UN THÉORÈME REMARQUABLE SUR LES COURBES DE L'ESPACE : JACOBI, EULER, GAUSS, CLAUSEN

par John McCLEARY, professeur au Vassar College, Poughkeepsie, New York

Durant l'année 1996-1997, le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Strasbourg avait organisé un atelier de lecture de quelques uns des grands textes du XIX^e siècle, parus dans le *Journal de Crelle* créé en 1826. John Mac Cleary, alors en séjour pour un an à l'U.F.R. de Mathématiques a participé assidûment à cet atelier, et y a fait un exposé intéressant qu'il a bien voulu rédiger et publier dans l'Ouvert.

Parmi les résultats géométriques les plus célèbres de Carl-Friedrich GAUSS (1777-1855) il y a sa contribution au théorème dit de Gauss-Bonnet. Nous considérons une surface F de l'espace et un triangle XYZ sur cette surface dont les côtés sont des segments géodésiques. L'application normale, $N : F \to S^2$, associe à chaque point de F l'un des points de la sphère unité S^2 se trouvant sur la ligne qui passe par l'origine et qui est parallèle à la direction normale à la surface F au point considéré. Dans les *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828) Gauss utilise l'application normale et certaines coordonnées spéciales pour prouver le résultat suivant.

Théorème. — *Soit XYZ un triangle géodésique sur une surface F de R^3. Notons ABC l'image de ce triangle par l'application normale à la surface. Alors*

$$\text{aire}(ABC) = \pm(\angle X + \angle Y + \angle Z - \pi)$$

C'est une généralisation d'une grande portée du théorème donné en 1629 par Albert GIRARD (1595-1632) qui démontre le cas particulier d'un triangle limité par des segments de grands cercles sur une sphère. (Ce résultat est aussi attribué à Thomas HARRIOT (1560-1621) qui le découvrit en 1603 d'après une lettre écrite par Briggs en 1625. Voir [Rosenfeld 88].) Le signe $\pm$ est déterminé par la courbure gaussienne et peut être négatif quand la surface est *concavo-convexo* dans la terminologie de Gauss, c'est à dire courbée négativement.

Gauss fut manifestement heureux de ce résultat. Il écrit au § 20 des *Disquisitiones* : "Ce théorème, . . ., si nous ne nous trompons pas, devrait être compté parmi les plus élégants dans la théorie des surfaces courbes, . . .". Dans cet article nous présentons une preuve et une généralisation de ce théorème dues à C.G. JACOBI (1804-1851) qui parurent en 1836 dans le Journal de Crelle et encore dans l'Astronomische Nachrichten de SCHUMACHER en 1842. Les écrits de Jacobi diffèrent de façon significative des *Disquisitiones* de Gauss en ceci que l'approche est synthétique c'est à dire qu'elle utilise la géométrie élementaire de la sphère et non l'outil analytique que Gauss introduit dans les *Disquisitiones* et sur lequel est fondée la géométrie différentielle moderne. Pour simplifier, la généralisation de Jacobi supprime tout à fait la surface et énonce une propriété des courbes de l'espace.

Un autre but de cet article est de raconter l'histoire des deux preuves que Jacobi a données pour sa généralisation. En 1842 le travail de Jacobi attira l'attention de Thomas CLAUSEN (1801-1885), un astronome et mathématicien qui était considéré à son époque comme remarquablement doué en mathématiques. Le deuxième article de Jacobi, de 1842, commence par cette phrase : "Dans le numéro 457 de l'Astronomische Nachrichten Monsieur Clausen formule un doute non fondé sur l'exactitude du théorème que j'ai démontré dans le 16e volume du Journal de Crelle et dont le célèbre théorème de Gauss est un cas particulier".
C'est une réponse publique à la publication d'un doute émis sur un résultat mathématique. Nous allons parler des articles de Jacobi et Clausen aussi bien que d'un résultat d'Euler sur lequel Jacobi fonde sa seconde preuve. Ce qui ressort de l'histoire est un exemple particulier de l'accueil fait au travail de Gauss dans la période qui précède la grande construction de la géométrie différentielle par Gauss et Riemann. Jacobi était à la recherche des fondements de la géométrie comme l'étaient Gauss et Riemann. Le travail d'Euler sur la trigonométrie sphérique fournit à Jacobi les bases pour son théorème.

