NOS ÉLÈVES REFONT L'HISTOIRE DES PROBABILITÉS

Nicole VOGEL, LEGT de Haguenau*

« Le réel n'est jamais « ce qu'on pourrait croire » mais il est toujours ce qu'on aurait dû penser... »

« On ne peut rien fonder sur l'opinion : il faut d'abord la détruire. »

La formation de l'esprit scientifique, Gaston BACHELARD

Peu après la rentrée 1996, j'ai proposé à mes élèves de terminale S, de spécialité math ou physique, un devoir à la maison en probabilités, en plusieurs épisodes. Un rapide sondage dans la classe a montré que seulement 13 élèves sur 34 ont eu un enseignement de probabilités en première.

Notre travail se situe 8 jours après la rentrée, après 6 heures de cours et d'exercices de dénombrement et 2 heures de probabilités élémentaires. (En 1996, il s'agit encore de l'ancien programme). Le jeudi soir, je donne à mes élèves l'exercice suivant pour le lendemain matin (le délai est intentionnellement très court) :

Acte 1

Le problème du partage

Deux joueurs, Anne et Bruno, jouent plusieurs parties d'un jeu de hasard. À chaque partie, l'un des joueurs gagne un point et l'autre aucun, avec les mêmes chances.

Le gagnant est le premier des joueurs qui arrive à 8 points. La mise totale est de 84 F, chacun ayant misé 42 F.

1) Le jeu est interrompu lorsque Anne a 7 points et Bruno 5 points. Comment doivent-ils se répartir les 84 F ? Justifiez.

2) Même question si le jeu est interrompu lorsque Anne a 1 point et Bruno 0 point.

3) Même question si le jeu est interrompu lorsque Anne a 7 points et Bruno 0 point.

Il s'agit du « problème des partis », rendu célèbre par la correspondance entre Blaise PASCAL et Pierre de FERMAT en 1654. Mais son histoire remonte au moins au début du XVI^{e} siècle, comme le raconte le groupe M.A.T.H. dans un article très documenté, où j'ai trouvé l'idée de l'exercice précédent [1]. Les références historiques ne sont pas données a priori, pour ne pas influencer les réponses.

L'objectif est de voir comment les élèves modélisent le problème : se contentent-ils des erreurs historiques ou utilisent-ils spontanément les outils dont on vient d'ébaucher l'étude ?

---

* Ce travail a été présenté lors d'une conférence au Congrès International sur l'Enseignement des Probabilités et des Statistiques en Octobre 1996, à Kalouga (Russie)

La question 2 est inspirée d'un exemple donné par Niccolo TARTAGLIA en 1556 en objection au partage proportionnel aux points déjà marqués, qui semble particulièrement injuste dans cette situation.

De même la question 3 s'inspire d'un exemple de Gerolamo CARDAN (1539), également destiné à montrer l'iniquité du partage proportionnel.

Le vendredi matin, je ramasse les réponses.

– ***6 élèves donnent une réponse juste*** aux questions 1 et 3 à l'aide d'un calcul de probabilité et constatent que c'est très compliqué pour la question 2. Leur méthode est assez proche de celle de PASCAL (voir l'acte 2) ; elle exploite en plus le langage des probabilités. En voici un exemple :

« Le partage de la mise se fait en fonction de la probabilité qu'auraient eu les 2 joueurs de gagner la partie si le jeu n'avait été interrompu.

1) Anne a 7 points et Bruno 5 points.

Si le jeu continuait, pour que Bruno gagne la partie, il faudrait qu'il remporte les 3 coups suivants. Il aurait $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$ *chance que cela se produise.*

La probabilité de gagner pour Bruno est donc de $\frac{1}{8}$.

La probabilité de gagner pour Anne est alors de $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

La somme gagnée par Bruno sera donc $\frac{1}{8} \times 84 = 10{,}50$ F.

La somme gagnée par Anne sera $\frac{7}{8} \times 84 = 73{,}50$ F.

2) ?

Le jeu n'étant pas tellement avancé (1 seul coup a été joué), la probabilité de gagner est à peu près la même pour les 2 joueurs. Les 2 joueurs gagneront à peu près la même somme soit $\frac{84}{2} = 42$ F *avec néanmoins un peu plus pour Anne.*

3) Anne a 7 points et Bruno 0 point.

