

VERSIONS POLYÉDRIQUES DU RETOURNEMENT DE LA SPHÈRE, RETOURNEMENT DU CUBOCTAÈDRE.

Conception : Bernard Morin, Professeur à l'U.L.P. de Strasbourg.

Réalisation : Richard Denner, La Providence Strasbourg, annexe de Vendenheim.

Ma plus vive reconnaissance va bien sûr à Bernard Morin pour les très nombreuses explications qu'il m'a données, ainsi que pour tous les efforts qu'il a déployés pour me transmettre les idées qu'il avait conçues, mais également à d'autres personnes sans qui ce travail n'aurait pas la forme actuelle. Je voudrais en particulier remercier ici François Apéry, Jean Brette et Monique Sicard pour l'intérêt et les encouragements qu'ils m'ont manifestés ainsi que Michèle Audin qui a fait la lecture critique du manuscrit. Merci également à l'équipe de L'Ouvvert pour leur sympathique accueil.

R. D.

Deuxième partie : de la surface de Boy vers un modèle central du retournement du cuboctaèdre

Introduction

En s'inspirant de la surface de Boy, on se propose de décrire deux modèles, de complexité croissante, qui vont nous mener au cœur du problème du retournement du cuboctaèdre. Le premier, appelé **modèle central ouvert**, a eu une importance primordiale dans ce travail. En effet, sa réalisation contient en germe celle des suivants. Le second, appelé **modèle central fermé**, sera la clé du problème. C'est lui, que l'on déformera pour aboutir en définitive au cuboctaèdre.

Contrairement à la surface de Boy, ils possèdent deux faces que l'on aperçoit alternativement lorsque l'on passe d'un sommet C_i au sommet suivant C_{i+1} . De plus, ils ont un **point quadruple**. Cette particularité représente l'une des principales difficultés qui a fait obstacle pour résoudre le problème du retournement de la sphère.

1. Modèle central ouvert

Sa construction est semblable à celle de la surface de Boy à part qu'elle présente un symétrie d'ordre 4 par rapport à l'axe Oz. D'autre part, les quatre pentagones concaves sont en position verticale ; ils sont fabriqués en carton bicolore. On observera en particulier le changement de couleur quand on passe de l'un à l'autre.

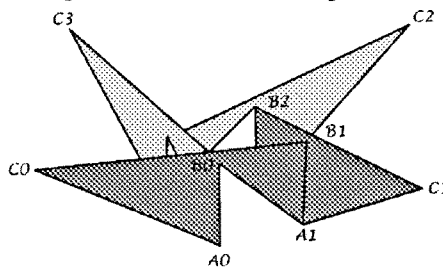


FIGURE 1 : ASSEMBLAGE DES PENTAGONES DU MODÈLE CENTRAL OUVERT.

Ne dirait-on pas un manège de quatre chevaux aux longs cous solidement harnachés, la patte avant de l'un rejoignant la patte arrière de l'autre ? Ce genre de comparaison est utile pour comprendre et communiquer l'ensemble du processus. Dans le dialogue avec Bernard Morin, il fut essentiel. C'est en imaginant la déformation des pentagones qu'il a découvert le chemin de l'ensemble du retournement.

On peut à présent donner une description de l'ensemble du modèle central ouvert. À titre indicatif le modèle présent, ici admet les coordonnées suivantes :

Sommets :

$$A_0 = (1; -1; 0) \quad B_0 = (1; -1; 1) \quad C_0 = (1; -5; 5/3)$$

Les autres sommets $A_i, B_i, C_i, i = 1 \text{ à } 3$ se déduisent des sommets précédents par rotation autour de l'axe Oz de sens direct et d'angles de mesures respectives $90^\circ, 180^\circ$ et 270° .

Faces pentagonales verticales : $P_i = A_i B_i A_{i+1} B_{i+1} C_i$ (les chevaux)

Faces triangulaires : $Q_i = C_i A_{i+2} B_{i+1}$ (les faces dorsales)

$R_i = C_i A_i A_{i+2}$ (les faces ventrales).

Dans cette description l'indice i doit être compris modulo 4.

Le **point quadruple** appartient aux quatre plans Q_i .

La figure suivante laisse entrevoir l'agencement des différentes faces, seuls les pentagones sont opaques, toutes les autres faces sont translucides. La ligne d'auto-intersection est indiquée en noir.

Un observateur extérieur verra les pointes aboutissant aux points C_0 et C_2 en **rouge** et celles aboutissant aux points C_1 et C_3 en **bleu** !

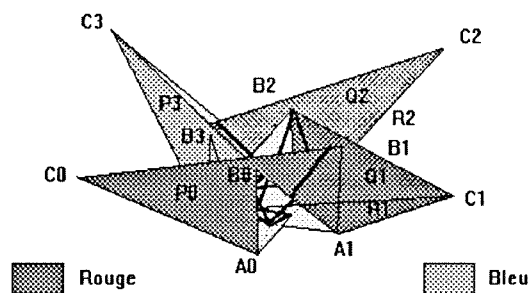


FIGURE 2 : MODÈLE CENTRAL OUVERT.

Remarquons que le point B_0 est au-dessus du plan Q_1 et qu'il existe comme une amorce d'ouverture vers l'intérieur du modèle sous l'aisselle B_0 mais qui reste cependant bouchée dans le fond. D'où la dénomination **modèle central ouvert**.

Faisons un petit exercice d'imagination : penchons les chevaux vers l'intérieur du manège comme s'ils voulaient rétablir leur équilibre lorsqu'il se met à tourner. De façon plus précise, inclinons les quatre pentagones vers l'axe Oz en les faisant pivoter autour des cotés du carré de base $A_0 A_1 A_2 A_3$.

Le point B_0 va peu à peu se rapprocher du plan Q_1 . Si on compare ce plan à un niveau d'eau, les deux pattes du « cheval » P_0 vont peu à peu s'enfoncer dans l'eau. On peut faire en sorte que B_0 soit dans le plan Q_1 . Les quatre chevaux s'appuient alors contre une pyramide régulière dont la base est la moitié d'un octaèdre régulier. Pour cela il est nécessaire que l'arête C_1A_3 vienne « mordre » la patte arrière A_0B_0 de P_0 . On obtient ainsi le **modèle central fermé** qui sera un point de vue de choix pour comprendre le retournement du cuboctaèdre

2. Modèle central fermé

Les notations sont les mêmes que pour le modèle central ouvert, mais de plus, les points B_i appartiennent aux plans Q_{i+1} .

Sommets : $A_0 = (1, -1, 0)$ $B_0 = (1/3, -1/3, 1)$ $C_0 = (-1/7, -11/7, 12/7)$

Les quatre plans P_i se rencontrent en un même point S , sommet de la pyramide de coordonnées $(0, 0, 3/2)$. Les quatre plans Q_i se rencontrent en un même point Q de coordonnées $(0, 0, 1)$. Les quatre plans R_i se rencontrent à l'origine O du repère. Les plans $V_i = A_iA_{i+1}C_{i+1}$ (ces plans ne constituent pas de faces du polyèdre) se rencontrent au point $(0, 0, -3)$.

Retenons surtout pour la suite que les points A_i ont comme cote 0, les points B_i ont comme cote 1 et que celle des points C_i est $12/7 \sim 1,7$.