La première preuve de Jacobi
Journal de Crelle, tome 16 (1836), 344-350

Jacobi soumit un article en latin, intitulé *Démonstration et nouvelle généralisation d'un théorème de Gauss sur la courbure totale de triangles formés de géodésiques d'une surface donnée* *, au Journal de Crelle le 27 juillet 1836. Dans cet article Jacobi démontre le théorème suivant :

Théorème. — *Soient données XY, YZ et ZX trois courbes de l'espace telles que les directions normales à chaque paire de courbes se confondent en chaque sommet. Notons ABC l'image des normales aux courbes sur la sphère de rayon unité centrée à l'origine. Alors*

$$\text{aire}(ABC) = \angle X + \angle Y + \angle Z - \pi$$

Rappelons que le vecteur normal à une courbe de l'espace est de norme un et dans la direction du rayon du cercle osculateur ou, de façon analytique, est obtenu en prenant la direction de la dérivée seconde d'une paramétrisation de la courbe par l'abscisse curviligne.

Au début de son article Jacobi rappelle le théorème de Gauss. Puis il affirme que ce théorème implique sa généralisation "*Cependant, pous considérer des courbes*

* traduit du latin par Margaret Fusco, Rachel Kitzinger et John McCleary

arbitraires, il faut admettre que ce sont des géodésiques d'une certaine surface, ...". Comme il a maintenant une preuve de sa généralisation il est clair que le point central de l'article n'est pas la généralisation. Il continue ainsi *"Le théorème précédent admet une présentation sous diverses formes, qui révèle mieux la qualité intrinsèque".*

Ainsi c'est la "qualité intrinsèque" que Jacobi recherche et la véritable source du théorème de Gauss. L'article se tourne maintenant vers l'explication de la dualité polaire sur une sphère selon L. EULER (1707-1783). Utilisant une version infinitésimale de la dualité polaire, Jacobi reprend le travail de son théorème qui conduit aux relations entre la surface ABC et son dual polaire, un hexagone $aa_1bb_1cc_1$ sur la sphère. Il établit alors un autre théorème dont les relations précédentes sont un corollaire et pour lequel il donne un bel argument synthétique. (Un compte rendu complet de l'article de Jacobi de 1836 peut être trouvé dans [McCleary 94].) En outre, pour se justifier d'avoir trouvé la "base réelle" du théorème de Gauss, Jacobi propose une preuve analytique de son second théorème à la manière des *Disquisitiones* de Gauss; il remarque : *"Si le théorème II, qui est accessible par une simple construction géométrique, a besoin d'une preuve par des formules analytiques, vous tombez dans des calculs assez compliqués."*

Ainsi il pense avoir trouvé un chemin plus direct pour le théorème de Gauss et par là un résultat majeur en géométrie des courbes et surfaces de l'espace.

Thomas CLAUSEN

Dans le numéro 257 des Astronomische Nachrichten de Schumacher de 1842, Thomas CLAUSEN publia sa *Berichtigung eines von Jacobis aufgestellten Theorems* (Une correction à l'un des théorèmes proposés par Jacobi). Dans cet article Clausen donne suite à la première des remarques de Jacobi. Etant données trois courbes de l'espace, XY, YZ et ZX, dont les normales s'accordent de part et d'autre des sommets, y-a-t-il en fait une surface sur laquelle ces courbes se trouvent être des géodésiques? La réponse est NON et Clausen prouve, en utilisant la structure analytique de Gauss, qu'il y des conditions, même pour choisir deux courbes qui soient des géodésiques sur une surface. Il termine l'article avec cette remarque :
"Par conséquent, il n'est pas vrai que, pour deux et encore moins pour trois courbes sécantes et arbitraires de double courbure ayant la même normale aux points d'intersection, il y ait une surface sur laquelle ces courbes soient des géodésiques et Gauss déduisit son théorème pour les propriétés des surfaces courbes... ; une extension à la généralité comme celle prise par Jacobi n'est pas permise".