Si le jeu continuait, pour que Bruno gagne la partie, il faudrait qu'il remporte les 8 coups suivants.

...

La somme gagnée par Bruno sera donc $\frac{1}{256} \times 84 \approx 0{,}33$ F.

La somme gagnée par Anne est alors $\frac{255}{256} \times 84 \approx 83{,}67$ F. »

– ***2 réponses donnent le principe*** d'une répartition proportionnelle aux probabilités, avec des calculs de probabilités faux. Dans ces 2 cas, la probabilité de gagner de Bruno est juste et celle d'Anne est fausse. (La somme n'est donc pas 1)

– ***18 élèves font un partage proportionnel*** aux points gagnés dans la question 1. (C'est la solution de Luca PACIOLI en 1494). Un seul d'entre eux choisit un autre principe pour la question 3, mais 4 d'entre eux choisissent le partage 42 - 42 dans la question 2.

La question 2 semble donc semer le doute sur l'équité du partage proportionnel chez quelques-uns, mais la majorité y reste insensible.

– ***3 élèves choisissent la répartition 42 - 42*** dans tous les cas. Ceux-là semblent vraiment croire que les chances restent égales, sans être sensibles à l'objection contenue dans la question 3. L'un confond l'équiprobabilité de départ avec l'équiprobabilité au cours du jeu et ne semble donc pas sensible à la notion de conditionnement ; pour un autre : « *La chance pourrait tourner...* »

– ***1 copie*** propose la répartition 52,50 - 31,50 correspondant au raisonnement de Niccolo TARTAGLIA (1556) : « *8 points représentent 42 F donc 2 points d'écart représentent 10,50 F. Donc Anne doit prendre 42 F + 10,50 F et Bruno 42 F – 10,50 F...* »

– ***4 élèves n'ont pas répondu*** à l'exercice.

On peut remarquer, sans qu'il soit possible d'en tirer des conclusions en raison du petit échantillon, que les élèves ayant déjà étudié les probabilités en première répondent mieux que les autres : 31% de bonnes réponses (et même 46% de propositions de partage proportionnel aux probabilités) pour eux contre 10% pour les autres.

Le vendredi, immédiatement après avoir ramassé les travaux précédents, et donc, sans les avoir examinés, je distribue la suite de l'énoncé, à faire pour le lundi :

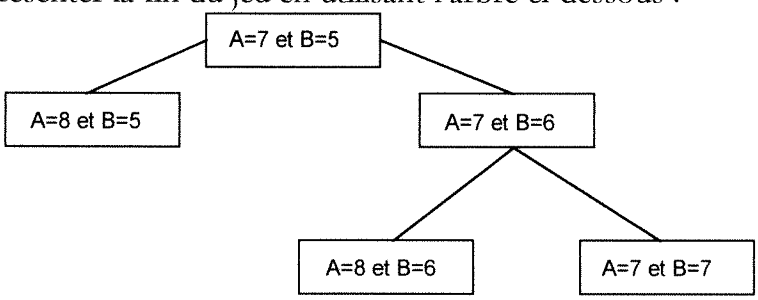
Acte 2

Eléments de solutions :

Raisonnement 1 :

Reprenons la question 1. Imaginons les différentes possibilités de finir le jeu. Appelons A le nombre de points obtenus par Anne et B le nombre de points obtenus par Bruno.

On peut représenter la fin du jeu en utilisant l'arbre ci-dessous :



Reprenez les trois questions de l'énoncé et corrigez éventuellement votre première solution.

Raisonnement 2 :

Reprenons la question 1. Il faudrait au maximum 3 parties pour terminer le jeu.

Notons a une partie gagnée par Anne et b une partie gagnée par Bruno et regardons toutes les possibilités pour ces trois parties :

Partie 1	Partie 2	Partie 3
a	a	a
a	a	b
a	b	a
b	a	a
...	...	...

Reprenez les trois questions de l'énoncé. Le raisonnement précédent vous fait-il corriger votre première solution ?

Quelques élèves réagissent immédiatement en lisant l'énoncé :

« Si on a déjà fait comme ça, qu'est ce qu'il faut faire ? »

« L'arbre est trop compliqué si Anne n'a qu'un point. »

Le raisonnement 1 s'inspire de celui de PASCAL ; on ne propose pas plus qu'un début d'arbre pour ne pas imposer l'outil des probabilités, que Pascal n'a évidemment pas utilisé explicitement.

