand). Halle. Repr.1998 : Islamic Mathematics and Astronomy, Vol. 38. Frankfurt/Main.

Al-Kashi, Ghiyath al-Din, 1427/1558 : *Miftah al-Hisab* (Clé de l'arithmétique). Ms. Or. 185, Leiden. Traduction Russe v. Rosenfeld.

Lewis, Bernard (ed.), 1976 : *The World of Islam.* London.

Luckey, Paul, 1951 : *Die Rechenkunst bei Jamshid b. Mas'ud al-Kashi mit Ruckblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens.*(Allemand). Wiesbaden.

Nader, Nabusi, 1977 : *Al-Kashi, Ghiyath al-Din : Miftah al-Hisab* (Clé de l'Arithmétique). Edition Arabe, notes et introduction en Français, Damas.

Pougatchenkova, Galina A., 1981 : *Chefs d'œuvre d'architecture de l'Asie Centrale XIVe - XVe siècle.* Paris.

Rebstock, Ulrich, 1993 : *Die Reichtümer der Rechner von Ahmad b. Thabat,* (Allemand). Beiträge zur Sprach- und Kulturgeschichte des Orients, Vol. 32. Walldorf-Hessen.

Rosen, Frederic, (ed. et trad.), 1831 : *The Algebra of Mohammed Ben Musa.* London. Repr.1997 : Islamic Mathematics and Astronomy, Vol.1 Frankfurt/Main.

Rosenfeld, Boris A. and Youschekevitch, Adolf P., 1956 : *Al-Kashi, Ghiyath al-Din : Miftah al-Hisab* (Clé de l'Arithmétique). Traduction Russe avec commentaires. Moscou.

Saidan, Ahmad S., 1971 ,*The Arithmetic of Abu al-Wafa al-Buzajani,* .(Arabe). Edition, introduction et commentaires avec références à *The Arithmetic of al-Karaji* . Amman.

Saidan, Ahmad S., 1974 : « The Arithmetic of Abu'l-Wafa », ISIS, pp. 367-375.