## A VOS STYLOS

### PROBLÈME 52

**Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :**

Soient trois droites $D_1$,$D_2$, $D_3$ dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient $P_1$, $P_2$, $P_3$ les perpendiculaires communes resp. de $(D_2, D_3)$, $(D_3, D_1)$, $(D_1, D_2)$, puis $U_1$, $U_2$, $U_3$ les perpendiculaires communes resp. de $(D_1, P_1)$, $(D_2, P_2)$, $(D_3, P_3)$.
Montrer que les trois droites $U_1$, $U_2$, $U_3$ rencontrent à angle droit une dixième droite $Z$ (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

---

### PROBLÈME 53

**Énoncé (proposé par D. Dumont) :**

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des $2-$mélanges réguliers (pour la définition d'un $2-$mélange, voir les articles sur les tours de cartes dans les numéros 90 et 93 de l'Ouvert).
1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.
2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de $n$ pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.

**Indication :** Pour la première question, on pourra d'abord montrer le résultat général suivant : si $f$ est une fonction affine de $Z/mZ$ dans $Z/mZ$ de la forme $f(x) = ax + b$, où $a$ est un élément inversible dans l'anneau $Z/mZ$ et $b$ un élément quelconque, alors $f$ est une permutation d'ordre au plus égal à $m$.
Pour la deuxième question, on examinera le cas où $n = 3^k$.

---

### PROBLÈME 54

**Énoncé (proposé par D. Dumont) :**

1°) Montrer que si $x$, $y$ et $z$ sont des entiers impairs, la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier congru à 3 modulo 8.
2°) Soit $n$ un entier congru à 3 modulo 8. Montrer, si possible par une bijection, que le nombre de triplets ordonnés $(x, y, z)$ d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \tag{1}$$

est égal au nombre de triplets ordonnés $(x, y, z)$ d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$(2) \qquad xy + yz + zx = n.$$

*Exemple.*— n=35. L'équation (1) possède six solutions : $(1,3,5)$, $(1,5,3)$, $(3,1,5)$, $(3,5,1)$, $(5,1,3)$ et $(5,3,1)$ ; l'équation (2) possède également six solutions : $(1,5,5)$, $(5,1,5)$, $(5,5,1)$, $(1,1,17)$, $(1,17,1)$ et $(17,1,1)$.

---

## PROBLÈME 55

**Énoncé (proposé par J. Lefort) :**

Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = f(x+1)$$

dans l'ensemble le plus vaste possible.

---

## PROBLÈME 56

**Énoncé (proposé par M. Emery) :**

1°) Soient $a, b, r$ des réels tels que $a < b$ et $0 < b - a < 2r$. Soit $u$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$, telle que $u(a) = u(b)$, et satisfaisant la propriété suivante :
pour tout $z$ intérieur à $[a, b]$, il existe $c$ et $d$ tels que $a < c < z < d < b$ et tels que les trois points du graphe de $u$ d'abscisses $c$, $z$ et $d$ se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon $r$, c'est-à-dire donné par une équation de type $y = p + \sqrt{r^2 - (x-q)^2}$.
Montrer que le graphe de $u$ est lui-même un arc de cercle de rayon $r$.
*Remarque.*— On peut, dans un premier temps, chercher une démonstration en imposant des hypothèses plus fortes à la fonction $u$ (par exemple des conditions de différentiabilité).
2°) Soient $J$ un intervalle ouvert, $r$ un réel $> 0$ et $u$ une fonction continue sur l'adhérence de $J$. On suppose que pour tout $z$ de $J$ il existe $c$ et $d$ dans $J$ tels que $c < z < d$ et tels que les trois points du graphe de $u$ d'abscisses $c$, $z$ et $d$ se trouvent sur un même arc de demi-cercle supérieur de rayon $r$.
Montrer que $J$ est borné, de longueur au plus $2r$, et que le graphe de $u$ est un arc de cercle de rayon $r$.