JEU DE TAQUIN ET TABLEAUX DE YOUNG

Peter LITTELMANN

Quand on cherche le verbe *taquiner* dans le «Petit Larousse», on y trouve :

• *taquiner un instrument* – veux dire en jouer distraitement,

et, pour le Jeu de Taquin, on y trouve la définition suivante :

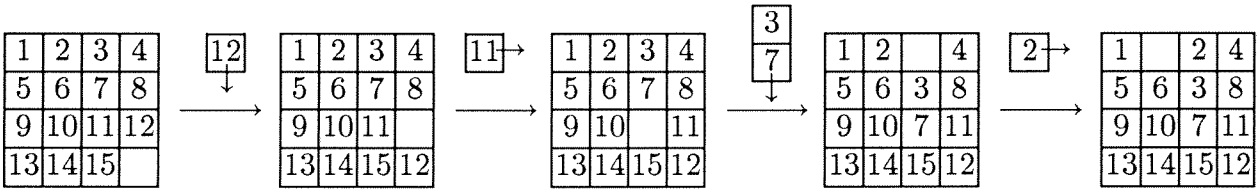
• *Jeu de Taquin* – Jeu de combinaison consistant à ranger par simple glissement des plaques numérotées, étroitement juxtaposées.

Jeu de Taquin

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Les Jeux de Taquin qu'on trouve dans les magasins n'ont presque jamais des plaques numérotées, ils sont plutôt décorés avec l'image d'un animal ou d'un bâtiment. Sur un carré on a place pour 16 plaques, mais pour avoir la possibilité de ranger les plaques par simple glissement, on en enlève une.

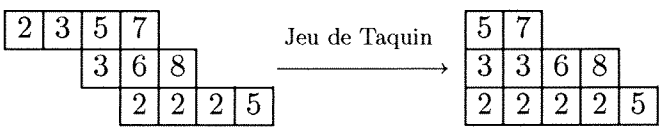
Exemple.



De cette façon il est possible de «battre» les plaques numérotées. L'objectif du jeu est de remettre les plaques en ordre, par simple glissement.

Pendant les années 70, Lascoux et Schützenberger ont défini un Jeu de Taquin pour les tableaux gauches. Un tel tableau est un arrangement de cases, étroitement juxtaposées, dont les cases sont remplies d'entiers strictement positifs. Les tableaux gauches tels que les cases sont alignées sur la gauche sont appelés tableaux de Young, et l'objectif du Jeu de Taquin de Lascoux et Schützenberger est de transformer un tableau gauche en un tableau de Young, par simple glissement des «plaques» (suivant certaines règles).

Exemple. *tableau gauche* *tableau de Young*



© L'OUVERT **94** (1999)

Ce «jeu» est devenu un outil très important dans la théorie des représentations complexes du groupe $GL_n(\mathbf{C})$, on en parlera un peu dans la dernière section. Nous ne donnerons pas toutes les démonstrations concernant le Jeu de Taquin, pour les détails nous recommandons l'article de A. Lascoux et M. P. Schützenberger [2].

Commençons avec la définition d'un tableau de Young.

1. Partitions, tableaux semi-standard et tableaux gauches pointés

Une *partition* $\underline{p}$ de longueur n est une suite de n nombres naturels, décroissante au sens large : $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, où $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n \geq 0$.

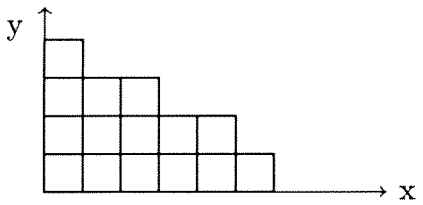
Exemples. Pour $n = 3$, les suites $\underline{p} = (7, 3, 0)$, $\underline{q} = (4, 4, 1)$, et $\underline{r} = (0, 0, 0)$ sont des partitions de longueur n.

Pour simplifier la notation, nous omettrons souvent les zéros dans les suites. Les partitions ci-dessus s'écrivent donc : $\underline{p} = (7, 3)$, $\underline{q} = (4, 4, 1)$ et $\underline{r} = ()$.

Définition. Soit $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ une partition de longueur de n. Un *diagramme de Young* $D(\underline{p})$ de type $\underline{p}$ est un arrangement de cases, étroitement juxtaposées, les cases sont alignées sur la gauche, et on a p_1 cases dans la première ligne, p_2 cases dans la deuxième ligne,..., et p_n cases dans la dernière ligne.

Exemple. Soit $n = 4$ et soit $\underline{p} = (6, 5, 3, 1)$. Le diagramme de Young $D(\underline{p})$ de type $\underline{p}$ est formé de $15 = 6 + 5 + 3 + 1$ cases. Les 6 premières cases forment la première ligne (= la ligne inférieure), la deuxième ligne est formée de 5 cases, la troisième ligne est formée de 3 cases, et la dernière ligne (= ligne supérieure) est formée d'une seule case.

4e ligne : 1 case
3e ligne : 3 cases
2e ligne : 5 cases
1re ligne : 6 cases



Définition. Soit $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ une partition de longueur n. Un *tableau de Young* de type $\underline{p}$ est un diagramme de type $\underline{p}$, dont les cases sont remplies d'entiers pris dans $\{1, 2, 3, ..., n\}$. On dit que le tableau est *semi-standard* si les cases sont remplies de sorte que les nombres soient croissants au sens large dans les lignes (de gauche à droite) et strictement croissants dans les colonnes (de bas en haut).

Exemple. Soit $n = 7$ et soit $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_7)$. Le tableau T ci-dessous est un tableau de Young semi-standard de type $\underline{p} = (5, 3, 1, 0, 0, 0, 0)$:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 7 & & & & \\ \hline 3 & 4 & 5 & & \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad T' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 7 & & & & \\ \hline 3 & 4 & 5 & & \\ \hline 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad T'' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3 & & & & \\ \hline 3 & 4 & 5 & & \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} .$$

Le tableau T' (aussi de type $\underline{p}$) n'est pas semi-standard : la suite des entiers dans la première ligne $(2, 2, 3, 2, 2)$, n'est pas une suite croissante au sens large. Le tableau T'' n'est pas un tableau semi-standard parce que la suite des entiers dans la première colonne $(2, 3, 3)$, n'est pas une suite strictement croissante.

Soient $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ et $\underline{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ deux partitions de longueur n. Nous définissons un ordre partiel sur l'ensemble des partitions de longueur n. On dit que

$$\underline{p} \geq \underline{q} \quad \text{si} \quad p_1 \geq q_1 \, , p_2 \geq q_2 \, , \ldots \, , \text{ et } p_n \geq q_n.$$

Exemples.

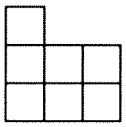
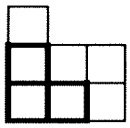
i) $\underline{p} = (3,3,1) \geq \underline{q} = (3,2,1)$ parce que $p_1 = q_1 = 3$, $p_2 = 3 \geq q_2 = 2$ et $p_3 = q_3 = 1$.

ii) $\underline{p} = (3,3,1) \not\geq \underline{q} = (2,2,2)$ parce que $p_3 = 1 \not\geq q_3 = 2$, et $\underline{q} \not\geq \underline{p}$ parce que $q_1 = 2 \not\geq p_1 = 3$.

iii) $\underline{p} = (4,2,2) \geq \underline{q} = (2)$ parce que $p_1 = 4 \geq q_1 = 2$, $p_2 = 2 \geq q_2 = 0$ et $p_3 = 2 \geq q_3 = 0$.

