A VOS STYLOS

PROBLÈME 46

Énoncé (proposé par R. Schäfke) :

Soit la matrice carrée $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, où $a_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$ (coefficient binomial).
Montrer que M est définie positive, de déterminant égal à 1, et que si λ est valeur propre de M alors $1/\lambda$ est également valeur propre de M.

Solution (par P. Renfer) :

1) Lemme 1 : Formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$$

(la formule est valable même si $n > a$ ou $n > b$, à condition de poser $C_n^p = 0$ si $p > n$)

Démonstration algébrique : Le second membre est le coefficient de n^n dans $(1+X)^{a+b}$. Le premier membre s'obtient comme coefficient de x^n dans le produit $(1+x)^a(1+x)^b$.

Démonstration combinatoire : Le second membre est le nombre de façons de choisir simultané ment n boules dans une urne contenant a blanches et b noires. Dans le premier membre on calcule ce nombre, en distingant suivant le nombre k de blanches choisies.

2) Lemme 2 :

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(R)$ alors les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Démonstration : I désignant la matrice unité de $\mathcal{M}_n(R)$ et X l'indéterminé des polynômes, il suffit de comparer les déterminants des deux matrices suivantes de $\mathcal{M}_{2n}(R)$:

$$\begin{pmatrix} X.I & A \\ B & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ -B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X.I - AB & A \\ O & I \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} X.I & A \\ B & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A \\ O & X.I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X.I & O \\ B & X.I - BA \end{pmatrix}$$

3) Résolution du problème : stricte positivité de la matrice

Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n R$, avec $a_{i,j} = C_{i+j-2}^{i-1}$
Posons : $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n R$, avec $t_{i,j} = C_{i-1}^{j-1}$ (en utilisant la convention $C_n^p = 0$ si $p > n$)
On montre, grâce au lemme 1, que : $M = T.{}^tT$.
La matrice T est triangulaire inférieure, avec des coefficients 1 sur la diagonale. Son déterminant est donc égal à 1, ainsi que celui de sa transposée et celui de M.
Si X et Y désignent des vecteurs colonnes de R^n, M est la matrice de la forme bilinéaire :

$$(X, Y) \mapsto \varphi(X, Y) = {}^tY.MX = {}^tY.T.{}^tT.X = {}^t({}^tT.Y)({}^tT.X).$$

Donc :

$$\varphi(X, X) = {}^t({}^tT.X).({}^tT.X) = \|{}^tT.X\|^2 \geq 0$$

Et $\varphi(X, X) = 0$, seulement si ${}^tT.X = O$, c'est-à-dire $X = O$ (car ${}^tT$ est inversible).
M est donc définie positive.

4) Etude du spectre de la matrice

On va montrer que M et M^{-1} ont même polynôme caractéristique, ce qui prouvera que l'ensemble des valeurs propres de M coïncide avec l'ensemble de leurs inverses.
Pourtoute matrice $N = (b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{p,q}(R)$, posons $\overline{N} = \left((-1)^{i+j} b_{i,j}\right)$ On vérifie que si $N_1 \in \mathcal{M}_{p,q}(R)$ et $N_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(R)$, alors $\overline{N_1.N_2} = \overline{N_1}.\overline{N_2}$.
La formule du binôme de Newton montre que T transforme les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ (1+X) \\ (1+X)^2 \\ \vdots \\ (1+X)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc T^{-1} transforme les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 : cr(-1+y) \\ (-1+y)^2 \\ \vdots \\ (-1+y)^{n-1} \end{pmatrix}$$

et $\overline{T}$ fait de même, d'après Newton.
Comme R^n admet une base de vecteurs du type ci-dessus (d'après le classique déterminant de Vandermonde), on conclut que : $T^{-1} = \overline{T}$.
D'après le lemme 2, $M^{-1} = {}^tT^{-1}.T^{-1} = {}^t\overline{T}.\overline{T}$ a le même polynôme caractéristique que $\overline{M} = \overline{T}.{}^t\overline{T}$.