Cependant, la réponse attendue est un arbre de probabilité car la solution de Pascal, qui ne raisonne que sur les répartitions des gains, n'est pas facile à imaginer. En effet, l'exemple donné ici nécessite une étape de plus que son premier exemple historique qui est celui d'un jeu en 3 parties, interrompu à 2 parties contre 1. Il dit dans ce cas :

« Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est en jeu, savoir, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ; le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles et vous me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16. »

(Lettre de Pascal à Fermat, 29 juillet 1654) [3]

Le raisonnement 2 évoque celui de FERMAT, qui est rapporté par Pascal dans une autre lettre qu'il adresse à ce dernier le 24 août 1654 :

«Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti il faut (dites-vous), voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion [...]

Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties) ; et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : ils peuvent en avoir seize, qui est le second degré de quatre, c'est à dire le carré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second ; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes : aaaa... bbbb.

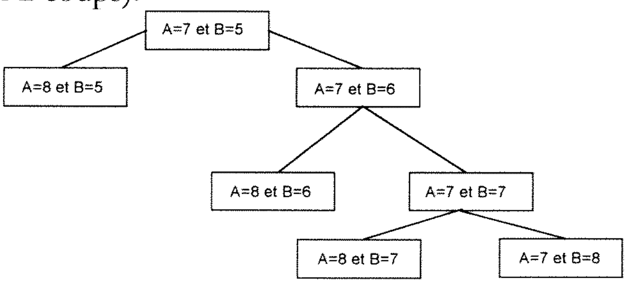
Et parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux a le font gagner : donc il y en a 11 pour lui ; et parce qu'il manque trois partues au second, toutes les faces où il y a trois b le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a deux joueurs… » [3]

À ce stade, je ne donne toujours pas d'explications historiques, que je réserve pour la fin, avec le bilan du travail, pour ménager le suspense.

Cette fois-ci, il y a ***22 réponses justes*** pour les questions 1 et 3.

– 9 élèves donnent la probabilité ¾ pour Anne et ¼ pour Bruno en comptant le nombre de cas (non équiprobables évidemment) dans l'arbre. (Erreur que d'illustres mathématiciens ont commise également, comme d'Alembert dans le jeu de pile ou face en 2 coups).



« Anne a 3 possibilités de gagner et Bruno 1, c'est pourquoi Anne gagne $\frac{3}{4} \times 84 = 63$ F *et Bruno 21 F. »*

– 3 élèves font d'autres erreurs. L'un d'entre eux affirme que seule la répartition 84 - 0 est possible, le deuxième attribue une probabilité de 7/8 à Anne, mais de 5/8 à Bruno et le troisième affirme qu'il y a 8 cas sur 15 qui font gagner Anne sans justifier davantage.

Le premier est le seul qui ne semble faire aucun lien avec les probabilités (que les énoncés n'ont volontairement pas encore évoquées jusqu'ici) : celui-ci semble avoir de grandes difficultés de représentation du hasard, puisqu'il affirme dans un autre exercice que la probabilité d'un couple d'avoir une fille après 4 garçons est 0.

Dans le raisonnement 2, ***2 élèves disent que c'est impossible*** car le tableau comporte des cas qui ne sont pas « réels ».

« Ce raisonnement est impossible car Anne ne peut gagner 3 parties car elle aurait alors un score de 10 points. »

« Ce raisonnement est impossible car il ne faut pas toujours obligatoirement 3 parties pour finir le jeu. »

Ces réponses peuvent être comparées à l'objection de Gilles de Roberval au travail de Fermat, citée par Pascal dans sa lettre du 24 août 1654 (cas où il manque 2 parties à l'un des joueurs et 3 à l'autre) :

« Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en 4 parties, vu que, quand il manque 2 parties à l'un et 3 à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue 4 parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que 2 ou 3, ou, à la vérité peut-être 4 :

Et ainsi qu'il ne voyait pas pourquoi on prétendait de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera 4 parties, vu que la condition naturelle du jeu, est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'était faux, cela n'était pas démontré, de sorte qu'il avait quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme. »

– 4 autres élèves regroupent le tableau en 4 cas qu'ils traitent comme équiprobables (Anne finit à la 1re partie, à la seconde, à la troisième ou Bruno gagne en trois parties), refusant ainsi également d'envisager théoriquement ce qui pourrait se passer après le gain de la partie.