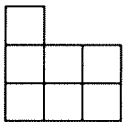
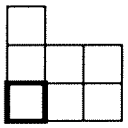
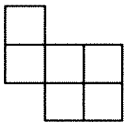
Soient $\underline{p}, \underline{q}$ deux partitions de longueur n telles que $\underline{p} \geq \underline{q}$. Nous considérons $\mathrm{D}(\underline{q})$ comme le sous-diagramme de $\mathrm{D}(\underline{p})$ formé des premières q_1-cases dans la première ligne de $D(\underline{p})$, des premières q_2-cases dans la 2e ligne, ..., et des premières q_n-cases dans la dernière ligne.

Exemple. Pour $(3,3,1) \geq (2,1)$ on peut voir $D(2,1)$ comme un sous-diagramme de $D(3,3,1)$:

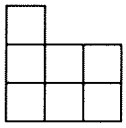
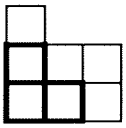
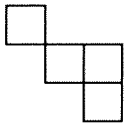
$D(3,3,1) =$  $D(2,1) =$ et $D(2,1) \subset D(3,3,1)$: 

Définition. Le *diagramme gauche* $D(\underline{p}/\underline{q})$ de type $\underline{p}/\underline{q}$ est le diagramme qu'on obtient à partir de $D(\underline{p})$ en supprimant les cases de $D(\underline{q}) \subset D(\underline{p})$.

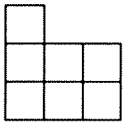
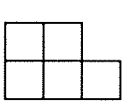
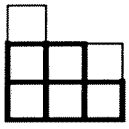
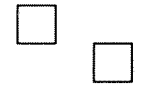
Exemples. Pour $\underline{p} = (3,3,1) \geq \underline{q} = (1)$ on obtient :

$D(\underline{p}) =$  , $D(\underline{q}) =$, $D(\underline{q}) \subset D(\underline{p}) =$  et $D(\underline{p}/\underline{q}) =$  .

Pour $\underline{p} = (3,3,1) \geq \underline{q} = (2,1)$ on a :

$D(\underline{p}) =$  , $D(\underline{q}) =$, $D(\underline{q}) \subset D(\underline{p}) =$  et $D(\underline{p}/\underline{q}) =$  .

Et pour $\underline{p} = (3,3,1) \geq \underline{q} = (3,2)$ on obtient :

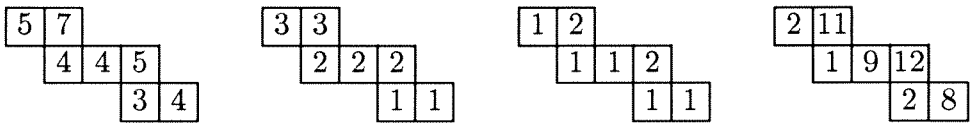
$D(\underline{p}) =$  , $D(\underline{q}) =$  , $D(\underline{q}) \subset D(\underline{p}) =$  et $D(\underline{p}/\underline{q}) =$  .

La définition d'un tableau gauche semi-standard est semblable à la définition d'un tableau de Young semi-standard :

Définition. Soient $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ et $\underline{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ deux partitions de longueur n telles que $\underline{p} \geq \underline{q}$. Un *tableau gauche* de type $\underline{p}/\underline{q}$ est un diagramme gauche de type $\underline{p}/\underline{q}$,

dont les cases sont remplies d'entiers de $\{1, 2, 3, ..., n\}$. On dit que le tableau gauche est *semi-standard* si les cases sont remplies de sorte que les nombres soient croissants au sens large dans les lignes et strictement croissants dans les colonnes.

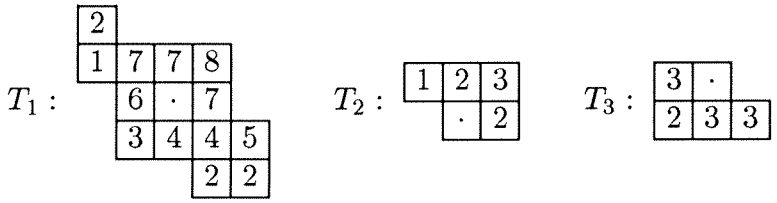
Exemple. Soient $n = 12$, $\underline{p} = (5, 4, 2)$ et $\underline{q} = (3, 1)$. Les tableaux gauches ci-dessous sont des tableaux gauches semi-standard de type $\underline{p}/\underline{q}$:



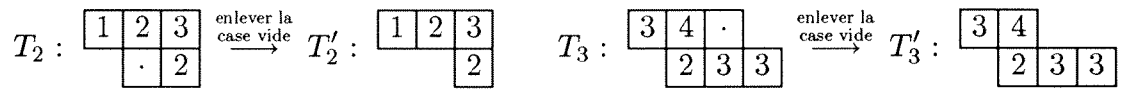
La notion de tableau gauche pointé que nous introduisons maintenant n'est autre qu'un tableau gauche avec un «trou» :

Définition. Soient $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ et $\underline{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ deux partitions de longueur n telles que $\underline{p} \geq \underline{q}$. Un *tableau gauche pointé* de type $\underline{p}/\underline{q}$ est un diagramme gauche de type $\underline{p}/\underline{q}$, dont toutes les cases **sauf une** sont remplies par des entiers de $\{1, 2, 3, ..., n\}$. On dit que le tableau gauche pointé est *semi-standard* si les cases sont remplies de sorte que les nombres soient croissants au sens large dans les lignes et strictement croissants dans les colonnes.

Exemples. Les trois tableaux gauches pointés ci-dessous sont semi-standard. Le premier est de type $(5, 5, 4, 4, 1)/(3, 1, 1)$, le deuxième est de type $(3, 3)/(1)$, le troisième est de type $(3, 2)/()$. On a marqué la case vide d'un « $\cdot$ ».



Soit T un tableau gauche pointé de type $\underline{p}/\underline{q}$, enlevons la case vide. On dit que la case vide est *enlevable* si l'arrangement de cases qui reste est un tableau gauche. Par exemple, les cases vides de T_2 et T_3 sont enlevables :



Par contre, on ne peut pas enlever la case vide de T_1, ce qui reste n'est plus un tableau.

Définition. Soit T un tableau gauche pointé de type $\underline{p}/\underline{q}$. La case vide est appelée *case vide extérieure* si la case est enlevable et le tableau gauche qui reste est de type $\underline{p}'/\underline{q}$ (la partition $\underline{q}$ ne change pas !), et la case vide est appelée *case vide intérieure* si la case est enlevable et le tableau gauche qui reste est de type $\underline{p}/\underline{q}'$ ($\underline{p}$ ne change pas !)

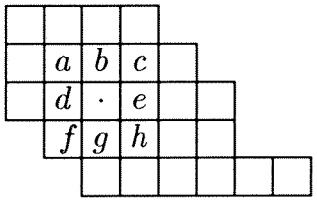
Exemples. T_2 est de type $(3, 3)/(1)$, la case vide de T_2 est une case vide intérieure, T_2' est de type $(3, 3)/(2)$. T_3 est de type $(4, 3)/(1)$, la case vide de T_3 est une case vide extérieure, T_3' est de type $(4, 2)/(1)$.

2. Le Jeu de Taquin

L'objet du Jeu de Taquin pour tableaux gauches est de transformer (suivant certaines règles) un tableau gauche semi-standard T en un tableau de Young semi-standard T'.