Qui était Thomas Clausen? Examinons ici quelques moments de sa vie et de sa carrière - pour un excellent portrait de ce mathématicien, voir l'article de [Biermann 69]. Né à Nübel en Allemagne près de la frontière danoise, le 16 janvier 1801, son éducation fut prise en main à l'age de 12 ans par le pasteur local, Georg Holst, qui reconnut son talent et le recommanda à H.C. Schumacher (1780-1850) comme assistant à l'Observatoire d'Altona. Schumacher travailla avec Clausen de 1824 jusqu'en 1828 où ils eurent une sorte de brouille. Clausen alla alors à Munich où il travailla à l'Institut d'Optique de von Utzschneider qui donna à Clausen la liberté de travailler ses mathématiques et l'astronomie. Durant cette période il publia plusieurs articles dans le Journal de Crelle y compris un travail (vol. IV, 1829, 391-394) dans lequel il résoud un problème difficile et bien connu de Castillon.

En 1840, après une crise sévère de maladie mentale, Clausen quitta Munich et retourna à Altona auprès de Schumacher. Sans situation, Clausen chercha un appui auprès de Schumacher qui avait une correspondance considérable avec le monde scientifique de l'époque. Dans une lettre à Gauss, Schumacher demande que Gauss fasse la distinction chez Clausen entre son "caractère dérangé et ingrat" et son talent. Schumacher fait part de certains des derniers résultats de Clausen sur les nombres de Bernoulli à W. BESSEL (1784-1846), un collègue de Jacobi. Bessel fut impressionné et suggéra à Jacobi que Clausen pouvait servir de "Rechenknecht" (une sorte de calculateur de service) dans le travail de Jacobi sur les variations planétaires et la théorie des perturbations, dans lequel les calculs étaient essentiels mais difficiles. Jacobi obtint 250 Talers de l'Académie de Berlin en juillet 1840 pour subvenir aux besoins de Clausen dans cette fonction.

Durant cette période (1840-1842) Clausen eut un grand élan de créativité. Il démontre le résultat qui porte son nom aujourd'hui, le théorème de Clausen-von Staudt, qui montre que, pour B_{2n} le nième nombre de Bernoulli

$$B_{2n} + \sum_{p-1|2n} \frac{1}{p} = \text{un entier}$$

Pour sa détermination de la trajectoire de la comète de 1770 il gagna un prix de l'Académie de Copenhague, ainsi que l'admiration de Bessel. Plus tard il impressionna Gauss avec sa découverte d'une lemniscate au moyen de la section d'un tore approprié. Il trouva une explication au fait que les lunules sont quarrables (au sens d'Hipparque) et il factorisa $2^{2^6} + 1 (= 274177 \times 67280421310721)$ par une méthode qui reste inconnue aujourd'hui. En 1842 Clausen fut appelé à l'Observatoire de Dorpat et il devint le directeur de cet observatoire en 1855, succédant à J.H. MADLER (1794-1874).
Lorsqu'il reçut l'article de Clausen qui corrigeait le travail de Jacobi, Schumacher écrivit (le 1-IX-1842) à Gauss pour lui demander s'il voulait bien regarder l'article avant que lui, Schumacher, le publie. Il écrit, *"..., je ne veux pas voir Clausen s'opposer à Jacobi."* Cependant, il continue en disant, *"Si Clausen a raison, comme il me semble, c'est alors un leçon très utile pour Jacobi qui, avant les plus grands esprits, cherche toujours à améliorer ou au moins à généraliser"*. Selon [Koenigsberger], il y avait souvent des remarques désobligeantes sur Jacobi dans les correspondances de Gauss et Schumacher.

Gauss répondit à Schumacher (le 5-IX-1842) qu'il trouvait la réfutation de Clausen "à la généralisation alléguée de mon théorème entièrement justifiée." Schumacher publia alors l'article.

Jacobi revint à l'automne de 1842 d'un long voyage en Europe durant lequel il visita la France et l'Angleterre et trouva son travail apprécié en dehors de son cercle germanique. Il eut à coeur de répondre lui-même à Clausen avant que son enseignement ne commence et, le 16-X-1842, il soumit son second article sur l'extension du théorème de Gauss, intitulé *Über einige merkwürdige Curventheoreme.*

Dans les deux prochains paragraphes nous présentons, d'abord un exposé des contributions d'Euler à la trigonométrie sphérique sur lesquelles Jacobi base son travail, et ensuite la seconde preuve de Jacobi. Il est bon de noter cependant que, bien que Jacobi se soit trompé dans ses remarques d'introduction, sa preuve de 1836 ne dépend nullement de ces remarques corrigées par Clausen (voir [McCleary 94]). Il semble que le doute de Clausen, l'enthousiasme de Schumacher, et l'approbation de Gauss n'étaient pas fondés sur une lecture complète de l'article de Jacobi.