Partie 1	*Partie 2*	*Partie 3*
a	×	×
b	*a*	×
b	*b*	*a*
b	*b*	*b*

× *: fin du jeu*

« Donc Anne aura $\frac{3}{4} \times 84 = 63$ F *et Bruno 21 F. »*

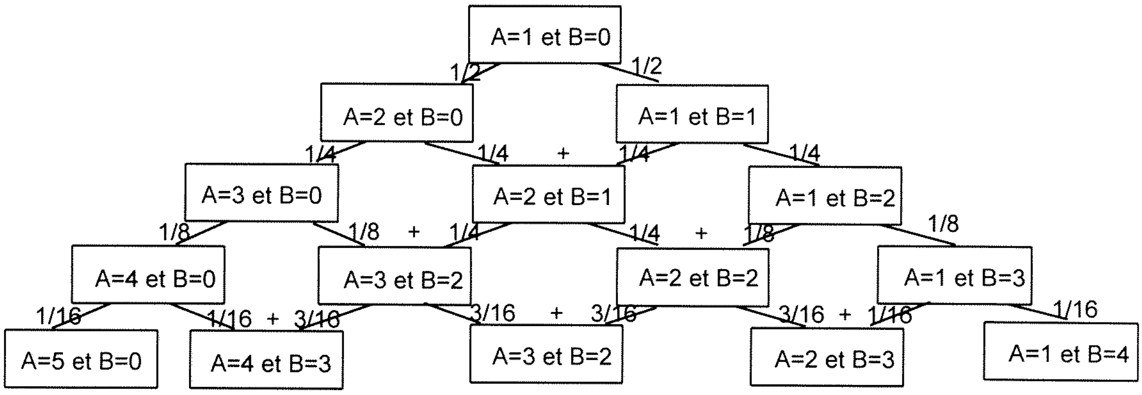
Par contre, ***2 élèves donnent une réponse juste à la question 2.***

L'un des deux fait un dénombrement dans l'ensemble des listes évoquées par Fermat.

L'autre copie est étonnante, car elle est très proche du raisonnement de Pascal dans le traité du triangle arithmétique. Je cite l'élève, Mathieu :

« Cas 2 : Anne a 1 point et Bruno 0. Ce cas est beaucoup plus complexe. Il est impossible d'effectuer un arbre.

Néanmoins, on inscrira les premières branches :



En observant les numérateurs, on constate qu'ils correspondent aux nombres du triangle de Pascal (quand le dénominateur est le même).

Il y a au maximum 14 étapes (partie finie avec 8 à 7). D'où :

n**p	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
0	1														
1	1	1													
2	1	*2*	1												
3	1	3	3	1											
4	1	4	*6*	4	1										
5	1	5	10	10	5	1									
6	1	6	15	*20*	15	6	1								
7	1	7	21	35	35	21	7	1							
8	1	8	28	56	*70*	56	28	8	1						
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1					
10	1	10	45	120	210	*252*	210	120	45	10	1				
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			
12	1	12	66	220	495	792	*924*	792	495	220	66	12	1		
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	*3432*	3003	2002	1001	364	91	14	1
	8-0	8-1	8-2	8-3	8-4	8-5	8-6	8-7	7-8	6-8	5-8	4-8	3-8	2-8	1-8

Anne gagne ⟷ Bruno gagne

Ainsi, Anne a $$p_A = \frac{1 + 14 + 91 + 364 + 1001 + 2002 + 3003 + 3432}{2\,(1 + 14 + 91 + 364 + 1001 + 2002 + 3003) + 3432} = \frac{9908}{16384} = \frac{2477}{4096}$$

soit $p_A \approx 0{,}605$ *chance de gagner.*

Quant à Bruno, il a $p_B = \frac{16384 - 9908}{16384} = \frac{6476}{16384} = \frac{1619}{4096} \approx 0{,}395$ *chance de gagner.*
On en déduit donc :
– *somme qu'Anne devrait empocher :* $84 \times \frac{2477}{4096} \approx 50{,}80$ F.
– *somme que Bruno devrait empocher :* $84 \times \frac{1619}{4096} \approx 33{,}20$ F.