Commençons avec un tableau gauche pointé semi-standard T, où la case vide a été marqué d'un $\langle\!\langle \cdot \rangle\!\rangle$:

T :

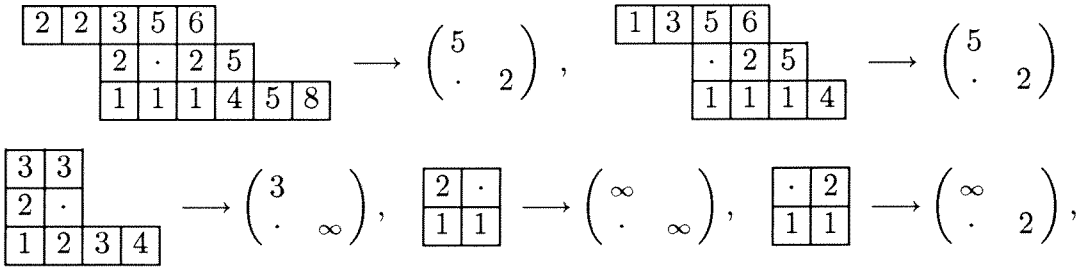


Parce que T est semi-standard, on sait que les nombres dans les cases autour de la case vide, satisfont les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} a & \leq & b & \leq & c \\ \vee & & \vee & & \vee \\ d & \leq & \cdot & \leq & e \\ \vee & & \vee & & \vee \\ f & \leq & g & \leq & h \end{array}$$

Seules les valeurs de b et e sont importantes pour le Jeu de Taquin. S'il n'y a pas de cases correspondantes, on pose $b = \infty$ respectivement $e = \infty$

Exemples. Nous indiquons pour les 5 tableaux gauches semi-standard ci-dessous les valeurs de b et e dans une matrice $\begin{pmatrix} b & \\ \cdot & e \end{pmatrix}$ à droite du tableau :



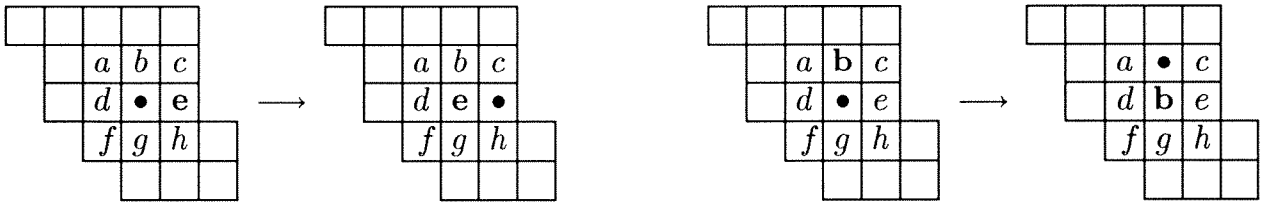
L'objet du jeu est de bouger «le trou» dans la direction nord-est, c'est-à-dire de transformer un tableau pointé de telle sorte que la case vide du nouveau tableau soit «plus extérieure» que la case vide du tableau pointé du début.

Les règles du Jeu de Taquin.

• Si $b = e = \infty$, la case vide est déjà une case extérieure.

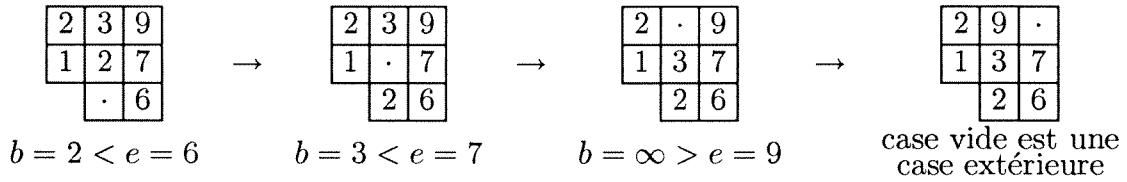
• Si soit $b \neq \infty$, soit $e \neq \infty$, la case vide n'est pas une case extérieure. Dans ce cas, les transformations suivantes sont permises : on peut échanger

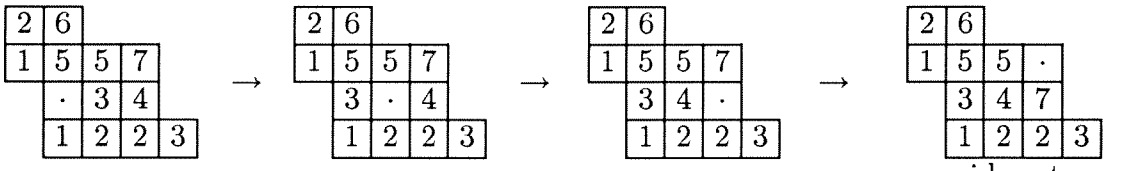
i) $\boxed{\bullet}$ et $\boxed{\mathbf{e}}$ si $b > e$ et *ii)* $\boxed{\bullet}$ et $\boxed{\mathbf{b}}$ si $b \leq e$



Les nouveaux tableaux ci-dessus sont des tableaux gauches pointés semi-standard. De plus, par réitération, on voit qu'on peut transformer un tableau gauche pointé semi-standard en un tableau gauche pointé semi-standard tel que la case vide soit une case extérieure.

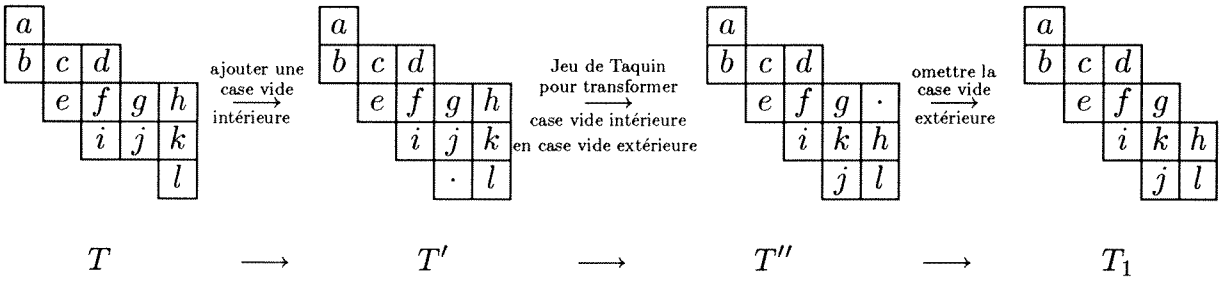
Exemples.





Le Jeu de Taquin pour tableaux gauches semi-standard.
On peut transformer un tableau gauche semi-standard T en un tableau de Young semi-standard à l'aide du Jeu de Taquin :

- Si T est un tableau de Young semi-standard, rien est à faire.
- Supposons que T est du type $\underline{p}/\underline{q}$ avec $\underline{q} \neq ()$. On transforme T en un tableau gauche semi-standard T_1 de type $\underline{p}'/\underline{q}'$ avec $\underline{q}' < \underline{q}$, comme indiqué dans le schéma suivant :



1re étape. On ajoute une case vide intérieure à T pour obtenir un tableau gauche pointé semi-standard T'. (Par exemple, soit j tel que $q_j > q_{j+1}$, ou soit $j = n$ si $q_n > 0$, on peut ajouter une case vide dans la $j^{\text{ième}}$ ligne et $q_j{}^{\text{ième}}$ colonne.)
2e étape. On utilise le Jeu de Taquin pour transformer T' en un tableau gauche pointé semi-standard T'' avec une case vide extérieure.
3e étape. T_1 est le tableau gauche semi-standard issu de T'' en omettant la case vide extérieure de T''. Notons que T_1 est de type $\underline{p}'/\underline{q}'$ avec $\underline{q}' < \underline{q}$. On écrit

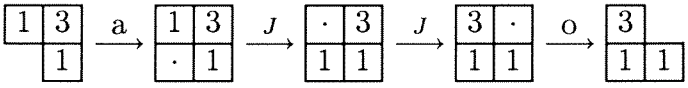
$$T \Longrightarrow T_1$$

pour indiquer que le tableau gauche semi-standard T_1 est issu du tableau gauche semi-standard T en utilisant le Jeu de Taquin.