Euler et la trigonométrie sphérique

Les contributions d'Euler à la trigonométrie sphérique sont les bases de développements futurs sur le sujet (voir les articles de Chemla). Dans notre présentation nous mentionnons quelques-unes de ses idées principales.

I. Dans le mémoire de 1753 Euler introduit la notation moderne, à la fois pour la dénomination des triangles et pour les fonctions. Il distingue une fonction de son argument en place d'une pratique plus courante à l'époque qui était d'écrire des relations entre les valeurs traduisant leurs significations géométriques. L'habitude de nommer le côté opposé au sommet avec la minuscule de la lettre majuscule nommant le sommet apparait dans ce mémoire et joue un rôle dans la description que fait Euler de la dualité polaire.

II. Le mémoire applique le calcul des variations géométriquement pour obtenir les formules connues de trigonométrie sphérique à partir des principes variationnels. Le problème de *résolution d'un triangle sphérique* est traité de façon minutieuse - étant donnés trois éléments parmi les trois angles et les trois côtés d'un triangle, déterminer les autres éléments. Euler organise ses 5 formules d'une manière qui révèle la dualité polaire mais il ne présente pas ceci comme faisant partie de son étude. [Chemla] prétend qu'Euler avait à l'esprit des surfaces plus générales quand il écrivit le mémoire, en particulier la surface de la Terre comme une sphéroïde. La généralisation de ces méthodes est réalisée dans les *Disquisitiones* de Gauss.

III. Dans le traité de trigonométrie sphérique de 1779, Euler s'y prend de façon synthétique pour en déduire les formules. Utilisant la projection centrale il prouve certaines formules de base et obtient les autres par traitement algébrique. Au paragraphe 12 il présente la *règle de réécriture* - "...échanger minuscule et majuscule et prendre l'opposé du cosinus". Le principe sous-jacent qui prouve la règle de la réécriture est la dualité polaire. A chaque grand cercle nous pouvons associer son pôle, qui est le point éloigné de $\frac{\pi}{2}$ de chaque point du grand cercle et situé dans le demi-espace supérieur déterminé par une orientation sur le grand cercle. A un triangle sphérique ΔABC nous pouvons associer son dual polaire $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ où $\hat{A}$ est le dual polaire de BC, $\hat{B}$ le dual polaire de AC et $\hat{C}$ le dual polaire de AB. La règle de réécriture découle du théorème suivant :

Théorème. —

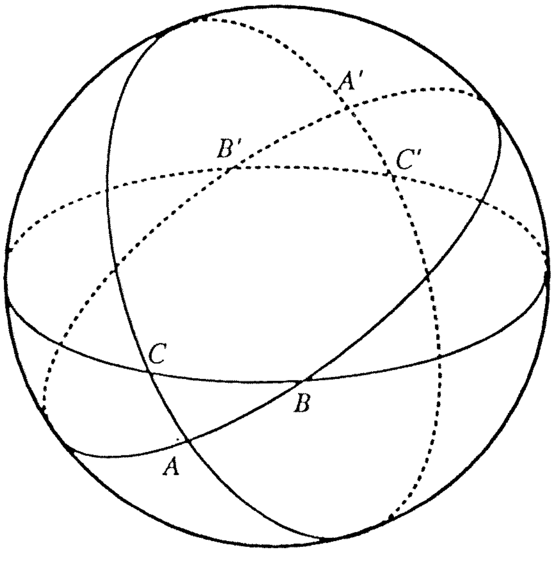
$$\hat{c} = \hat{A}\hat{B} = \pi - \angle C, \quad \hat{b} = \hat{A}\hat{C} = \pi - \angle B, \quad \hat{a} = \hat{B}\hat{C} = \pi - \angle C.$$

$$\angle\hat{A} = \pi - a, \quad \angle\hat{B} = \pi - b, \quad \angle\hat{C} = \pi - c.$$