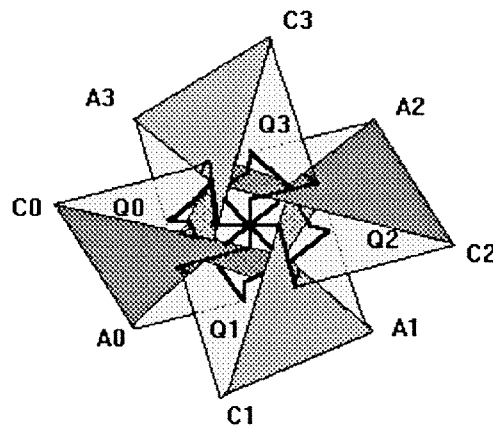


FIGURE 3 : VUE DE DESSUS DU MODÈLE CENTRAL FERMÉ.

Une remarque importante : l'arête (C_2A_0) vient de traverser la patte arrière du cheval rouge P_0 , ce faisant elle donne naissance à une « dent » qui prolonge la partie interne située sous le point quadruple du modèle et que l'on appellera « chambre intérieure ». Elle sera davantage visible sur la figure suivante. Une vue de profil permet de mieux voir l'imbrication des différentes faces.

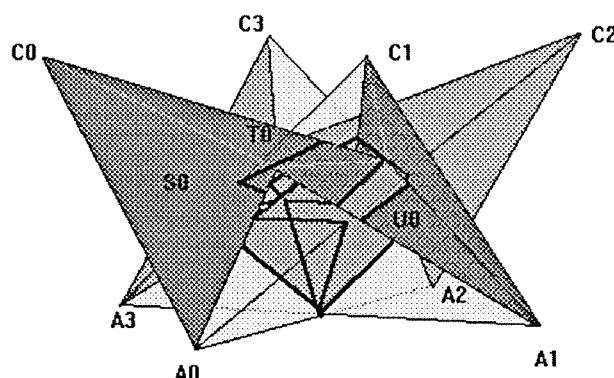


FIGURE 4 : MODÈLE CENTRAL FERMÉ, MISE EN ÉVIDENCE DE LA CHAMBRE INTÉRIEURE ET TRIANGULATION DU PENTAGONE P_0 , $P_0 = S_0 \cup T_0 \cup U_0$.

Cette dernière décomposition, déjà mise en évidence dans le cadre de la surface de Boy, prépare la triangulation qui apparaîtra sur le cuboctaèdre que l'on se propose de retourner.

Calculons sa caractéristique d'Euler en tenant compte de la triangulation des pentagones.

On trouve :

$$S = 12, \quad A = 30, \quad F = 20 \quad \text{et donc :} \quad \chi = S - A + F = 2.$$

Ce qui nous laisse tout espoir de pouvoir le déformer en un polyèdre homéomorphe à une sphère.

Ce modèle tel qu'il est représenté ici a été reproduit à partir d'une photographie. Sa réalisation, a demandé une recherche assez longue pour aboutir à une esthétique satisfaisante. Ses dimensions sont telles que les modèles ultérieurs soient de dimensions raisonnables.

Jusqu'à présent les modèles sont présentés sous un aspect statique. La suite fait appel à une **vision dynamique du processus** ! Déplacer un point le long d'une arête, faire pivoter un plan autour d'une droite tout en imaginant les modifications des différents cloisons et celles de la lignes d'auto-intersection n'est pas chose aisée à priori et représente un obstacle certain.

Troisième partie : retournement du cuboctaèdre

Introduction

Au cours de la déformation, appelée homotopie, les sommets des différents polyèdres subissent des **opérations élémentaires** : ils sont astreints à se déplacer le long d'une arête tandis que les faces en mouvement pivotent autour d'une autre arête qui peut éventuellement être fictive comme on le verra dans l'étape 1.

Le cuboctaèdre de départ (étape -22) a sa face externe rouge et sa face interne bleue, le cuboctaèdre final (étape +22) a sa face externe bleue et sa face interne rouge. La transformation, symétrique dans le temps, passe par une étape centrale

(modèle 0) appelée **modèle central fermé** présentant un point quadruple ainsi qu'une symétrie d'ordre 4.

Le chemin que l'on se propose de suivre, est celui de la découverte. Ce qui est remarquable, c'est qu'en six étapes seulement, Bernard Morin a imaginé comment passer de l'immersion centrale à un modèle qui sort du domaine des immersions (modèle 6), c'est-à-dire qui ne comporte plus aucune ligne d'auto-intersection. C'est alors qu'il lui est apparu que ce dernier modèle pouvait, en seize étapes supplémentaires, être transformé en un **cuboctaèdre** !

1. Modifications génériques

Afin de mieux appréhender l'ensemble de la déformation, donnons une idée des modifications qui vont avoir lieu. On appelle modification générique, une modification au cours de laquelle la structure du modèle, et en particulier de sa ligne d'auto-intersection, change de nature. Par exemple, dans le modèle central, on a vu qu'elle comportait un point quadruple. Dès la première opération élémentaire ce point va disparaître laissant la place à quatre points triples.

Il y a des modifications génériques de trois types : D, T et Q.

Une **modification de type D** se produit toutes les fois que deux nappes de la surface immergée entrent en contact en un point isolé. On distingue parmi elles :

– les modifications de types D_0 et D_2 :

La première consiste à amener les deux nappes en contact, puis à les faire se traverser. Il apparaît alors une ligne de points doubles. La deuxième, qui est simplement l'opération inverse de la première, consiste à séparer les deux nappes.

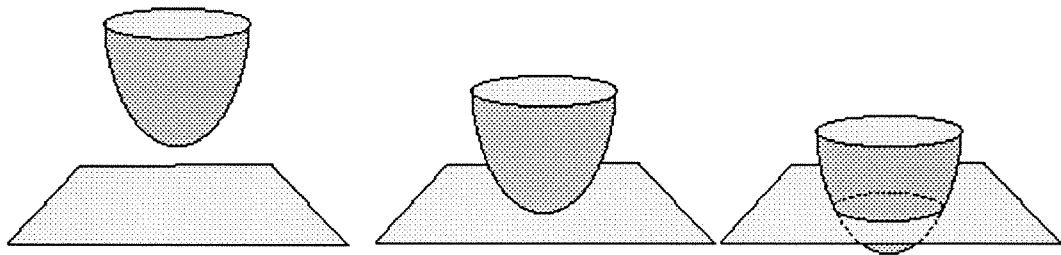
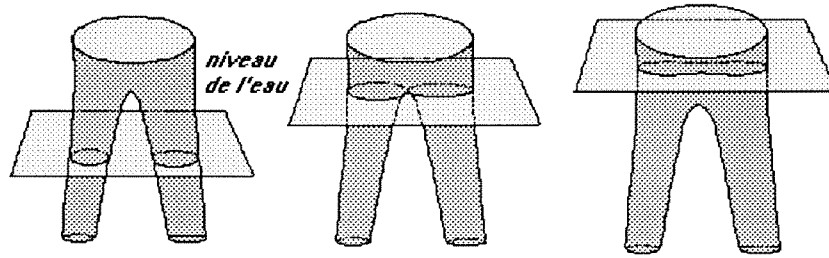


FIGURE 5 : MODIFICATIONS GÉNÉRIQUES DE TYPES D_0 ET D_2 .

– et les modifications de type D_1 :

Elles sont comparables à la montée d'un « plan d'eau » le long d'un pantalon. La ligne de points doubles change de nature à mesure que le plan s'élève : parti de deux composantes séparées au départ, on aboutit à un raccord en forme de X au point de contact entre les deux nappes, puis en définitive à une courbe connexe. Il est essentiel de constater que cette transformation change la communication entre les différentes régions de l'espace. On notera de la même manière la montée ou la descente du plan d'eau.