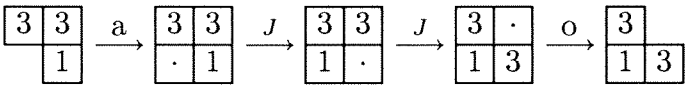
Par itération, on peut transformer de cette manière tout tableau gauche semi-standard T en un tableau de Young semi-standard $\check{T}$.

Dans les exemples suivants, nous transformons des tableaux gauches semi-standard T en tableaux de Young semi-standard $\check{T}$. Nous écrivons $\xrightarrow{\text{a}}$ pour *ajouter une case vide intérieure*, $\xrightarrow{\text{o}}$ pour *omettre la case vide extérieure*, et $\xrightarrow{J}$ pour une transformation utilisant le Jeu de Taquin.

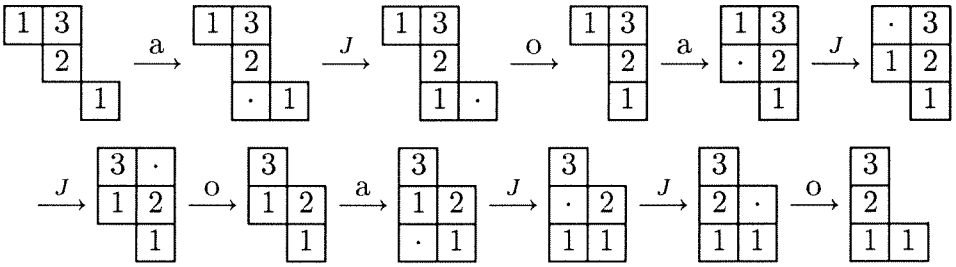
Exemple.



Exemple.

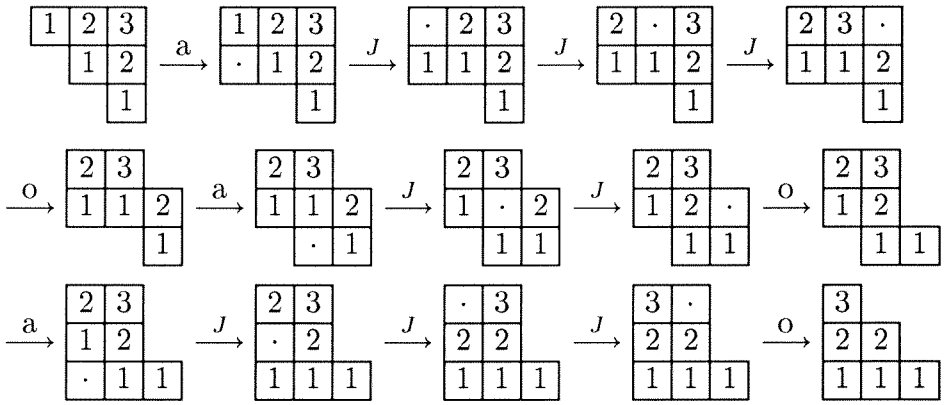


Exemple.

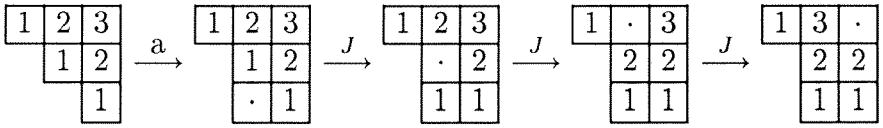


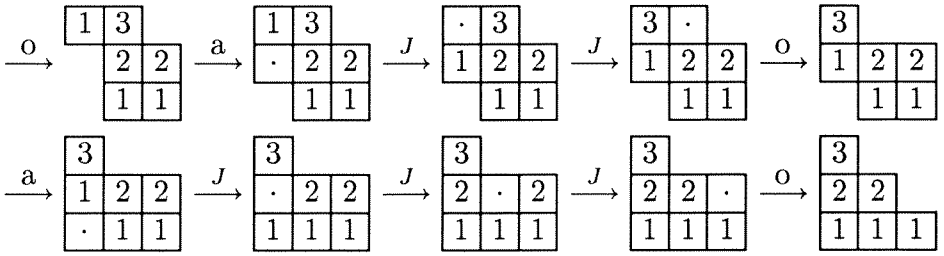
Remarque 1. A l'aide du Jeu de Taquin on pousse les cases vides intérieures dans la direction nord-est, puis, on pousse, en même temps, les plaques du tableau gauche T dans la direction sud-ouest. Si donc P est une plaque de T dans la $i^{\text{ième}}$ ligne, $j^{\text{ième}}$ colonne, on retrouve la plaque dans $\check{T}$ dans la $i'^{\text{ième}}$ ligne, $j'^{\text{ième}}$ colonne avec $i' \leq i$ et $j' \leq j$.

Exemple. En général, on a plusieurs possibilités de choisir la case vide intérieure qu'on peut ajouter à un tableau gauche semi-standard. Dans l'exemple suivant, on peut commencer avec la case dans la deuxième ligne, première colonne :



ou avec la case dans la première ligne, deuxième colonne :





Notons que le Jeu de Taquin produit le même tableau de Young semi-standard $\check{T}$!

En effet, le tableau $\check{T}$ obtenu est indépendant du choix de la façon d'ajouter les cases vides intérieures :

Théorème 1. (Knuth, Lascoux-Schützenberger) *Le tableau semi-standard $\check{T}$ est uniquement déterminé par le tableau gauche semi-standard T.*

Pour expliquer les méthodes utilisées dans la démonstration du théorème, nous introduisons l'algèbre des mots dans l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$.

3. Mots et tableaux gauches

Considérons l'alphabet $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, ..., n-1, n\}$ formé par les entiers entre 1 et n.

Définition. Un mot m (de longueur r) dans l'alphabet $\mathbf{A}$ est une suite finie d'éléments de $\mathbf{A}$ (de longueur r) : $m = (w_1, w_2, \ldots, w_r)$.

Exemple. Soit $n = 7$. L'alphabet $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ est l'ensemble des entiers compris entre 1 et 7. La suite $(5, 2, 6, 7, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 5, 1, 2)$ est un mot de longueur 13.

L'ensemble des mots dans l'alphabet $\mathbf{A}$ est muni d'une *multiplication* (associative) naturelle : le produit de deux mots n'est que la concaténation des deux mots. Pour $w = (w_1, w_2, \ldots, w_r)$ et $v = (v_1, v_2, \ldots, v_t)$ on pose $w \cdot v = (w_1, w_2, \ldots, w_r, v_1, v_2, \ldots, v_t)$.

Exemple. Conservons le même alphabet $\mathbf{A}$ que dans l'exemple ci-dessus, et soient $w = (5, 2, 6, 7, 4, 5, 6)$ et $v = (1, 2, 4, 5, 1, 2)$, alors $w \cdot v = (5, 2, 6, 7, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 5, 1, 2)$.

Un mot $m = (w_1, \ldots, w_t)$ est dit strictement croissant si $w_1 < w_2 < \ldots < w_r$. Une *décomposition* d'un mot $m = m_1 m_2 \cdots m_r$ *en mots strictement croissants* m_j $(j = 1, \ldots, r)$ est une décomposition de m comme produit de mots croissants.