IV. Dans une note de 1778, Euler donne sa preuve bien connue du théorème de Girard :

Théorème de Girard. — *Si ΔABC est un triangle formé d'arcs de grands cercles sur une sphère de rayon 1 alors*

$$\text{aire}(ABC) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.$$



(Démonstration d'Euler, 1781). Rappelons la définition d'une *lune* sur la sphère. C'est la région entre deux grands cercles. Si l'angle central qui détermine la lune est θ, alors l'aire de cette lune est $2\theta = (\theta/2\pi).4\pi$. Les grands cercles $\widehat{AB}$ et $\widehat{AC}$ forment deux lunes $ABA'C$ et $A'B'AC'$, et les deux ensembles ont pour aire $4\angle A$. Aussi les deux lunes couvrent ΔABC et $\Delta A'B'C'$ qui sont antipodiques et congrues. Comme on prend toutes les lunes associées au triangle ΔABC, on trouve que :

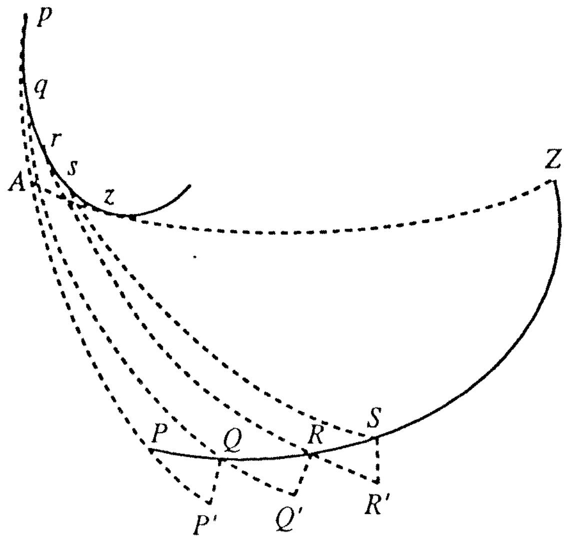
$$4\pi + 4\angle A + 4\angle B + 4\angle C - 6\,\text{aire}(\Delta ABC) + 2\,\text{aire}(\Delta ABC).$$

Il suit que aire$(\Delta ABC) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$, l'excès angulaire de ΔABC.
Dans l'approche que fait Jacobi du théorème de Gauss, il utilise la dualité polaire synthétique de Euler dans sa première démonstration et les lunes avec leur aire dans la seconde. Nous allons examiner cette seconde preuve dans ce qui suit.

La réponse de Jacobi
Astronomische Nachrichten tome 20 (1842), 115-120

Si $\alpha : [u, v] \to R^3$ est la courbe XY, paramétrisée par la longueur d'arc, soit ab le chemin déterminé par les tangentes $\alpha'(s)$ et AB le chemin déterminé par les normales $N(s)$ aux points de XY.
Soit $u < s_1 < s_\omega < v$ et $p = \alpha'(s_1), q = \alpha'(s_1 + ds_1) = \alpha'(s_2), r = \alpha'(s_2 + ds_2) = \alpha'(s_3)$, jusqu'à $z = \alpha'(s_\omega)$. Soit $P = N(s_1), Q = N(s_2), R = N(s_3), \ldots, Z = N(s_\omega)$. On a alors

$$pP = qQ = rR = \ldots = zZ = \pi/2.$$



On prolonge qP jusqu'à P', rQ à Q', etc. d'après la condition $qP' = rQ' = \ldots = \pi/2$. Donc les régions $qP'Q, rQ'R, \ldots$, sont chacune la moitié d'une lune. Alors, les aires de ces régions sont déterminées par les angles centraux, $\angle P'qQ, \angle Q'rR$, etc. Si l'on ne tient pas compte des triangles $\Delta PP'Q$, $\Delta QQ'R$, dont l'aire est un infiniment petit du second ordre, alors on trouve que

$$\angle PpQ + \angle QqR + \ldots = \text{l'aire formée par } pz, zZ, pZ, \text{et } pP$$
$$= T.$$

On prolonge l'arc du grand cercle zZ jusqu'à pP au point A. Donc

$$\text{aire}(pAz) + \text{aire}(ZAP) = T.$$

Pour les triangles sphériques l'aire est l'excès angulaire, alors on a grâce à $\angle Azp = 0$:

$$\text{aire}(pAz) = \angle pAz + T - \pi.$$

Il suit de là que

$$\begin{aligned}\text{aire}(ZAP) &= T - \text{aire}(qAz) = T - \angle qAz - T + \pi \\ &= \pi - \angle qAz = \angle ZAP.\end{aligned}$$

Alors, l'aire de ΔZAP est aussi un angle $\angle ZAP$.