Le seul reproche que nous puissions faire au travail de Mathieu, c'est qu'il ne *démontre* pas que les probabilités des différents scores s'obtiennent avec le triangle de Pascal.

Comparons à la solution générale que donne Pascal dans le « Traité du Triangle Arithmétique », rédigé en 1654 et publié en 1665 :

« Problème I : Etant proposés deux joueurs, à chacun desquels il manque un certain nombre de parties pour achever, trouver par le Triangle arithmétique le parti qu'il faut faire (s'ils veulent se séparer sans jouer), eu égard aux parties qui manquent à chacun.

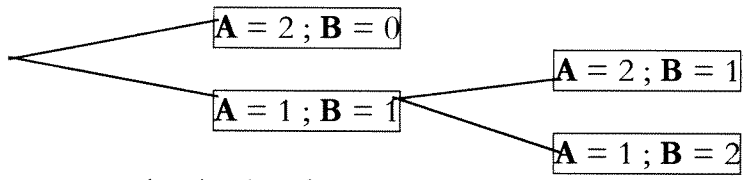
Soit prise dans le triangle la base dans laquelle il y a autant de cellules qu'il manque de parties aux deux ensemble ; ensuite soient prises dans cette base autant de cellules continues à commencer par la première, qu'il manque de parties au premier joueur, et qu'on prenne la somme de leurs nombres. Donc il reste autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre. Qu'on prenne encore la somme de leurs nombres. Ces sommes sont l'une à l'autre comme les avantages des joueurs réciproquement… » [3]

Pascal propose ensuite une démonstration par récurrence de ce résultat, laborieuse faute de notations adaptées.

– 2 autres élèves essaient de trouver une formule de récurrence en partant d'un jeu en 2 points, 3 points, etc. L'un abandonne, l'autre, Nicolas, fait un travail intéressant. En effet, bien qu'une généralisation trop hâtive conduise à un résultat faux et non démontré, cette copie suit les étapes d'une démarche scientifique (étude d'exemples, généralisation, retour au cas particulier...) et fait preuve d'un remarquable esprit critique :

« *Je présenterai ici un raisonnement basé quelque peu sur l'intuition et ainsi* **peu rigoureux** *mais expérimental.*

J'ai tout d'abord calculé les chances d'Anne de parvenir (avec une avance de 1 à 0) à 2, 3, 4 et 5 points comme suit



Anne a ici $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ *de chances de s'imposer et ainsi de suite*

En comparant les résultats, qui sont respectivement pour 2, 3, 4 et 5 points $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{21}{32}$, $\frac{41}{64}$*, j'ai constaté que si l'on réduisait toutes les fractions au même dénominateur 4^{n-1} où n est le nombre de points à atteindre (4^{n-1} est le nombre total de branches), on passait d'une étape à l'autre en retranchant un nombre deux fois plus petit qu'à l'étape précédente.

Je m'explique : pour 2, 3 et 4 points, on réduit à des fractions de dénominateur $4^{4-1} = 64$. *On obtient* $\frac{48}{64}$, $\frac{44}{64}$, $\frac{42}{64}$ *: on a d'abord retranché 4, puis* $\frac{4}{2}$ *etc.*

Ainsi, comme on sait qu'il y a 6 étapes pour parvenir jusqu'à 8 points (pour Anne) et un nombre total de branches de 4^7, *on obtiendra notre pourcentage de chance en retranchant aux points de départ* ($\frac{3}{4} \times 4^7$) *plusieurs nombres, puis en divisant le tout par* 4^7.

Les points à retrancher sont $4^7 \times \left(\frac{3}{4} - \frac{11}{16}\right)$ *la moitié de ce nombre … et cela six fois ; on a ici une suite géométrique :*

$$1024 + \frac{1024}{2} + \frac{1024}{4} + \cdots + \frac{1024}{2^5} = 1024 \times \frac{1 - \frac{1}{2^6}}{1 - \frac{1}{2}} = 2016 .$$

On obtient ainsi une probabilité de $\frac{\left(\frac{3}{4} \times 4^7\right) - 2016}{4^7} = \frac{321}{512} \approx 0{,}63$ *et un partage 52,65 F. contre 31,35 F. Un détail me chagrine toutefois : si l'on considère ma formule générale (de probabilité d'arriver à n points) :* $\frac{\frac{3}{4} \times 4^{n-1} - \frac{4^{n-1}}{16} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{0{,}5}}{4^{n-1}}$, *on constate qu'elle présente une* ***limite en*** $+\infty$ ***de 0,625*** *; je me serais plutôt attendu à* ***0,5*** car le point d'avance aurait tendance à s'effacer devant le nombre de points astronomique à atteindre ».