On reconnaîtra cette situation dans la description du modèle central fermé lorsque le plan dorsal Q_1 vient se mettre en contact avec le point B_0 tout en traversant la patte avant du cheval rouge P_0 et en même temps la patte arrière du cheval bleu P_3 .

On peut également donner l'image de la toiture d'une maison cruciforme. Lorsque l'on pousse les deux arêtes faîtières l'une vers l'autre, on est exactement dans la situation du modèle central fermé où les deux arêtes A_0A_2 et A_1A_3 se rencontrent.

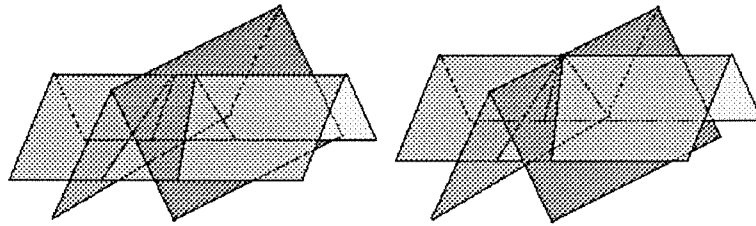


FIGURE 6 : MODIFICATION GÉNÉRIQUE DE TYPE D_1 .

Une modification de type T se produit lorsque trois nappes de l'immersion passent par un même point.

Modifications de type $T+$ et $T-$:

Une modification de type $T+$ se produit lorsque l'on approche une surface cylindrique de l'arête d'un dièdre, et que l'on continue le mouvement au-delà de cette arête. Il se forme une paire de points triples ainsi qu'une région en forme de tranche de mandarine. Inversement une modification de type $T-$ défait les points triples.

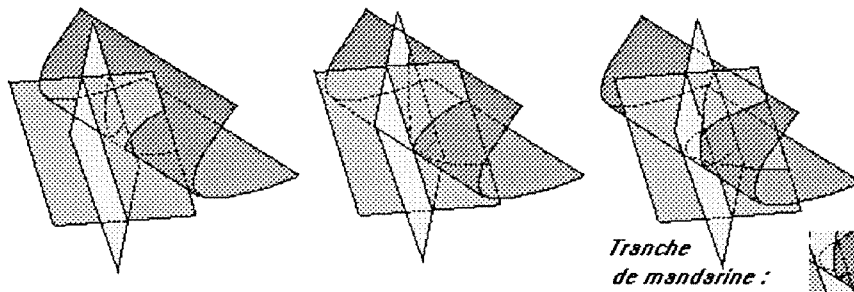


FIGURE 7 : MODIFICATIONS GÉNÉRIQUES DE TYPE $T+$ ET $T-$.

Une modification de type Q se produit lorsque l'immersion vient à présenter un point quadruple.

Modification de type Q :

Juste avant, et juste après, le passage par le point quadruple, les quatre plans délimitent un tétraèdre. On remarquera que ses quatre sommets sont des points triples formés par l'intersection de trois plans chacun.

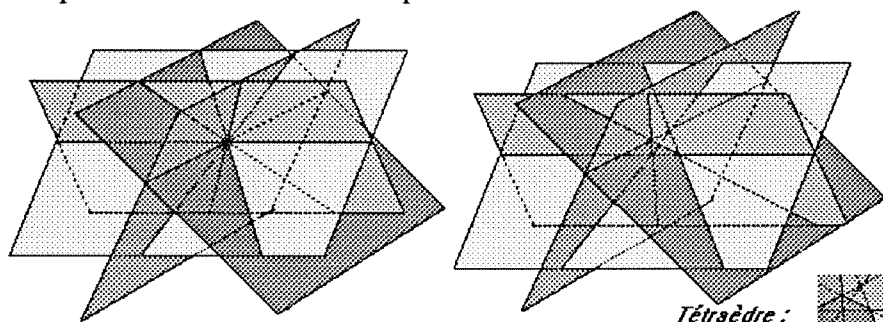
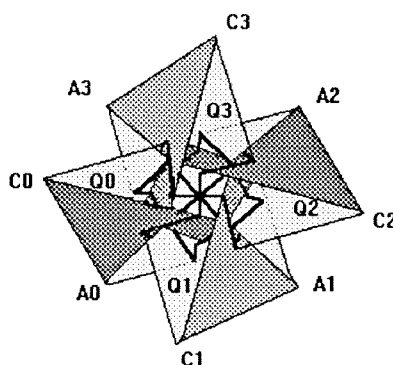


FIGURE 8 : MODIFICATION GÉNÉRIQUE DE TYPE Q.

2. Les six étapes fondamentales

Les modèles suivants visualisent les six étapes fondamentales de l'homotopie transformant le modèle central fermé en un modèle homéomorphe à une sphère.

Modèle central fermé :



ÉTAPE 0 : MODÈLE CENTRAL FERMÉ.

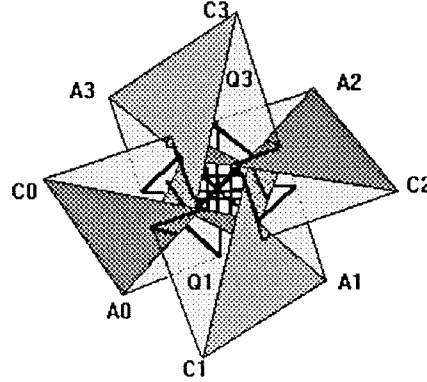
Remarque : les modèles suivants ont tous une symétrie d'ordre 2 par rapport à l'axe Oz.

La première déformation consiste à défaire le point quadruple. Pour cela, on soulève les plans dorsaux Q_1 et Q_3 en les faisant pivoter autour d'une droite qui exceptionnellement n'est pas une droite du polyèdre. Dans ce mouvement, la ligne d'auto-intersection va changer de nature. Le modèle subit une modification générique de type Q.

Modèle n° 1 : Le texte en italique est de Bernard Morin.

« Les points C_1 et C_3 se déplacent à vitesse constante le long des droites (C_1A_1) et (C_3A_3) jusqu'à atteindre la cote $36/19 \cong 1,89$. Dans ce mouvement, les plans Q_1 et Q_3 se redressent en pivotant autour de leurs intersections respectives avec le plan des A_i . Le point B_0 appartient

toujours au plan Q_1 et le point B_1 au plan Q_2 , mais les quatre faces Q_i délimitent à présent un tétraèdre ».



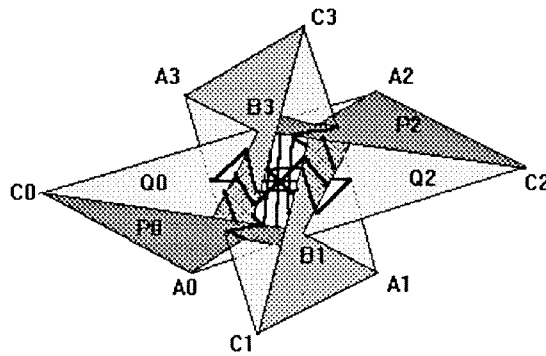
ÉTAPE 1 : RELÈVEMENT DES PLANS Q_i ET Q_3 ET APPARITION D'UN TÉTRAÈDRE.

On remarquera que les sommets de ce tétraèdre sont constitués de **deux paires de points triples** et que l'immersion est donc transverse, ce qui n'était pas le cas du modèle central fermé. Il y a perte de transversalité au moment du passage par l'étape centrale.