Exemple. Une décomposition de $m = (5, 2, 6, 7, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 5, 1, 2)$ en mots strictement croissants est $m = m_1 m_2 m_3 m_4 m_5$ avec $m_1 = (5)$, $m_2 = (2, 6, 7)$, $m_3 = (4, 5, 6)$, $m_4 = (1, 2, 4, 5)$ et $m_5 = (1, 2)$, alors $m = (5)(2, 6, 7)(4, 5, 6)(1, 2, 4, 5)(1, 2)$.

Définition. Soit T un tableau gauche semi-standard. Le mot $w_T = m_1 m_2 \cdots m_r$ *associé au tableau* T est le produit des mots strictement croissants m_j donnés par les inscriptions dans les colonnes de T, de *droite* à *gauche* :

T :

z					
y	w	r			
x	v	q	m		
	u	p	l	i	e
	t	o	k	h	d
	s	n	k	g	c
			j	f	b
					a

$\longrightarrow w_T = (a \ldots e)(f \ldots i)(j \ldots m)(n \ldots r)(s \ldots w)(x \ldots z)$

Exemple.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 5 & & & \\ \hline 1 & 4 & 6 & & \\ \hline & 2 & 5 & 7 & \\ \hline & 1 & 4 & 6 & \\ \hline & & & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow w_T = (5)(2\,6\,7)(4\,5\,6)(1\,2\,4\,5)(1\,2)$$

4. L'algèbre plaxique I

Soit $W := \mathbf{Q}\langle 1, 2, 3, \ldots, n-1, n\rangle$ l'algèbre des mots, c'est-à-dire W est l'algèbre associative libre à coefficients rationnels sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$. Un élément de W n'est qu'une combinaison linéaire (formelle) de mots, à coefficients rationnels :

$$a * (w_1, w_2, \ldots, w_r) + b * (v_1, v_2, \ldots, v_s) + \ldots + d * (u_1, u_2, \ldots, u_t)$$

Exemple.

$$\frac{3}{4} * (1,1,3,6,3,1) + \frac{11}{47} * (2,7,4,2,2,1) + 3 * (1,2,3,2,1) + \frac{103}{51} * (4,4,4)$$

La structure multiplicative de W n'est autre que l'extension linéaire de la multiplication de mots :

$$\Big(\sum_{i=1}^{r} a_i * m_i\Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^{s} b_j * n_j\Big) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} (a_i b_j) * (m_i n_j)$$

Exemple.

$$\begin{aligned}&\big[2 * (2,2,1) + 4 * (5,1)\big] \cdot \big[3 * (2,5) + 8 * (3,1,1)\big] \\ &\qquad = 6 * (2,2,1,2,5) + 16 * (2,2,1,3,1,1) + 12 * (5,1,2,5) + 32 * (5,1,3,1,1)\end{aligned}$$

Pour $1 \leq a < b < c \leq n$ considérons les relations suivantes, appelées *relations de Knuth*, et soit I l'idéal bilatère dans W, engendré par les relations :

$$(a,a,b) = (a,b,a),\ (c,a,b) = (a,c,b),\ (b,a,c) = (b,c,a),\ (b,a,b) = (a,b,b).$$

Exemples. $(1,1,2) = (1,2,1)$, $(3,1,2) = (1,3,2)$, $(2,1,3) = (2,3,1)$, $(2,1,2) = (1,2,2)$.

Définition. Le quotient W/I de W par I est appelé *algèbre plaxique*.

Pour un mot $m \in W$ notons $\overline{m}$ la classe du mot dans W/I. De même, pour un tableau gauche semi-standard T soit w_T le mot associé, et notons $\overline{w}_T$ la classe du mot dans W/I.

Exemple.

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \rightarrow \overline{w}_{T_1} = \overline{(3,4,2)} = \overline{(3,2,4)}, \quad \text{et pour} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \overline{w}_{T_2} = \overline{(3,2,4)},$$

alors, on a $\overline{w}_{T_1} = \overline{w}_{T_2}$. Notons que T_2 est le tableau de Young semi-standard qu'on obtient à partir de T_1 en appliquant le Jeu de Taquin.

Nous définissons une *relation* $\sim$ sur les tableaux gauches semi-standard de la façon suivante : $T_1 \sim T_2$ s'il est possible de trouver des tableaux gauches semi-standard $S_0 = T_1, S_1, \ldots, S_t = T_2$ tels que $T_1 = S_0 \Rightarrow S_1 \Rightarrow S_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow S_i \Rightarrow S_{i+1} \Rightarrow S_{i+2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow S_{t-1} \Rightarrow S_t = T_2$.

M. Schützenberger [7] complétant un premier mémoire de D. Knuth [1] (à qui nous devons les précédentes règles dites de Knuth) a prouvé le théorème suivant :

Théorème 2.
1) Soient T_1, T_2 deux tableaux gauches semi-standard. On a

$$\overline{w}_{T_1} = \overline{w}_{T_2} \quad \textit{si et seulement si} \quad T_1 \sim T_2$$

2) Pour chaque classe $\overline{w} \in W/I$ il existe un tableau semi-standard unique tel que $\overline{w} = \overline{w}_T$.
3) L'ensemble des classes $\{\overline{w}_T \mid T$ semi-standard$\}$ associées aux tableaux de Young semi-standard est une base de W/I (comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel).

Remarque 2. Notons que 2) et 3) sont deux assertions équivalentes, et 2) implique le Théorème 1. Il n'est pas très difficile de déduire 2) (et donc 3)) de 1). La démonstration de 1) est «élémentaire», mais pas «simple». En fait, 1) est lié à la démonstration de la règle de Littlewood-Richardson (voir sections 5 et 6), publiée en 1934 [3] sans démonstration. G. Robinson a donné une démonstration incomplète ([4],[6]), la première démonstration correcte a été donnée par Schützenberger [7] en 1976. On trouve également un bel exposé de cette règle avec une démonstration dans le livre de Macdonald [5].

5. L'algèbre plaxique II

Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel rationnel libre

$$\mathcal{P} := \mathbf{Q}\langle T \mid T \text{ tableau de Young semi-standard de type } \underline{p}, \underline{p} \text{ partition de longueur } n\rangle$$

sur l'ensemble des tableaux de Young semi-standard de type $\underline{p}$, où $\underline{p}$ parcourt les partitions de longueur n. Donc les éléments de $\mathcal{P}$ sont des combinaisons linéaires (formelles)

$$\mathrm{a}_1\mathrm{T}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{T}_2 + \ldots + \mathrm{a}_r\mathrm{T}_r$$

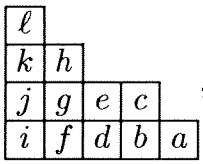
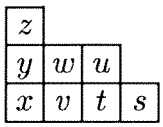
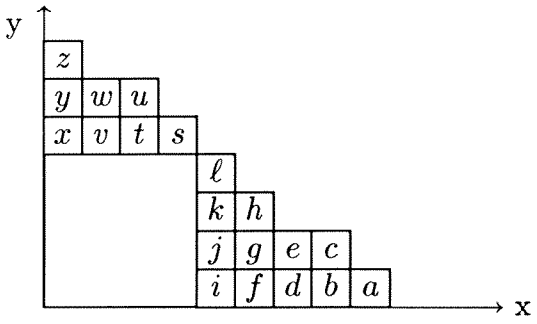
où les a_i sont des nombres rationnels et les T_i sont des tableaux de Young semi-standard.