Prévoyant que très peu d'élèves auront résolu la question 2 à l'issue de l'acte 2 que je ramasse le lundi, je distribue le même jour l'acte 3 à faire pour le jeudi.

Acte 3

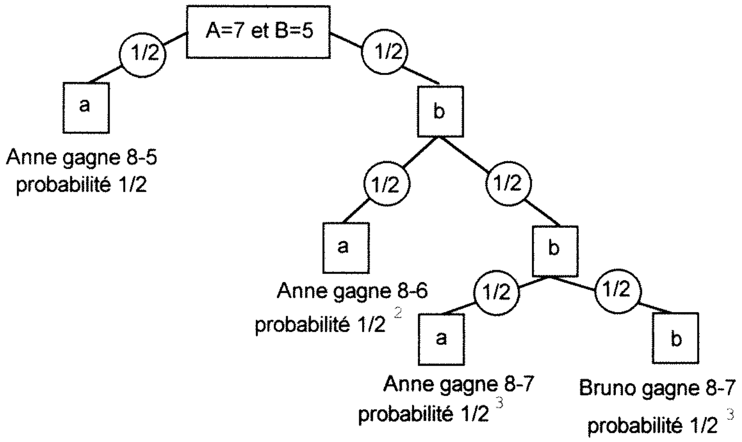
Quelques indications supplémentaires pour la question 2

Pour le raisonnement 1 ; en utilisant un arbre de probabilités représentant les suites possibles de la partie :

Notons a et b les événements « Anne gagne un point » et « Bruno gagne un point ».

L'arbre de probabilités de la question 1 est alors :

* Ce dernier résultat est faux, le calcul exact donne $\frac{163}{256}$



L'arbre de la question 2 est trop long à faire explicitement. Mais on peut raisonner sur cet arbre sans le dessiner : les branches pour lesquelles Anne gagne la partie sont celles qui

– finissent par « a » et

– comportent auparavant 6 autres « a » et au maximum 7 « b ».

La probabilité qu'Anne gagne est égale à la somme des probabilités de ces branches. On peut utiliser le tableau suivant :

Nombre de « b »	Nombre de telles branches	Proba. d'une branche	Proba. totale pour le nombre de « b »
0	1	$\frac{1}{2^7}$	$\frac{1}{2^7}$
1			
2	C_8^2	$\frac{1}{2^9}$	$C_8^2 \times \frac{1}{2^9}$
3			
4			
5			
6			
7			
		Total :	

Complétez ce tableau et répondez à la question 2 du problème B.

Pour le raisonnement 2 :

Il faut encore au maximum 14 parties pour finir le jeu. On va donc supposer qu'on en joue 14 même si un joueur atteint 8 points avant la fin. Il y a 2^{14} issues possibles pour ces 14 parties.

Chaque suite de 14 parties peut se décrire par une liste composée de 14 lettres « a » ou « b ».

Comptons le nombre de listes gagnantes pour Anne (qui a un point d'avance, il lui en manque donc 7) :

1) Notons n_a et n_b les nombres respectifs de « a » et de « b » d'une liste.

Nous avons $n_a + n_b = 14$. L'ensemble des listes est la réunion disjointe de deux sous-ensembles :

– l'ensemble des listes où $n_a \geq 7$ et donc $n_b = 14 - n_a \leq 7$. Ce sont les listes gagnantes pour Anne.

– l'ensemble des listes où $n_a \leq 6$ et donc $n_b = 14 - n_a \geq 8$. . Ce sont les listes gagnantes pour Bruno.

Le nombre de listes gagnantes pour Anne est donc le nombre de listes ayant 7, 8, 9, … , 14 « a ».

Déterminez le nombre N_A de listes gagnantes pour Anne.

2) Simplification de la formule :

a) Prouvez que $C_{14}^0 + C_{14}^1 + C_{14}^2 + \ldots + C_{14}^{13} + C_{14}^{14} = 2^{14}$

b) En déduire que $N_A = \dfrac{2^{14} + C_{14}^7}{2}$.

c) Proposez un partage équitable de la mise lorsque le jeu s'arrête à 1 pour Anne et 0 pour Bruno.

