LE POLYTECHNICIEN, L'EXPONENTIELLE ET LES NÉNUPHARS

Edith KOSMANEK

Docteur 3e cycle (mathématiques)

Fax : 01 60 74 09 00

Dans son beau livre intitulé : "L'équation du nénuphar" (Calmann-Lévy, 1998) Albert Jacquard reprend, entre autres, l'exemple classique de la croissance exponentielle des nénuphars : la surface occupée, dans une pièce d'eau, par ces fleurs spectaculaires, double par unité de temps (Jacquard choisit le jour pour unité, ce qui paraît excessif, mais peu importe!).
Le célèbre polytechnicien-généticien-démographe, ex-directeur de l'INED, part de l'équation-standard (page 71) :

$$x(t) = x(o)e^{kt}. \tag{1}$$

Une première interprétation erronée apparaît (page 73) : "le paramètre k caractérise l'évolution par unité de temps". Dans le contexte, cela signifie que Jacquard considère k comme étant le taux de croissance de $x(t)$ par unité de temps, alors que le paramètre k est le taux **instantané** de croissance, défini par :

$$\frac{dx}{x} = kdt.$$

Le taux de croissance **par unité de temps**, notons-le K, est défini par :

$$K = \frac{\Delta x}{x} = \frac{x(t+1) - x(t)}{x(t)} = e^k - 1.$$

L'équation d'évolution, avec ce paramètre, s'écrit :

$$x(t) = x(o)(1 + K)^t. \tag{2}$$

Il est vrai que, pour une croissance à taux faible, les deux taux k et K sont voisins : k faible $\Rightarrow e^k \simeq 1 + k \Rightarrow K \simeq k$.
Mais cette approximation n'est plus valable pour la croissance du nénuphar puisqu'ici : $K = 100\ \% = 1$ et $k = \ln(1 + K) = \ln 2 \simeq 0,69$.
L'équation d'évolution peut s'obtenir par (1) ou (2) :

$$x(t) \simeq x(o)e^{0,69t} \simeq x(o)(1+1)^t = x(o)2^t$$

Jacquard poursuit (toujours page 73) :
"Par exemple, $k = 1,03$ signifie une augmentation de 3 % au cours de la durée prise pour unité".
Ce doit être une coquille! En effet : $x(t) = x(o)e^{1,03t} \simeq x(o)(2,80)^t$ signifie une croissance de 180 % par unité de temps!
Acceptons la coquille et remplaçons $k = 1,03$ par $k = 0,03$. Il vient : $x(t) = x(o)e^{0,03t} \simeq x(o).(1,0305)^t$ donc une croissance de 3,05 % par unité de temps. On vérifie qu'à croissance faible, les deux taux $k = 0,03$ et $K = 0,0305$ sont effectivement très voisins et sont confondus dans la pratique.
Mais Jacquard récidive (page 74) :
"L'évolution (la croissance des nénuphars) est donnée par l'équation (1) avec $k = 1$"
Non! L'équation $x(t) = x(o)e^t \simeq x(o)(2,718)^t$ n'est pas adéquate pour décrire le doublement par unité de temps!
C'est dans l'équation (2) qu'il faut remplacer K par 1, d'où $x(t) = x(o)2^t$.
Je passe sur l'étourderie de la page 75 qui consiste, à deux reprises, à escamoter le 25e jour de l'évolution. Peut-être, dans l'optique de Jacquard, les nénuphars ne se reproduisent-ils pas le dimanche?
J'arrive page 76 et je vérifie consciencieusement sur ma calculette une autre assertion : "La somme de 1 franc, placée à 3 % l'an au début de l'ère chrétienne, vaudrait aujourd'hui 38 millions de milliards de milliards de francs".
L'année de parution du livre étant 1998, je fais :

$$x(o) = 1; K = 0,03; t = 1998 \text{ dans l'équation (2)}$$

d'où : $x(1998) = (1,03)^{1998} \simeq 44,5.10^{24}$!
Encore à côté de la plaque! En tâtonnant, j'obtiens comme année la plus conforme au résultat annoncé : 1993.
En effet :

$$\begin{aligned}(1,03)^{1992} &\simeq 37,3.10^{24}\\(1,03)^{1993} &\simeq 38,4.10^{24}\\(1,03)^{1994} &\simeq 39,6.10^{24}\end{aligned}$$

Jacquard a dû effectuer ses petits calculs en 1993 et, pressé par le temps, n'a pas opéré la mise à jour en 1998!
Quand on publie deux livres par an, pour exploiter un bon filon, est-ce bien surprenant?
On remarque en passant qu'avec l'équation (1), donc en confondant taux instantané et taux par unité de temps, on obtient :

$$x(1993) = e^{0,03.1993} \simeq 92,6.10^{24}$$

alors qu'avec (2) :

$$x(1993) = (1 + 0,03)^{1993} \simeq 38,4.10^{24}.$$

Ici, le délai étant très long, même des taux faibles mènent à des résultats très différents !
Et je n'insiste pas sur la mauvaise habitude qui consiste à présenter comme valeur exacte ce qui n'est qu'une approximation (toujours page 76) : $100(1,03)^{100} = 1920$.
Notons enfin qu'il eût été plus judicieux d'ajuster un modèle logistique plutôt que le modèle exponentiel pour cette étude de croissance végétale, croissance forcément limitée ; les deux modèles ne sont voisins que dans la première phase du phénomène, avant l'inflexion et la tendance vers une asymptote.
Et Jacquard conclut ainsi :
"Ce n'est pas seulement aux jeunes qu'il est nécessaire de faire comprendre le piège que constitue une croissance exponentielle."
En effet ! Même les polytechniciens chevronnés peuvent nécessiter une urgente mise à jour ! Sans rancune, Mr Jacquard ! Même si, au cours de notre brève correspondance, vous avez renâclé quelque peu à reconnaître humblement vos torts !
Exponentiellement vôtre.

P.S. : Petit tableau de correspondance entre taux instantané k et taux par unité de temps K, pour l'équation d'évolution :

$$x(t) = x(o)e^{kt} = x(o)(1 + K)^t$$

K	0,01	0,05	0,10	0,20	0,50	0,70	1,00
k=ln$(1+K)$	0,00995	0,04879	0,09531	0,18232	0,40547	0,53063	0,69315

La coutume est de confondre k et K pour $K \leq 10\%$ et t "pas trop grand" !