D'après le Théorème 2, nous savons que cet espace vectoriel est isomorphe à l'algèbre plaxique et donc muni d'une multiplication. On peut définir la multiplication directement en utilisant le Jeu de Taquin :

Pour deux tableaux de Young semi-standard T_1 et T_2 de type $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_r)$ et $\underline{q} = (q_1, \ldots, q_s)$ (avec $p_r, q_s > 0$ et $r, s \leq n$) soit $T_1 * T_2$ le tableau gauche de type

$$(p_1 + q_1, \ldots, p_r + q_1, q_1, \ldots, q_s)/(\underbrace{q_1, \ldots, q_1}_{r \text{ fois}}),$$

dont les premières r-lignes sont remplies comme les lignes correspondantes de T_1, et les autres s-lignes sont remplies comme les lignes correspondantes de T_2 :

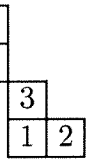
$T_1 =$  , $T_2 =$  , $T_1 * T_2 =$ 

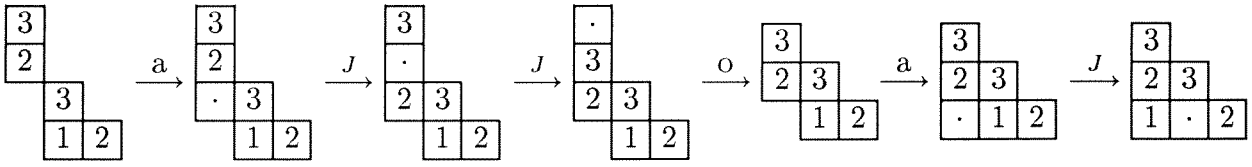
Le mot $w_{T_1 * T_2}$ associé à $T_1 * T_2$ dans W n'est que $w_{T_1} \cdot w_{T_2}$.

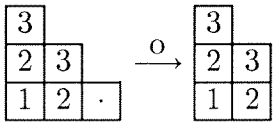
Définition. Le produit $T_1 \circ T_2$ de deux tableaux de Young semi-standard est l'unique tableau de Young semi-standard $\check{T}$ tel que $\check{T} \sim T_1 * T_2$.

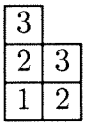
D'après le Théorème 2 nous savons que $\check{T}$ est l'unique tableau de Young semi-standard tel que $\overline{w}_{T_1 * T_2} = \overline{w}_{\check{T}}$. Donc l'application $\mathcal{P} \to W/I$, définie par $T \mapsto \overline{w}_T$, est un isomorphisme d'algèbre entre $(\mathcal{P}, \circ)$ et l'algèbre plaxique.

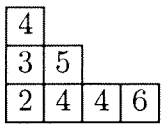
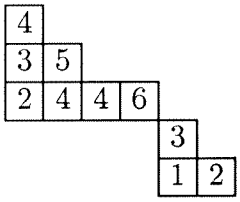
Exemples. Nous utilisons les mêmes notations que précédement. Pour

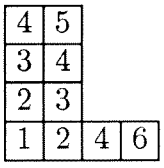
$T_1 =$, $T_2 =$ on a $T_1 * T_2 =$  et





, alors, $T_1 \circ T_2 =$  .

Pour $T_1 =$, $T_2 =$  on a $T_1 * T_2 =$  et, après un petit calcul, on trouve

$T_1 \circ T_2 =$  .

D'abord $\mathcal{P}$ est une algèbre non-commutative, par exemple,

$$\boxed{1}\circ\boxed{2}=\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}\quad\text{et}\quad \boxed{2}\circ\boxed{1}=\boxed{1}\boxed{2}\,.$$

Elle admet une sous-algèbre commutative intéressante : pour une partition $\underline{p}$ de longueur n notons $s(\underline{p})$ la somme (dans $\mathcal{P}$) de tous les tableaux de Young semi-standard de type $\underline{p}$:

$$s(\underline{p}) := \sum_{\text{T semi-standard, de type } \underline{p}} T$$

Les sommes $s(\underline{p})$ ont une interprétation dans la théorie des représentations du groupe $GL_n(\mathbf{C})$, nous parlerons de cet aspect dans la prochaine section.

Proposition.

1) Soient $\underline{p},\underline{q}$ deux partitions de longueur n. Il existe des partitions $\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_t$ de longueur n et $a_i\in\mathbf{N}$ telles que

$$s(\underline{p})\circ s(\underline{q})=\sum_{i=1}^{t} a_i s(\underline{r}_i)$$

2) Le sous-espace vectoriel $R\subset\mathcal{P}$ engendré par les $s(\underline{p})$, $\underline{p}$ partition de longueur n, est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{P}$.

Exemple. Soit $n=3$, $\underline{p}=\underline{q}=(1)$. On a $s((1))=\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}$, alors

$$s((1))\circ s((1))=\sum_{1\le i,j\le 3}\boxed{i}\circ\boxed{j}=\sum_{1\le j\le i\le 3}\boxed{i}\circ\boxed{j}+\sum_{1\le i<j\le 3}\boxed{i}\circ\boxed{j}.$$

Pour $i<j$ on trouve :

$$\boxed{i}\circ\boxed{j}=\begin{array}{|c|}\hline j\\\hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline\\\hline i\\\hline\end{array}\xrightarrow{\text{a}}\begin{array}{|c|c|}\hline j & \\\hline \cdot & i\\\hline\end{array}\xrightarrow{J}\begin{array}{|c|c|}\hline j & \cdot\\\hline i & \\\hline\end{array}\xrightarrow{\text{o}}\begin{array}{|c|}\hline j\\\hline i\\\hline\end{array},$$

et pour $i\ge j$ on trouve :

$$\boxed{i}\circ\boxed{j}=\begin{array}{|c|}\hline j\\\hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline\\\hline i\\\hline\end{array}\xrightarrow{\text{a}}\begin{array}{|c|c|}\hline j & \\\hline \cdot & i\\\hline\end{array}\xrightarrow{J}\begin{array}{|c|c|}\hline \cdot & \\\hline j & i\\\hline\end{array}\xrightarrow{\text{o}}\boxed{j}\boxed{i},$$

et donc

$$s((1))\circ s((1))=\sum_{1\le j\le i\le 3}\boxed{j}\boxed{i}+\sum_{1\le i<j\le 3}\begin{array}{|c|}\hline j\\\hline i\\\hline\end{array}=s((1,1))+s((2))\,.$$

On peut donner un algorithme pour calculer les a_i. Pour une partition $\underline{p}$ soit $Y_{\underline{p}}$ l'unique tableau de Young semi-standard de type $\underline{p}$ dont toutes les cases dans la première ligne sont remplies de 1, les cases dans la deuxième ligne sont remplies de 2,....

Exemple. Soit $\underline{p}=(6,3,1)$, alors $Y_{\underline{p}}=$

					3
2	2	2			
1	1	1	1	1	1

.

Le coefficient a_i est la multiplicité de $s(\underline{r}_i)$ dans le produit $s(\underline{p}) \circ s(\underline{q}) = \sum T \circ T'$, où la somme parcourt tous les tableaux de Young semi-standard T de type $\underline{p}$ et tous les tableaux de Young semi-standard T' de type $\underline{q}$. Or la multiplicité de $s(\underline{r}_i)$ est déjà déterminée par la multiplicité de $Y_{\underline{r}_i}$ dans

$$\{T \circ T' \mid T, T' \text{ semi-standard, } T \text{ de type } \underline{p},\ T' \text{ de type } \underline{q}\}$$

Donc

$$a_i = \sharp\{(T, T') \mid T, T' \text{ semi-standard, } T \text{ de type } \underline{p}, T' \text{ de type } \underline{q},\ T \circ T' = Y_{\underline{r}_i}\}$$

est le cardinal de l'ensemble des paires (T, T') de tableaux de Young semi-standard de type $\underline{p}$ respectivement $\underline{q}$ telles que $T \circ T' = Y_{\underline{r}_i}$.