Certains élèves n'arrivent toujours pas à résoudre le problème du partage dans la situation où le jeu s'arrête à 1 à 0. On pouvait s'y attendre car les raisonnements et les dénombrements qui interviennent dans cet acte 3 sont assez compliqués.

Je pensais néanmoins terminer le problème des partis sur cette solution avant de faire le bilan du travail de la classe et donner les étapes historiques du problème.

L'acte 4 n'était pas prévu au départ. Il est encore plus difficile que l'acte 3.

Je l'ai ajouté parce que Mathieu avait proposé la solution de PASCAL sans la démontrer.

De plus, cela se passe précisément au moment où le chapitre étudié en classe est le raisonnement par récurrence.

Enfin, je pense que l'énoncé de l'acte 4 a un intérêt historique, même pour les élèves qui sont un peu dépassés par son contenu mathématique.

Acte 4

Généralisation du problème des partis : le raisonnement de Pascal publié en 1665 (« méthode pour faire les partis entre deux joueurs par le moyen du Triangle Arithmétique ») ;

Pascal énonce la proposition suivante : *« Soit prise dans le triangle la base (ligne) dans laquelle il y a autant de cellules qu'il manque de parties aux deux ensemble ; ensuite soient prises* *dans cette base autant de cellules continues à commencer par la première, qu'il manque de parties au premier joueur, et qu'on prenne la somme de leurs nombres. Donc il reste autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre. Qu'on prenne encore la somme de leurs nombres. Ces sommes sont l'une à l'autre comme les avantages des joueurs réciproquement...*

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, je la démontrerai néanmoins en peu de mots par le moyen de deux lemmes.

Le 1er, que la seconde base contient les partis des joueurs auxquels il manque deux parties en tout.

Le 2ème, que si une base quelconque contient les partis de ceux auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules, la base suivante sera de même... »

1) Expliquez la règle énoncée par Pascal dans le cas du partage d'une mise de 84 F lorsqu'un jeu en 4 parties est interrompu à 2 à 1.

2) a) Quel type de preuve Pascal propose-t-il ?

b) Le langage des probabilités n'existait pas à l'époque de Pascal, mais nous pouvons traduire sa proposition en disant que la proportion de la mise (ou avantage) qui revient à un joueur est égale à sa probabilité de gagner.

Notons MA et MB les points manquant aux joueurs A et B et p la probabilité que le joueur A gagne au moment de l'interruption du jeu. Posons n = MA+MB.

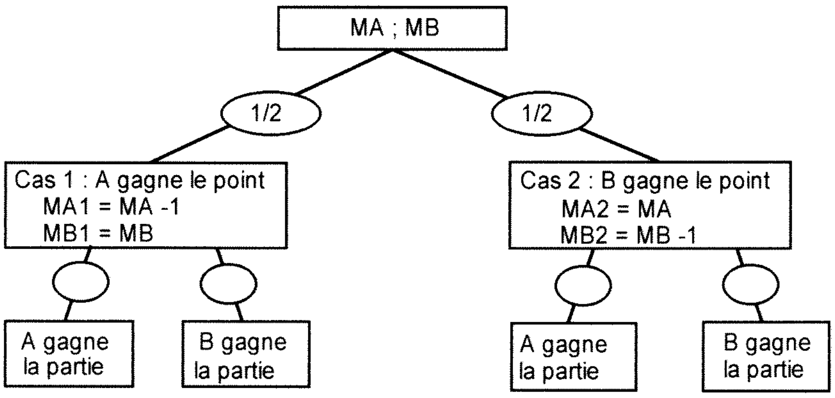
Expliquez pourquoi (si MB ≠ 0) la règle de Pascal donne

$$p = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sum_{k=0}^{k=\mathrm{MB}-1} C_{n-1}^{k} .$$

c) On note p_1 et p_2 les probabilités de gagner du joueur A dans les cas 1 et 2 ci-dessous.

À l'aide du schéma ci-dessous (où on suppose MA et MB non nuls), expliquez pourquoi

$$p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$$



d) Notons R_n la propriété : «La règle de Pascal est vraie dans tous les cas où il manque un total de n points lorsqu'on additionne ce qui manque au joueur A et au joueur B ».