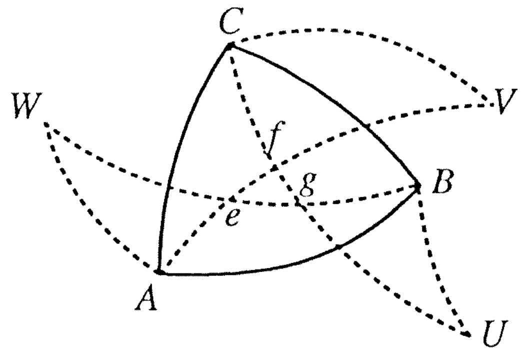
Le plan osculateur du point $\alpha(s_1)$ est le plan $OpP = OqA$ et au point qui correspond à z, le plan osculateur est le plan $OzZ = OAz$. Alors, $\angle qAz$ est l'angle formé par les plans osculateurs aux points $\alpha(s_1)$ et $\alpha(s_\omega)$. Nous avons montré :

Théorème I. — *Du centre d'une sphère on prend une ligne parallèle au rayon de courbure d'une courbe donnée XY, qui coupe la sphère selon une ligne PZ et, en même temps, on coupe la sphère par les plans parallèles aux plans osculateurs aux points X et Y qui construisent les arcs de grands cercles PA et ZA. On trouve alors que le chemin PZ a une longueur égale à l'angle $\angle PAZ$ et $\angle PAZ$ est supplémentaire à l'angle formé par les plans osculateurs aux points X et Y.*

Démonstration du théorème principal : On associe au triangle ΔXYZ son image normale ABC sur S^2. Des sommets A, B, et C on construit les arcs suivants de grands cercles,

BU sur le plan osculateur de la courbe YZ au point Y,
CU sur le plan osculateur de la courbe YZ au point Z,
AV sur le plan osculateur de la courbe XZ au point X,
CV sur le plan osculateur de la courbe XZ au point Z,
AW sur le plan osculateur de la courbe XY au point X,

BW sur le plan osculateur de la courbe XY au point Y.



Selon la démonstration du théorème I, on trouve :

$$\begin{aligned}
\text{aire}(BUC) &= \angle BUC = \text{aire}(BgU) + \text{aire}(BgC)\\
\text{aire}(CVA) &= \angle CVA = \text{aire}(CfV) + \text{aire}(CfA)\\
\text{aire}(AWB) &= \angle AWB = \text{aire}(AeW) + \text{aire}(AeB)
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
&\text{aire}(BUC) + \text{aire}(AVC) + \text{aire}(AWB) - \text{aire}(ABC)\\
&\qquad = \text{aire}(BgU) + \text{aire}(CfV) + \text{aire}(AeW) - \text{aire}(efg).
\end{aligned}$$

Car tous les triangles sont formés par des arcs de grands cercles; on peut donc remplacer l'aire par l'excès angulaire selon le théorème de Girard. Alors,

$$\begin{aligned}
&\angle BUC + \angle AVC + \angle AWB - \text{aire}(ABC)\\
&\qquad = \angle BUC + \angle BgU + \angle gBU - \pi\\
&\qquad + \angle AVC + \angle VfC + \angle fCV - \pi\\
&\qquad + \angle AWB + \angle AeW + \angle eAW - \pi\\
&\qquad - \angle AeW - \angle VfC - \angle BgU + \pi\\
&\qquad = -2\pi + \angle BUC + \angle AVC + \angle AWB + \angle gBU + \angle fCV + \angle eAW.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\text{aire}(ABC) = 2\pi - \angle eAW - \angle fCV - \angle gBU$. Pour terminer la démonstration, on montre que $\angle eAW = \pi - \angle X$, $\angle gBU = \pi - \angle Y$, et $\angle fCV = \pi - \angle Z$. Car les sommets partageant les directions normales, $\angle X$ est borné par les plans osculateurs au point X sur XY et XZ. Mais $\angle eAW = \angle VAW$ et AV, AW sont les arcs de grands cercles formés par les plans osculateurs au point X sur XY et XZ. D'après le theorème I, $\angle VAW = \pi - \angle X$. D'après le même argument aux points Y et Z, on a $\angle gBU = \pi - \angle Y$, et $\angle fCV = \pi - \angle Z$.