La deuxième déformation consiste à redresser les deux plans P_0 et P_2 par un mouvement de rotation autour des droites (A_0A_1) et (A_2A_3) .

Modèle n°2 :

« Les points C_0 et C_2 se déplacent à vitesse constante respectivement le long des droites (C_0A_2) et (C_2A_0) jusqu'à atteindre la cote $20/9 \cong 2,22$. Dans ce mouvement les plans P_0 et P_2 se redressent en pivotant autour de leurs intersections respectives avec le plan des A_i ».



ÉTAPE 2 : LES PLANS P_0 ET P_2 SE REDRESSENT.

Le relèvement de P_0 et P_2 entraîne quatre nouvelles modifications génériques de type D_1 .

Si l'on observe le mouvement du point B_0 sur la droite fixe (C_3B_0) lorsque P_0 se redresse, on remarque que le point B_0 se déplace vers le bas et passe sous le plan Q_1 . De façon analogue, le point B_2 passe sous le plan Q_3 le long de la droite (C_1B_2) . Il s'agit là de deux modifications de type D_1 .

Il en résulte une **ouverture** vers les petites dents aboutissant au points B_0 et B_2 et qui prolongent la chambre intérieure.

Deux autres modifications de type D_1 se produisent en même temps. En effet, sous l'effet du redressement de P_0 et de P_2 , le point B_1 passe au-dessus du plan Q_2 et le point B_3 passe au-dessus du plan Q_0 .

Ce faisant il se crée un passage vers les deux ouvertures précédemment décrites et la chambre intérieure, mise en évidence sur le modèle central, est amenée en communication avec le monde extérieur. On peut donc entièrement **traverser le modèle** en pénétrant par B_1 et en ressortant par B_3 !

Remarques :

– Le redressement des deux plans P_0 et P_2 est fait de telle manière que les points B_0 et B_2 restent au-dessus des plans ventraux R_1 et R_3 . Leur position est cependant extrême.

– Il est très important que les points C_0 et C_2 soient sous les plans R_1 et R_3 afin d'éviter les complications.

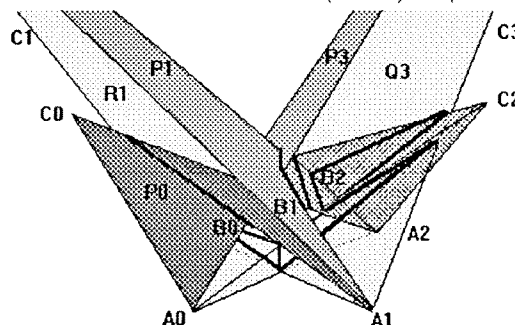
Défaut de généricité :

Lorsque l'arête C_2A_0 , formée par l'intersection des faces Q_0 et R_0 va cesser de rencontrer la face P_1 , elle traverse d'une traite, la « patte arrière » du pentagone P_0 . Leur intersection est alors un segment et non plus un point comme dans les modifications génériques qui ont été décrites. Il s'agit là d'une entorse mineure à la généricité de la déformation. Elle a lieu au temps $t = 25/16 \cong 1,562$ (Il est possible d'éviter ce défaut en s'autorisant à plier légèrement les polygones P_0 et P_2).

La troisième déformation va étirer considérablement les pointes bleues aboutissant à C_1 et C_3 .

Modèle n° 3 :

« Les points C_1 et C_3 se déplacent à vitesse constante respectivement le long des droites (A_1C_1) et (A_3C_3) jusqu'à atteindre la cote $309/37 \cong 8,35$. Dans ce mouvement les plans Q_1 et Q_3 se redressent en pivotant respectivement autour des droites (B_2A_3) et (B_0A_1) ».



ÉTAPE 3 : ÉLEVATION DES POINTS C_1 ET C_3

Les deux paires de points triples toujours présentes sur le modèle 2, vont disparaître sous l'action de **deux modifications de type T-**. Calculs faits, cela se passe au temps $t \cong 2,029$ pour la paire de points triples constituant l'arête

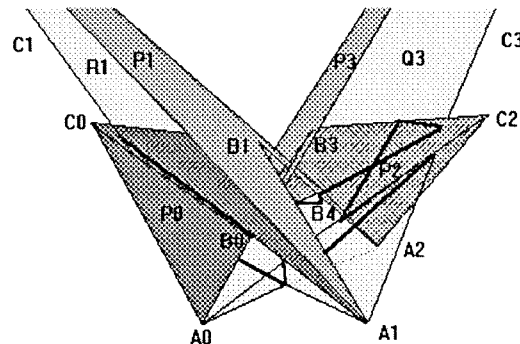
supérieure du tétraèdre et au temps $t = 377/170 \cong 2,217$ pour celle constituant son arête inférieure. C'est également, à ce dernier instant, que les arêtes C_1B_2 et C_3B_0 se croisent.

À partir de là, la courbe d'intersection n'est plus constituée que de points doubles.

Avec cette quatrième déformation, la chambre intérieure va s'ouvrir complètement sur le monde extérieur.

Modèle n°4 :

« Les points B_1 et B_3 se déplacent à vitesse constante respectivement le long des droites (A_1B_1) et (A_3B_3) jusqu'à atteindre la cote 2. Dans ce mouvement les plans Q_0 et Q_2 s'élèvent en pivotant respectivement autour des droites (C_0A_2) et (C_2A_0) ».



ÉTAPE 4 : LES POINTS B_1 ET B_3 S'ÉLÈVENT.

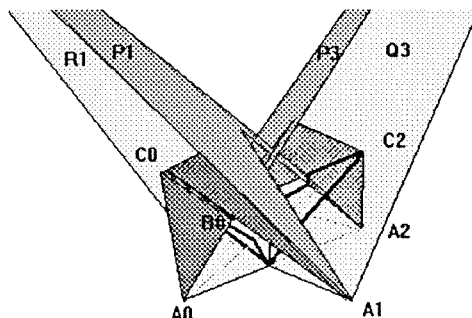
L'élévation des points B_1 et B_3 va provoquer le décroisement des pentagones P_1 et P_3 et, de façon plus globale, le décroisement des deux cornets constituant les pointes C_1 et C_3 . Il s'agit là d'une nouvelle **modification générique de type D₂**. **La chambre intérieure est à présent entièrement ouverte à l'espace extérieur !**

À présent, il ne reste plus qu'à « dégonfler » les pointes C_0 et C_2 ; cela se passe sans nouvelle modification générique, les différentes nappes évoluent simplement l'une par rapport à l'autre. Puis à sortir du domaine des immersions entre les étapes 5 et 6, c'est-à-dire que **la courbe de points doubles va entièrement disparaître !**

Marquons un temps d'arrêt pour observer ce dégonflement.

Halte intermédiaire au temps $t \cong 4,671$:

« Dans le mouvement qui mène de l'étape 4 à l'étape 5, on s'arrête au moment où les points C_0 (resp. C_2) ont comme cote $3/2$. »

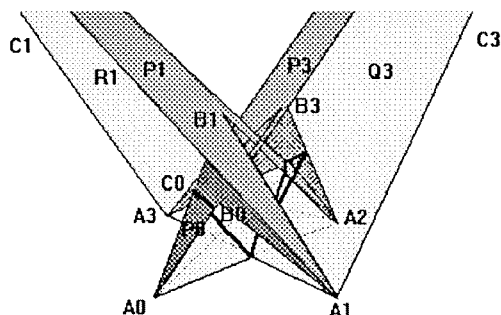


Halte au temps $t \cong 4,671$.