Et $\overline{M}$ a le même polynôme caractéristique que M, car M et $\overline{M}$ ont les mêmes valeurs propres, puisque : si $M.X = \lambda X$ alors $\overline{M}.\overline{X} = \lambda\overline{X}$.

PROBLÈME 48

Énoncé (proposé par R. Garin) :

Pour quel(s) entier(s) naturel(s) n la somme

$$\sum_{k=0}^{n} k^2(n-k)^2$$

est-elle un carré parfait ?

Indication (indépendamment, par R. Garin et P. Renfer) :

On commence d'abord par montrer que la somme est un polynôme $P(n)$ de degré cinq. On le calcule et on trouve :

$$P(n) = \frac{1}{30}(n^5 - n) = \frac{1}{30}n(n-1)(n+1)(n^2+1).$$

On constate que pour $n = 0, 1, 2$, c'est un carré parfait. En discutant selon les congruences de n modulo 2, modulo 3, et modulo 5, on parvient à démontrer que ce sont là les seules valeurs de n pour lesquelles c'est un carré parfait.

PROBLÈME 49

Énoncé (proposé par R. Kern) :

Dans un triangle ABC, on note a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB, et α, β, γ les mesures respectives des angles en A, B et C.

1) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos\alpha = \cos 2\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 2\beta$.

2) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos\alpha = \cos 3\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 3\beta$.

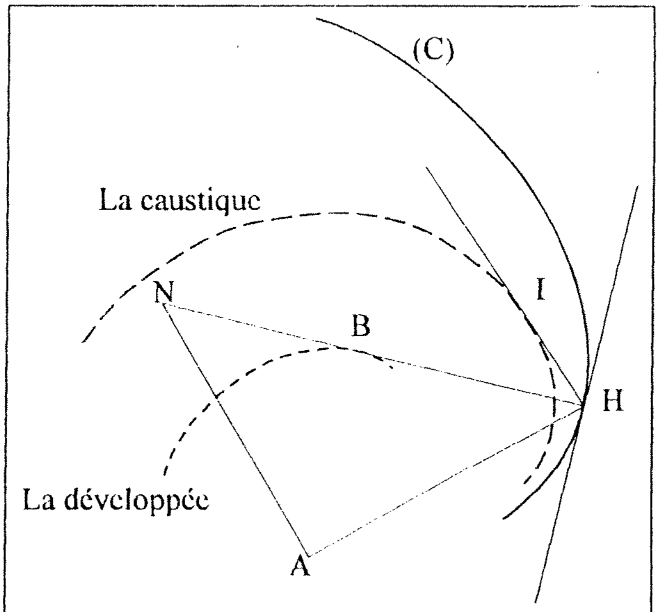
PROBLÈME 50

Énoncé (proposé par A. Stoll, IREM de Strasbourg) :

Données :
- Une courbe plane (C) "suffisamment régulière"
- un point A dans le plan de la courbe (C)

Notations : (cf. figure)

- H un point de la courbe (C)
- B désigne le centre de courbure correspondant à H
- N le point de la normale à (C) en H tel que (AN) soit perpendiculaire à (AH)
- I est le point de la caustique issue de A



les angles $\widehat{AHB}$ et $\widehat{BHI}$ sont égaux

Montrer que :

$$\boxed{\frac{|2HN - HB|}{HB} = \frac{HA}{HI}}$$

Applications :

1. En déduire une construction géométrique du centre de courbure d'une parabole en un point quelconque.
2. Montrer que la caustique d'une spirale logarithmique par rapport à son centre est une spirale logarithmique identique.
3. Trouver d'autres applications de la formule ci-dessus.

PROBLÈME 51

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Démontrer l'identité

$$tg\,x = \frac{x - \frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5}\frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{1.3}{1.2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

2°) Généraliser l'identité précédente au quotient

$$\frac{x - \frac{a(a+2)(a+4)}{a(a+1)(a+2)}\frac{x^3}{3!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}\frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{a(a+2)}{a(a+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}\frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1,D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2), puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3).
Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

PROBLÈME 53

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des 2−mélanges réguliers (pour la définition d'un 2−mélange, voir l'article sur les tours de cartes dans le présent numéro de l'Ouvert).
1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.
2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.