Rappelons (remarque 2) que dans le Jeu de Taquin on pousse les cases d'un tableau gauche dans la direction sud-ouest, c'est-à-dire que si P est une case de T dans la $k^{\text{ième}}$ ligne, $\ell^{\text{ième}}$ colonne, on retrouve la case dans $\check{T} = T \circ T'$ dans la $k'^{\text{ième}}$ ligne, $\ell'^{\text{ième}}$ colonne avec $k' \leq k$ et $\ell' \leq \ell$.

Supposons $T \circ T' = Y_{\underline{r}_i}$. Le tableau T est un tableau de Young semi-standard, donc une case P de T dans la $k^{\text{ième}}$ ligne est remplie d'un nombre $N \geq k$.

Supposons qu'on retrouve la case dans $Y_{\underline{r}_i}$ dans la $k'^{\text{ième}}$ ligne. D'après la définition de $Y_{\underline{r}_i}$, la case est donc remplie de k', et on a $N = k'$.

Mais plus haut on a vu que $k' \leq k$, donc $N \geq k \geq k' = N$, ce qui implique que $k = k' = N$. On a prouvé : pour que $T \circ T' = Y_{\underline{r}_i}$, on doit avoir nécessairement $T = Y_{\underline{p}}$. De plus,

$$a_i = \sharp\{T' \mid T' \text{ semi-standard de type } \underline{q},\ Y_{\underline{p}} \circ T' = Y_{\underline{r}_i}\}$$

Cette condition peut être traduite en une condition sur le remplissage du tableau T'.

Soit $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{Q}^n$, et soit T un tableau de Young semi-standard de type $\underline{q}$. Notons $w_T = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_s)$ le mot associé à T.

Définition. Le vecteur $\underline{\nu}(T) := e_{w_1} + e_{w_2} + \ldots + e_{w_s} \in \mathbf{Z}^n$ est appelé le *poids* de T.

Soit $\underline{p}$ une deuxième partition de longueur n

Définition. Le tableau T est appelé $\underline{p}$-*dominant* si tous les vecteurs :

$$\begin{aligned}
&\underline{\nu}_0 := \underline{p},\\
&\underline{\nu}_1 := \underline{p} + e_{w_1},\\
&\underline{\nu}_2 := \underline{p} + e_{w_1} + e_{w_2}\\
&\underline{\nu}_3 := \underline{p} + e_{w_1} + e_{w_2} + e_{w_3}\\
&\ldots\ldots\\
&\underline{\nu}_s := \underline{p} + e_{w_1} + e_{w_2} + \ldots + e_{w_s} = \underline{p} + \underline{\nu}(T)
\end{aligned}$$

sont des partitions (= les coefficients forment une suite décroissante au sens large).

Exercice. Prouver que cette définition est équivalente à la définition d'une «lattice permutation» dans [5].

Théorème 3. (Règle de Littlewood-Richardson) *La multiplicité a_i de $s(\underline{r}_i)$ dans le produit*

$$s(\underline{p}) \circ s(\underline{q}) = \sum_{\substack{\text{T semi-standard, de type } \underline{p} \\ \text{T' semi-standard, de type } \underline{q}}} T \circ T' = \sum_{i=1}^{t} a_i s(\underline{r}_i)$$

est égale au cardinal de l'ensemble des tableaux semi-standard de type $\underline{q}$ tels que T est $\underline{p}$-dominant et $\underline{r} = \underline{p} + \underline{\nu}(T)$:

$$a_i = \sharp\{T \mid T \textit{ semi-standard de type } \underline{q},\ \underline{p}\textit{-dominant et } \underline{r}_i = \underline{p} + \underline{\nu}(T)\}.$$

6. Représentations et tableaux

Soit $G := GL_n(\mathbf{C}) = \{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid \det A \neq 0\}$ le groupe des matrices complexes carrées inversibles d'orde n. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension m. Fixons une base et identifions le groupe $GL(V)$ des automorphismes de V avec $GL_m(\mathbf{C})$.

Une *repésentation* de G sur V est une application

$$\rho : GL_n(\mathbf{C}) \longrightarrow GL(V) \text{ telle que } \rho(gh) = \rho(g)\rho(h)\ \forall g, h \in G.$$

Soit $\rho_{i,j} : G \to \mathbf{C}$ les fonctions telles que $\rho(g) = (\rho_{i,j}(g))$. La représentation est appelée *représentation polynômiale* si les fonctions $\rho_{i,j}$ sont les restrictions de fonctions polynômiales définies sur l'ensemble $M_m(\mathbf{C})$ ($\supset G = GL_n(\mathbf{C})$) des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Remarque 3. La définition d'une représentation polynômiale est indépendante du choix de la base.

Exemple. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$ et soit

$$\{e_{\underline{i}} := e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\}$$

la base canonique correspondante de $\Lambda^r\mathbf{C}^n$. Pour $g \in G$ soit $\rho(g) : \Lambda^r\mathbf{C}^n \to \Lambda^r\mathbf{C}^n$ l'application linéaire définie par

$$\rho(g)(e_{\underline{i}}) := (ge_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (ge_{i_r}).$$

Il est facile à vérifier que ρ définit une représentation de G sur $\Lambda^r\mathbf{C}^n$. Soit $g \in G$ la matrice $g = (g_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$. Rappelons que

$$(ge_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (ge_{i_r}) = \sum_{\substack{\underline{j} := (j_1, \ldots, j_r) \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n}} \det(g_{\underline{i},\underline{j}}) e_{\underline{j}}, \quad \text{où} \quad g_{\underline{i},\underline{j}} = \begin{pmatrix} g_{i_1,j_1} & g_{i_1,j_2} & \cdots & g_{i_1,j_r} \\ g_{i_2,j_1} & g_{i_2,j_2} & \cdots & g_{i_2,j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{i_r,j_1} & g_{i_r,j_2} & \cdots & g_{i_r,j_r} \end{pmatrix}.$$

Les éléments de la matrice de $\rho(g)$ sont donc les mineurs de g d'ordre r. Cette représentation est un exemple de représentation polynômiale.

Le *caractère* $\mathrm{Char}(V)$ d'une représentation $\rho : G \to GL(V)$ est la fonction

$$\mathrm{Char}(V) : G \to \mathbf{C}, \quad g \mapsto \text{ trace de } \rho(g).$$

Le nom caractère vient du fait que la représentation est complètement déterminée par $\mathrm{Char}(V)$, c'est-à-dire si $\mathrm{Char}(V) = \mathrm{Char}(V')$ comme fonction sur G, alors les représentations sont isomorphes.

Soit $H \subset G$ le sous-groupe des matrices diagonales et soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation polynômiale. L'ensemble D des matrices diagonalisables est *Zariski-dense* dans G, c'est-à-dire, que le seul polynôme f (défini sur $M_n(\mathbf{C})$) qui s'annule sur D est le polynôme $f = 0$. En conséquence, pour une représentation polynômiale nous savons que $\mathrm{Char}(V)$ est déjà déterminée par sa restriction à D. De plus, $\mathrm{Char}(V)$ est invariante par conjugaison : $\mathrm{Char}(V)(g) = \mathrm{Char}(V)(hgh^{-1})$. La trace est donc déjà déterminée par sa restriction à H. Pour le reste de cet article nous considérons donc $\mathrm{Char}(V)$ plutôt comme une fonction sur H : $\mathrm{Char}(V)(h) :=$ la trace de $\rho(h)$.