Les pointes rouges vont complètement se résorber, C_0 se rapproche encore de B_0 .

Modèle n°5 :

« Les points C_0 et C_2 descendent à vitesse constante respectivement le long des arêtes (C_0B_0) et (C_2B_2) jusqu'à se trouver sur les segments respectifs $[A_0B_1]$ et $[A_2B_3]$, de sorte les plans Q_0 et R_0 coïncident, de même que Q_2 et R_2 ».



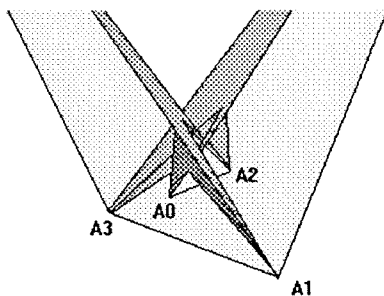
ÉTAPE 5 : LES POINTES C_0 ET C_2 SE DÉGONFLENT.

Les pentagones P_0 et P_2 viennent de prendre la forme de deux quadrilatères concaves. Les points A_0 et A_2 vont s'élever. Ce faisant, les arêtes A_0A_2 et A_1A_3 se décroissent en achevant une modification générique de type D_1 commencée et en attente depuis le temps $t = -5$. Ce phénomène constitue une nouvelle entorse à la généricité de la déformation, l'avantage est que les modèles en carton tiennent debout !

Nous voici enfin arrivés au moment où toute ligne de points doubles va disparaître. Sur le chemin vers l'étape 6, A_0 remonte le long de la droite (A_0B_3) qui est en retrait par rapport à la droite A_0B_0 sur la figure précédente ; l'arête A_0A_2 commence sa remontée en se désolidarisant de l'arête A_1A_3 .

Halte intermédiaire au temps $t \cong 5,58$: sortie du domaine des immersions.

« Au temps $t = 95/17 \cong 5,58$, les points A_0 et A_2 sont en contact avec les plans ventraux R_1 et R_3 . C'est à cet instant que l'on quitte définitivement le domaine des immersions sous l'effet simultané de deux modifications génériques de type D_2 et que disparaît toute courbe d'intersection ».

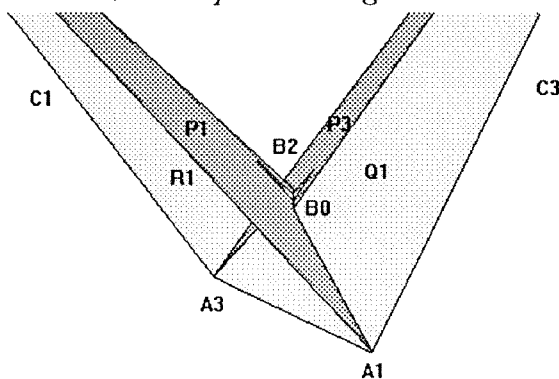


Halte intermédiaire au temps $t \cong 5,58$: sortie du domaine des immersions.

Le bout du chemin est proche, le prochain modèle est homéomorphe à une sphère ! Il reste juste à dégonfler les pointes rouge A_0 et A_2 .

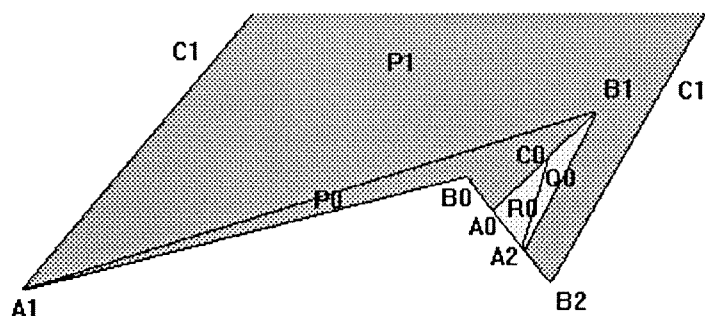
Modèle n°6 : Ce modèle est appelé « bicorné bleu ».

« Les points A_0 et A_2 se déplacent à vitesse constante respectivement le long des droites (A_0B_3) et (A_2B_1) jusqu'à atteindre la cote $3/2$. Ils entraînent avec eux les plans P_0 et P_2 qui se redressent en pivotant respectivement autour des droites (A_1B_1) et (A_3B_3) jusqu'à se retrouver le premier dans le prolongement de P_1 et le second dans le prolongement de P_3 . Les plans P_3 et Q_3 d'une part et P_1 et Q_1 de l'autre restant fixes, les points B_0 et B_2 sont entraînés dans un mouvement ascendant le long des droites (B_0C_3) et (B_2C_1) . Dans ce mouvement les plans $Q_0 = R_0$ et $Q_2 = R_2$ s'élèvent également en pivotant respectivement autour des droites (A_2B_1) et (A_0B_3) jusqu'à se confondre eux aussi avec les plans P_1 et P_3 . Durant cette étape les points C_0 et C_2 sont astreints à vérifier la relation $C_i = 11/41A_i + 30/41B_{i+1}$ avec $i = 0$ ou 2 de sorte que, tout comme les points A_0 et A_2 , ils se déplacent le long d'une droite de l'espace ».



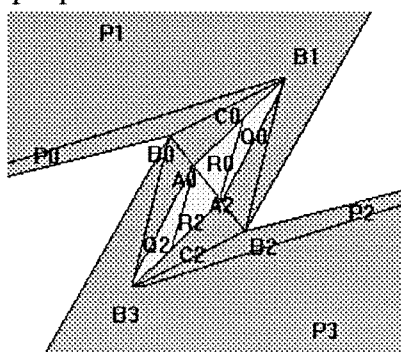
ÉTAPE 6 : LES POINTS A_0 ET A_2 S'ÉLÈVENT LE LONG DES DROITES (A_0B_3) ET (A_2B_1) , BICORNE BLEU.

La figure suivante montre le pentagone P_0 après son mouvement de rotation autour de la droite (A_1B_1) . On remarquera l'énorme contraction qu'il a subie en cours de chemin alors que le pentagone P_1 a, lui, été considérablement dilaté !



Étape 6 : contraction et dilatation de certains éléments.

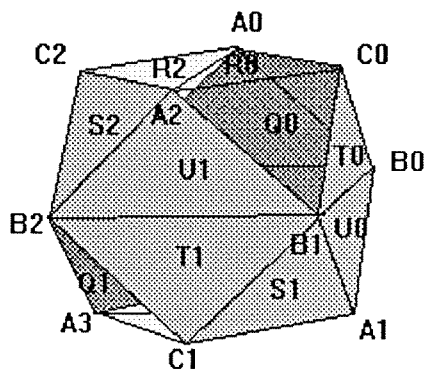
En fait, si l'on considère, en complétant par symétrie, l'ensemble du quadrilatère $B_0B_1B_2B_3$, ainsi que sa triangulation, on a sous les yeux tout l'hémisphère nord du cuboctaèdre bleu que l'on se propose d'atteindre !



ÉTAPE 6 : VUE DE DESSUS, MISE EN ÉVIDENCE DE HÉMISPHERE CONTRACTÉE $B_0B_1B_2B_3$.

Ainsi donc, retourner le cuboctaèdre exige de dilater un de ses hémisphères et de contracter l'autre.

En seize étapes supplémentaires ce dernier modèle peut se transformer en un cuboctaèdre bleu. On pourra comparer la figure précédente avec celle qui suit, et y reconnaître les différents éléments.