Prouver par récurrence que la propriété R_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

e) Appliquez cette règle à la question 2) du problème B pour proposer un partage équitable.

Lors du corrigé de l'acte 4 en classe, j'ai enfin raconté l'histoire du problème, des différentes solutions fausses qui nous étaient parvenues et de leur critique jusqu'à la correspondance de Pascal et Fermat.

C'était devenu très intéressant car on retrouvait la plupart des raisonnements historiques, justes ou faux, dans les travaux de la classe. Au cours des 4 actes, nous avons donc vécu un raccourci de l'histoire du problème.

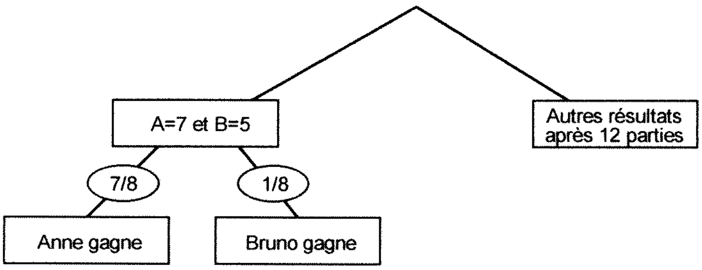
Plus tard, au moment de l'étude des probabilités conditionnelles, j'ai encore donné un acte 5, pour montrer que l'on a implicitement utilisé ces notions dans le problème des partis.

Acte 5

Exemple de probabilités conditionnelles :

Reprenons la première question du problème du partage. (Anne a 7 points et Bruno 5 points)

On peut présenter la situation ainsi :



Notons E l'événement « après 12 parties, Anne a 7 points et Bruno 5 » et Ag l'événement « Anne gagne le jeu ».

La probabilité qu'Anne gagne à partir de 7 à 5 est de 7/8.

C'est la probabilité conditionnelle de Ag par rapport à E. $P_E(Ag) = \frac{7}{8}$ ou $P(Ag/E) = \frac{7}{8}$.

Exemple d'espérance mathématique :

Reprenons encore la première question du problème du partage.

Notons X et Y les sommes qu'Anne et Bruno peuvent recevoir à la fin du jeu.

On a les possibilités suivantes :

Valeurs de X	0	84
Probabilités	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$

On obtient $E(X) = 84 \times \frac{7}{8} = 73{,}50$ et $E(Y) = 84 \times \frac{1}{8} = 10{,}50$.

L'espérance de la variable aléatoire X est l'« espérance de gain » d'Anne. C'est la part des 84 F qu'il faut lui attribuer si on arrête le jeu lorsqu'elle a 7 points et Bruno 5.

Il est évidemment difficile de conclure...

Cependant, cette activité à épisodes m'a beaucoup intéressée parce que les réactions de la classe ont souvent dépassé mes prévisions. Certes, il y avait là quelques très bons élèves, et c'est grâce à leur travail que ce problème nous a menés très loin, mais les travaux de tous, à commencer par les erreurs, ont eu leur intérêt.

La forme proposée, devoirs à la maison à rendre très rapidement, avait pour but de conserver les erreurs de raisonnement et d'éviter l'uniformisation des réponses. Par contre, la succession rapide des actes ne m'a pas permis de proposer aux élèves d'exposer leurs premières solutions et d'en débattre.

Mais nous avons pu à la fois remettre en cause des raisonnement faux, voir la place de ces erreurs dans l'histoire des probabilités et aborder quelques problèmes difficiles motivés par la classe elle-même.

Les élèves ont été très étonnés de voir que certaines de leurs erreurs ou certains de leurs raisonnements avaient joué un rôle historique. Cela leur a montré qu'ils savaient faire des choses difficiles, puisqu'elles ont posé des problèmes à de grands mathématiciens.

On peut espérer que cela aura modifié la représentation naïve du hasard de quelques-uns et que le contexte historique aura montré à tous l'intérêt d'une théorie des probabilités.

Bibliographie :

[1] – M.A.T.H. (mathématiques, approche par des textes historiques), Université Paris VII, 1986 ;on trouvera également dans cet ouvrage des références historiques et une bibliographie plus complète

[2] – Enseigner les probabilités en classe de terminale, IREM de Strasbourg, 1994

[3] – Pascal, œuvres complètes, Louis LAFUMA, L'intégrale - SEUIL, 1963