Une représentation de G sur V est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces de V, stables par $\rho(g)$ pour tout $g \in G$, sont 0 et V.

Notons que toute représentation polynômiale V de G (de dimension finie) est la somme directe de représentations polynômiales irréductibles : $V = V(\underline{r}_1) \oplus \ldots \oplus V(\underline{r}_s)$. Pour étudier les représentations polynômiales de G, il suffit donc de considérer les représentations polynômiales irréductibles.

Le lien entre la combinatoire qu'on a traitée dans les sections précédentes et la théorie des représentations de G est donné par la classification des représentations polynômiales irréductibles de G et leurs caractères :

Théorème 4. *Les représentations irréductibles polynômiales sont en bijection avec les partitions de longueur n.*

Pour une partition $\underline{p}$ notons $V(\underline{p})$ l'espace vectoriel correspondant à la représentation polynômiale irréductible associée.

Exemples. $V((1)) = \mathbf{C}^n$, $V((k))$ est la $k^{\text{ième}}$ puissance symétrique $S^k\mathbf{C}^n$ de $\mathbf{C}^n$, et $V(\underbrace{(1,1,\ldots,1)}_{r})$ est la $r^{\text{ième}}$ puissance alternée $\Lambda^r\mathbf{C}^n$ de $\mathbf{C}^n$.

Soit $\underline{t} = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ un élément de H et soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation polynômiale. Pour $\underline{q} \in \mathbf{N}^n$ notons

$$V_{\underline{q}} := \{v \in V \mid \rho(\underline{t})(v) = (t_1^{q_1} \cdots t_n^{q_n})v \; \forall \underline{t} \in H\},$$

le sous-espace des vecteurs propres communs des éléments de H, de valeur propre $t_1^{q_1} \cdots t_n^{q_n}$. On peut montrer que V est la somme directe de tels sous-espaces :

$$V = \bigoplus_{\underline{q} \in \mathbf{N}^n} V_{\underline{q}}.$$

Soit $x_i : H \to \mathbf{C}$ la projection définie par $x_i(\underline{t}) := t_i$, alors le caractère $\mathrm{Char}(V)$ s'écrit :

$$\mathrm{Char}(V) = \sum_{\underline{q} \in \mathbf{N}^n} (\dim V_{\underline{q}}) x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$$

Le caractère d'une représentation irréductible $V(\underline{p})$ peut être calculé à l'aide des tableaux de Young semi-standard de type $\underline{p}$. Soit T un tel tableau et soit $\underline{\nu}(T) = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ le poids de T. Nous utiliserons l'abréviation suivante : $\underline{x}^{\underline{\nu}(T)} := x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}$.

Théorème 5.

$$\mathrm{Char}(V(\underline{p})) = \sum_{\substack{T \ type \ \underline{p} \\ semi-standard}} x^{\underline{\nu}(T)}$$

Remarque 4. La théorie des représentations de $GL_n(\mathbf{C})$ a été étudiée par I. Schur au début de ce siècle. Les résultats donnés plus haut sont tous plus ou moins implicitement dans les travaux de Schur. Implicitement, parce que, par exemple, la notion de tableau (de Young) a été introduite par Young seulement pendant les années trente de ce siècle. L'idée de représenter une partition par un diagramme a été introduite par Ferrers et Sylvester. Le diagramme de «Young» $D(\underline{p})$ est donc souvent aussi appelé le diagramme de «Ferrers».

Nous avons un homomorphisme d'algèbre naturel de $\mathcal{P}$ dans l'anneau des polynômes $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$, définie par $T \mapsto \underline{x}^{\underline{\nu}(T)}$ pour un tableau T de Young semi-standard. Le Théorème 5 nous dit que l'image de

$$s(\underline{p}) = \sum_{T \text{ semi-standard, de type } \underline{p}} T$$

dans $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ est le caractère $\mathrm{Char}(V(\underline{p}))$ de $V(\underline{p})$.

Une façon de produire une nouvelle représentation de deux représentations U, V données, est de considérer le produit tensoriel $U \otimes V$. Soit $B_1 = \{u_1, \ldots, u_m\}$ une base de U et soit $B_2 = \{v_1, \ldots, v_l\}$ une base de V, rappelons que $B = \{u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, \ldots, u_m \otimes v_l\}$ est une base de $U \otimes V$. On en déduit facilement que

$$\mathrm{Char}(U \otimes V) = \mathrm{Char}(U)\,\mathrm{Char}(V).$$

La représentation $V(\underline{p}) \otimes V(\underline{q})$ est la somme directe de représentations irréductibles :

$$V(\underline{p}) \otimes V(\underline{q}) = \sum_{j=1}^{t} a_j V(\underline{r}_j),$$

où a_j est la multiplicité de $V(\underline{r}_j)$ dans le produit tensoriel. On obtient pour le caractère :

$$\mathrm{Char}(V(\underline{p}) \otimes V(\underline{q})) = \mathrm{Char}(V(\underline{p}))\,\mathrm{Char}(V(\underline{q})) = \sum_{j=1}^{t} a_j\,\mathrm{Char}(V(\underline{r}_j)).$$

D'autre part, l'image de $s(\underline{p})$ est $\mathrm{Char}(V(\underline{p}))$, l'image de $s(\underline{q})$ est $\mathrm{Char}(V(\underline{q}))$, et l'image de $s(\underline{p}) \circ s(\underline{q})$ est le produit $\mathrm{Char}(V(\underline{p}))\,\mathrm{Char}(V(\underline{q}))$. Les multiplicités a_j sont donc les mêmes que les multiplicités qu'on a calculées avec la règle de Littlewood-Richardson (Théorème 3).

Corollaire. *La multiplicité a_j de $V(\underline{r}_j)$ dans le produit tensoriel*

$$V(\underline{p}) \otimes V(\underline{q}) = \sum_{j=1}^{t} a_j V(\underline{r}_j),$$

est égale au cardinal de l'ensemble des tableaux semi-standard de type $\underline{q}$ tels que T est $\underline{p}$-dominant et $\underline{r} = \underline{p} + \underline{\nu}(T)$:

$$a_i = \sharp\{T \mid T \text{ semi-standard de type } \underline{q},\ \underline{p}\text{-dominant et } \underline{r}_i = \underline{p} + \underline{\nu}(T)\}.$$

Bibliographie

[1] D. E. Knuth, *Permutations, matrices, and generalized Young tableaux,* Pacific Journal of Math. **34** (1970), 709-727.

[2] A. Lascoux, M. P. Schützenberger, *Le monoïde plaxique,* in *Non-commutative structures in algebra and geometric combinatorics,* Quad. Ricerca Sci. **109** (1981), 129-156.

[3] D. E. Littlewood, A. R. Richardson, *Group characters and algebra,* Phil. Trans. A, **233** (1934), 99-141.

[4] D. E. Littlewood, *The theory of group characters and matrix representations of groups,* Oxford University Press, London, (1950).

[5] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall polynomials,* Oxford University Press, London, (1979).

[6] G. B. Robinson, *On the representation of the symmetric group,* Amer. J. Math., **69** (1938), 745–760.

[7] M. P. Schützenberger, *La correspondance de Robinson, Combinatoire et représentation du groupe symétrique,* Springer Lecture notes, **579** (1976).