ÉTAPE 22 : CUBOCTAÈDRE BLEU.

Remarques :

On notera en particulier la triangulation des faces carrées permettant d'une part de faire apparaître l'équateur du cuboctaèdre et d'autre part deux arêtes orthogonales contenant respectivement son pôle nord et son pôle sud.

Le calcul de sa caractéristique d'Euler donne comme pour le modèle central fermé :

$$S = 12, \quad A = 30, \quad F = 20$$

$$\chi = S - A + F = 2.$$

L'objectif est donc atteint !

Si l'on se rappelle la triangulation $P_i = S_i \cup T_i \cup U_i$, $i = 0$ à 3 , du pentagone P_i , observons qu'à présent, ces quatre pentagones forment une ceinture de douze triangles qui oscillent autour de l'équateur du cuboctaèdre.

Remarquons également que l'arête $[A_0A_2]$ a, dans son mouvement de **vrille ascendante**, subi une **rotation d'un demi-tour** dans le sens trigonométrique, par rapport à l'arête $[A_1A_3]$.

3. Une approche de l'ensemble du retournement

Il est facile de comprendre que le chemin qui a permis de passer du modèle **central fermé** au cuboctaèdre de face externe **bleue** peut aussi conduire au cuboctaèdre de face externe **rouge**.

Au lieu de commencer, à l'étape 1, par le relèvement des plans Q_1 et Q_3 , on démarre avec celui des plans Q_0 et Q_2 . Puis on fait de même pour remonter en arrière jusqu'au temps $t = -22$.

En considérant la loi de formation suivante sur les sommets X :

$$X^{-t}_j = \rho^{-1}(X^{t+1}_j), \quad j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

où ρ désigne la rotation de 90° autour de l'axe Oz selon le sens trigonométrique, on obtient pour chaque valeur du temps t variant 1 à 22, un modèle **négatif** transformant le modèle **central fermé** en un cuboctaèdre **rouge**.

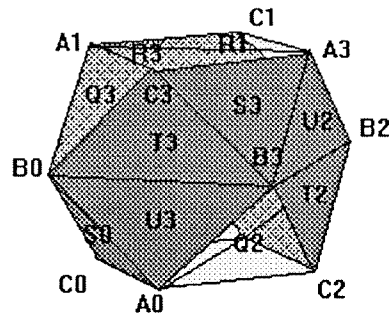
On pourra, par exemple, observer sur la figure suivante que :

A_1^{-22} est l'image de A_2^{+22} par la rotation de sens indirect et de 90° autour de l'axe Oz .

Il en est de même de toutes les faces des modèles négatifs, ainsi :

Q_3^{-22} est l'image de Q_0^{+22} par la rotation de sens indirect et de 90° autour de l'axe Oz .

À présent on touche au but : en faisant varier le temps t de la valeur -22 à la valeur 22, on réalise le **retournement du cuboctaèdre** !



ÉTAPE -22 : CUBOCTAÈDRE ROUGE.

Remarque :

On remarquera qu'un même point occupe des positions diamétralement opposées sur le cuboctaèdre initial et sur le cuboctaèdre retourné. De même, on observera les **orientations opposées** d'un triangle quelconque, par exemple $A_0B_0C_0$, aux temps $t = -22$ et $t = +22$.

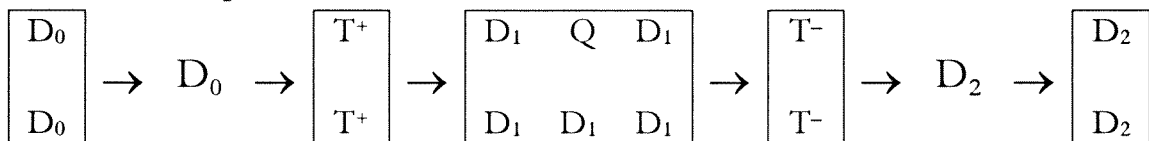
Paradoxalement, tout le chemin parcouru mène au point de départ du retournement. L'imagination de tout un chacun peut à présent aller à l'envi dans un sens comme dans l'autre et saisir de façon dynamique l'ensemble de la déformation. Certes, le passage du bicoïne au cuboctaèdre n'est pas évidente, mais cela a peu d'importance : tous les calculs ont été faits.

Pour résumer cette vision dynamique, retenons simplement quelques mots (dans l'ordre) :

Cuboctaèdre rouge, bicoïne rouge, modèle central fermé, bicoïne bleu, cuboctaèdre bleu.

Si l'on concentre son attention sur le **pôle nord** du cuboctaèdre rouge du départ, on observe qu'il croise une seule fois le **pôle sud** au cours de cette déformation, le contact entre les deux restant maintenu du temps $t = -5$ jusqu'au temps $t = +5$.

Le schéma suivant met en évidence les **seize modifications génériques** qui ont été nécessaires pour réaliser ce retournement du cuboctaèdre.

**Remarques :**

– la modification D_1 située sous la lettre Q est celle qui reste bloquée du temps $t = -5$ jusqu'au temps $t = +5$.

– les termes encadrés correspondent à des accidents se produisant simultanément.

Pour terminer ce périple, donnons une brève esquisse du cheminement qui permet de passer du **cuboctaèdre rouge** ($t = -22$) au **cuboctaèdre bleu** ($t = 22$).

Résumé :

- $t = -22$: **cuboctaèdre rouge.**
- $t = -6$: **bicorne rouge.**
- $t = -5$: vrille descendante, selon le sens direct, des points A_1 et A_3 ; traversée des plans ventraux R_0 et R_2 , provoquant simultanément deux modifications génériques de type D_0 et début d'une modification D_1 .
- $t = -4$: gonflement des petites pointes bleues C_1 et C_3 .
- $t = -3$: abaissement des points B_1 et B_3 , croisement des grands cornets formant les pointes rouges C_0 et C_2 , modification D_0 .
- $t = -2$: descente des points C_0 et C_2 , provoquant successivement deux modifications $T+$.
- $t = -1$: inclinaison vers l'intérieur des pentagones bleus P_1 et P_3 , entraînant deux modifications D_1 .
- $t = 0$: abaissement des plans dorsaux Q_0 et Q_2 , **modèle central fermé.**
- $t = 1$: élévation des plans dorsaux Q_1 et Q_3 .
- $t = 2$: redressement des pentagones rouges P_0 et P_2 , entraînant deux modifications D_1 .
- $t = 3$: élévation des points C_1 et C_3 , provoquant successivement deux modifications $T-$.
- $t = 4$: élévation des points B_1 et B_3 , décroisement des grands cornets formant les pointes bleues C_1 et C_2 , modification D_2 .
- $t = 5$: dégonflement des petites pointes rouges C_0 et C_2 .
- $t = 6$: vrille ascendante, selon le sens direct, des points A_1 et A_3 ; fin d'une modification D_1 ; traversée des plans ventraux R_1 et R_2 , provoquant simultanément deux modifications génériques de type D_2 ; **bicorne bleu.**
- $t = 22$: **cuboctaèdre bleu.**

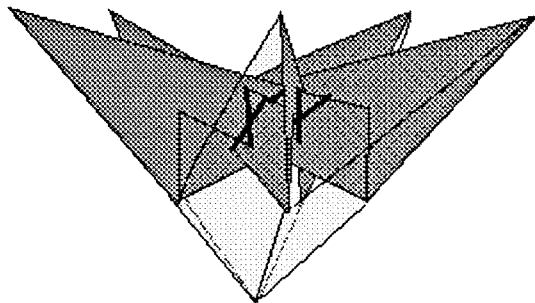
Complément bibliographique : François Apéry. An algebraic halfway model for the eversion of a sphere with an appendix by Bernard Morin. Tohoku mathematical journal, volume 44 (1992), n°1, p 103 à 150.

Prolongements

Pour conclure cet article, il nous reste à décrire deux modèles encore plus complexes, et qui laissent entrevoir qu'il existe une infinité de surfaces polyédriques pouvant servir de modèle central à un retournement de la sphère.

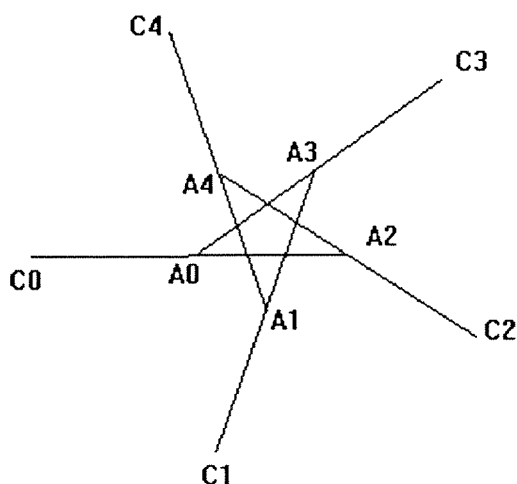
1. Immersion polyédrique du plan projectif ayant une symétrie d'ordre 5

Le premier modèle est, comme la surface de Boy, une immersion du plan projectif. Il possède une symétrie d'ordre 5.



IMMERSION POLYÉDRIQUE DU PLAN PROJECTIF AYANT UNE SYMÉTRIE D'ORDRE 5.

L'idée essentielle pour fabriquer ce polyèdre consiste à mettre les cinq polygones concaves P_i en position verticale tout en leur faisant prendre appui sur les branches d'un pentagone étoilé.

PROJECTION SUR LE PLAN HORIZONTAL DES PENTAGONES CONCAVES P_i .

Remarque : Le pentagone étoilé $A_0A_2A_4A_1A_3A_0$ peut être parcouru en une seule fois sans lever le crayon, ce qui permet l'enchaînement des « chevaux » les uns à la suite des autres. Pour chaque pentagone, on peut distinguer la face qui est tournée vers l'axe vertical Oz et celle qui est tournée vers l'extérieur. A chaque raccordement de deux chevaux on passe de la face externe du premier sur la face interne du second, et vice et versa. Par conséquent, tout raccordement d'un nombre impair de chevaux qui se referme engendrera un ruban Mœbius immergé (qui se recoupe).

Description de l'immersion du plan projectif ayant une symétrie d'ordre 5 :

Sommets : Dans le plan xOy on considère les points A_i , $i = 0$ à 4 , images des racines cinquièmes de l'unité. Les points B_i sont les translatés des points A_i par la translation de vecteur $(0 ; 0 ; 1)$. Les plans P_i , $i = 0$ à 4 , sont les plans verticaux passant par les points A_i et A_{i+2} . Les plans R_i , i modulo 5, sont les plans passant par

les points A_i , A_{i+4} et $Y(0; 0; -1)$. Le point C_i se trouve à l'intersection des plans P_i , R_i et du plan d'équation $z = 2$.

Le polyèdre ainsi décrit est constitué de seize sommets: $Y, A_i, B_i, C_i, i = 0$ à 4 . Ses faces s'obtiennent de la manière suivante :

Faces pentagonales : $P_i = A_i B_i A_{i+2} B_{i+2} C_i$,

Faces triangulaires : $Q_i = C_i B_{i+2} A_{i+4}$,

Faces quadrangulaires : $R_i = A_i C_i A_{i+4} Y, i$ modulo 5.

Le point pentuple appartient aux cinq plans Q_i .

Calculons sa constante d'Euler :

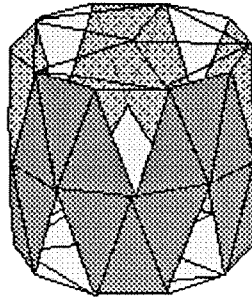
$$S = 16 \quad A = 5(5 + 3 + 4) : 2 = 30 \quad F = 3 \times 5 = 15$$

$$\chi = S - A + F = 16 - 30 + 15 = 1$$

Le polyèdre étudié est donc bien homéomorphe au plan projectif.

Tonneau conduisant au revêtement double de l'immersion du plan projectif ayant une symétrie d'ordre 5 :

Comme pour la surface de BOY, on peut imaginer un polyèdre en forme de tonneau et qui peut servir à réaliser un revêtement à deux feuillets du modèle précédent. De part et d'autre de son équateur, on compte 30 triangles isocèles qui sont destinés à recouvrir les 5 pentagones P_i . Rappelons que chacun d'eux est constitué de 3 triangles.

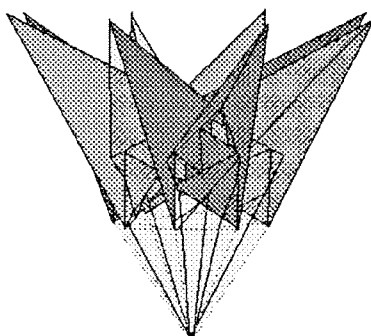


TONNEAU CONDUISANT AU REVÊTEMENT DOUBLE DE L'IMMERSION DU PLAN PROJECTIF AYANT UNE SYMÉTRIE D'ORDRE 5.

2. Immersion polyédrique de la sphère ayant une symétrie d'ordre 8

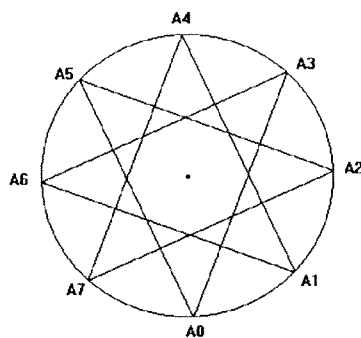
Le deuxième modèle est une **immersion polyédrique de la sphère S^2** ayant une symétrie d'ordre 8, il généralise le modèle central fermé.

Les figures réalisées par W. Thurston et son équipe sur le retournement de la sphère, qui semblent intéresser beaucoup de mathématiciens parce qu'elles illustrent la démarche de Smale, s'apparentent au modèle présenté ici.



IMMERSION DE LA SPHÈRE AYANT UNE SYMÉTRIE D'ORDRE 8.

Comme précédemment, les sommets A_i , $i = 0$ à 7 , sont les sommets d'un octogone étoilé. Les pentagones concaves P_i , prennent cette fois appui sur les points A_i et A_{i+3} . On observera que l'on peut passer par tous les sommets de l'octogone régulier en suivant la ligne brisée $A_0A_3A_6A_1A_4A_7A_2A_5A_0$.



OCTOGONE ÉTOILÉ.

Description

Sommets : Dans le plan xOy on considère les points A_i , $i = 0$ à 7 , images des racines huitièmes de l'unité. Les points B_i sont les translatés des points A_i par la translation de vecteur $(0 ; 0 ; 1)$. Les plans P_i sont les plans verticaux passant par les points A_i et A_{i+3} , (i modulo 8). Les plans Q_i sont les plans passant par les points A_{i+6} , B_{i+3} , B_{i+7} . Les plans R_i passent par les points A_i , A_{i+6} et $Y(0 ; 0 ; -3/2)$. Le point C_i se trouve alors à l'intersection des plans P_i , Q_i et R_i .

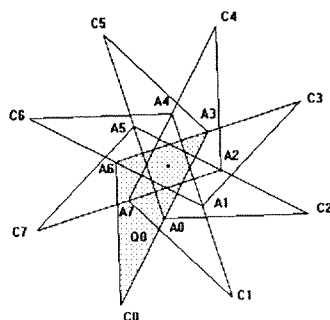
Le polyèdre décrit comporte alors vingt-cinq sommets : les points A_i , B_i , C_i pour i modulo 8 et le point Y . Ses faces sont les suivantes :

Faces pentagonales : $P_i = A_iB_iA_{i+3}B_{i+3}C_i$,

Faces triangulaires : $Q_i = C_iB_{i+3}A_{i+6}$,

Faces quadrangulaires : $R_i = C_iA_iA_{i+6}Y$.

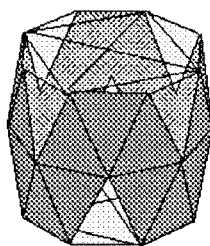
Les huit plans Q_i passent tous par un même point. De plus le point B_i appartient au plan Q_{i+1} . La figure suivante suggère la disposition des plans Q_i .



PROJECTION SUR LE PLAN HORIZONTAL DES PLANS DORSAUX Q_i $i = 0$ À 7 , MISE EN ÉVIDENCE DU PLAN DORSAL Q_0 .

Tonneau candidat à un retournement polyédrique de la sphère qui passe par une étape centrale ayant une symétrie d'ordre 8 :

Ce modèle joue le même rôle que le cuboctaèdre. Il compte exactement le même nombre de sommets (26), d'arêtes (70) et de triangles (48) que l'immersion précédente.



TONNEAU CONDUISANT À UNE IMMERSION DE LA SPHÈRE S^2 ET AYANT UNE SYMÉTRIE D'ORDRE HUIT.

3. Généralisation et conclusion

Au cours des deux paragraphes précédents on a vu apparaître le rôle primordial joué par une catégorie bien particulière de polygones étoilés : ceux qui pouvaient être parcourus entièrement sans lever le crayon ! Signalons le théorème suivant dont la démonstration est une conséquence de l'égalité de Bézout.

Théorème : $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ engendre le groupe U_n des racines n^{es} de l'unité si et seulement si $k \wedge n = 1$.

Applications

a. Immersions du plan projectif

Le cas $n = 1$ correspond à la surface de Boy.

Pour tout $n > 1$, vérifions par l'algorithme d'Euclide que $n + 1 \wedge 2n + 1 = 1$.

En effet, on a les égalités suivantes liées à deux divisions euclidiennes successives :

$$2n+1 = (n+1).1 + n \quad \text{et} \quad n+1 = n.1 + 1$$

Le dernier reste étant égal à 1 on a $n + 1 \wedge 2n + 1 = 1$.

Il résulte alors du théorème précédent que ω_{n+1} engendre le groupe U_{2n+1} .

Conséquences : les points d'affixes les puissances successives de ω_{n+1} sont alors les sommets successifs d'un polygone étoilé ayant $2n+1$ sommets et qui peut être parcouru sans lever le crayon !

Ainsi, pour tout nombre impair $2n+1$, $n \geq 1$, il existe une immersion du plan projectif P_2 ayant une symétrie d'ordre $2n+1$ et pouvant être revêtue, comme la surface de Boy, deux fois par un tonneau dont la bande oscillant de part et d'autre de l'équateur est composée de $3 \times 2 \times (2n+1)$ triangles isocèles.

b. Immersions de la sphère S^2

De même pour tout nombre de la forme $4n$, $n \geq 1$, il existe une immersion de la sphère S^2 ayant une symétrie d'ordre $4n$.

Le cas $n = 1$ correspond au modèle central du retournement du cuboctaèdre.

Pour $n \geq 2$, son existence est liée à une classe de polygones étoilés d'ordre $4n$, pouvant être parcouru sans lever le crayon.

Vérifions que $2n-1 \wedge 4n = 1$. On a : $4n = (2n-1) \cdot 2 + 2$ et $2n-1 = 2 \cdot (n-1) + 1$

Le dernier reste est de nouveau égal à 1, on a donc $2n-1 \wedge 4n = 1$. Les points dont les affixes sont les puissances successives de ω_{2n-1} sont alors les sommets successifs d'un polygone étoilé ayant $4n$ sommets et qui peuvent être parcourus sans lever le crayon ce qui permet d'enchaîner les "chevaux" servant de base à la construction d'une immersion de la sphère S^2 . Ce qui n'est pas le cas d'un hexagone ou d'un décagone étoilés comme on peut le vérifier sans difficulté.

Un tonneau ayant une bande de $3 \times 4n$ triangles isocèles, oscillant autour de l'équateur, peut alors servir de départ à un retournement polyédrique de la sphère admettant le modèle précédent comme modèle central.

Conclusion :

Un tonneau constitué de 4 pentagones (3 triangles consécutifs) a permis de réaliser le retournement du cuboctaèdre. Un tonneau formé de 6 pentagones permet le revêtement à deux feuillets de la surface de Boy. Un tonneau réalisé à partir de 8 pentagones conduit à un retournement passant par l'immersion centrale ayant une symétrie d'ordre huit et grâce à un tonneau composé de 10 pentagones il est possible de revêtir deux fois l'immersion du plan projectif ayant une symétrie d'ordre cinq.

À tout nombre de la forme $4n$ où $n \geq 1$ correspond un tonneau et une immersion de la sphère S^2 généralisant le retournement du cuboctaèdre.

À tout nombre de la forme $2(2n+1)$ où $n \geq 1$ correspond un tonneau et une immersion du plan projectif P_2 généralisant le retournement à l'aide du double revêtement de la surface de Boy.

C'est sur cette perspective que s'arrêtera ce voyage au pays des immersions. Chacun pourra le parcourir selon sa propre initiative en laissant libre cours à son imagination.

Le contact direct avec un chercheur, en prise avec un problème actuel, reste pour moi une expérience irremplaçable. Le moment où l'on sent la solution proche est très riche en émotions ; lorsqu'enfin elle émerge, après une longue marche d'approche à cordes tendues, les efforts fournis cèdent la place à la joie de la découverte. Transmettre ce genre d'impressions représente certainement la plus belle part du métier d'enseignant. De façon similaire, le jeune élève ne se retrouve-t-il pas dans la même situation quand un problème éveille sa curiosité et qu'il se retrouve devant la page blanche ? Se rend-il compte qu'elle est un lieu de création ?

UN CARRÉ VRAIMENT MAGIQUE!

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

avec en plus :

$$\begin{aligned} 618^2 + 753^2 + 294^2 &= 816^2 + 357^2 + 492^2 && \text{(lignes)} \\ 672^2 + 159^2 + 834^2 &= 276^2 + 951^2 + 438^2 && \text{(colonnes)} \\ 654^2 + 132^2 + 879^2 &= 456^2 + 231^2 + 978^2 && \text{(diagonales)} \\ 639^2 + 174^2 + 852^2 &= 936^2 + 471^2 + 258^2 && \text{(contre - diagonales)} \\ 654^2 + 798^2 + 213^2 &= 456^2 + 897^2 + 312^2 && \text{(diagonales)} \\ 693^2 + 714^2 + 258^2 &= 396^2 + 417^2 + 852^2 && \text{(contre - diagonales)}. \end{aligned}$$

emprunté à l'American Mathematical Monthly, fév. 1999, vol. 106, n° 2.