Finalement on a

$$\begin{aligned}\text{aire}(ABC) &= 2\pi - (\pi - \angle X) - (\pi - \angle Y) - (\pi - \angle Z)\\ &= \angle X + \angle Y + \angle Z - \pi.\end{aligned}$$

Conclusion

Jacobi termine son article de 1842 par un résultat remarquable :

LE BEAU COROLLAIRE. Si l'on donne une courbe arbitraire, continue, et fermée dans l'espace, et on prend le chemin déterminé par l'image normale sur la sphère, alors ce chemin ainsi construit divise la sphère en deux parties de même aire.

De toutes les mathématiques si riches contenues dans cet échange, ce corollaire, énoncé sans preuve à la fin de l'article de Jacobi, est le seul résultat que l'on trouve dans la plupart des livres récents (voir par ex. Spivak, vol. 3, p. 407), et lorsqu'on le trouve, la preuve est beaucoup plus dans l'esprit de Gauss et Riemann. Jacobi a souvent enseigné la théorie des courbes et surfaces (15 semestres de sa carrière d'enseignant). Sa réponse au théorème de Gauss fut de retourner à Euler qui avait façonné la théorie moderne de la trigonométrie sphérique, et de chercher une preuve synthétique. Cela établit une sorte de parallèle aux deux preuves qu'Euler a données du théorème de Girard, l'une basée sur des principes variationnels (*Disquisitiones*), l'autre synthétique (Jacobi). Clausen par contre, avait absorbé les méthodes de Gauss, et répondu au défi de Jacobi, en mettant en évidence une faille dans son argument final erroné.

Bibliographie

Biermann, K.-R., Thomas Clausen, Mathematiker und Astronom, Jour. de Crelle CCXVl (1969), 159-198.

Chemla K., The background to Gergonne's treatment of duality : Spherical trigonometry in the late 18th century, in D.E. Rowe and J. McCleary (eds.), The History of Modern Mathematics, vol. 1 331-359, Academic Press, 1989.

Chemla, K., Euler's work in spherical trigonometry : Contributions and applications, to appear in Euler's Opera Omnia (3) vol. 10, Über Magnetismus, Elektrizitat, und Wärme.

Clausen, T., Berichtigung eines von Jacobi aufgestellten Theorems, Schumacher Astronomische Nachrichten vol. 20 (1842) 32-40.

Euler, L.,Principes de la trigonométrie sphérique tires de la méthode des plus grands et plus petits, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin , vol. 9 (1753), 223-257.

Euler, L., De mensura angulorum solidorum, Acta academiae scientarum Petropolitanae vol. 2 I (1778 : II) (1781), 31-54.

Euler, L., Trigonometria sphaerica universa ex primis principiis breviter et dilucide derivata, Acta academiae scientarum Petropolitanae vol. 3 I (1779 : I) (1782), 72-86.

Gauss, C.-F., Disquisitiones generales circa superficies curvas, commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores, vol. VI, 1828. (Astérique vol. 62(1979), P. Dombrowski).

Jacobi, C.G.J., Demonstration et amplifactio nova therorematis Gaussiani de curvatura integra triangli in data supreficie e lineis brevissimis formati, Crelle vol. 16 (1836), 344-350.

Jacobi, C.G.J., Uber einige merkwürdige Curventheoreme, Schumacher Astronomische Nachrichten , vol.20 (1842), 344-350.

Koenigsberger, Leo, C.G.J. Jacobi, Teubner, Leipzig, 1904.

McCleary, J., A theory of reception for the history of mathematics, in The History of Modern Mathematics, volume I, edited by D. Rowe and J. McCleary, Academic Press (1989), 3-14.

McCleary, J., Geometry from a Differentiable Viewpoint, Cambridge University Press, New York, 1994.

McCleary, J., On Jacobi's remarkable curve theorem, Historia Mathematica vol. 21 (1994), 377-385.

Reich, K., Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauss bis Riemann, Archive for the History of Exact Sciences vol.11 (1973), 273-382.

Rosenfeld, B., A History of Non-Euclidean Geometry, Springer-Verlag, New York, 1988.

Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, volume III, Publish or Perish Inc., Houston, TX, 1975.

Cet article est basé sur l'exposé : "Jacobi comme géomètre" donné dans l'Atelier de lecture - Histoire des mathématiques à Strasbourg, en avril 1997. Je remercie J.-P. FRIEDELMEYER et N. SCHAPPACHER pour les encouragements à présenter ce travail, et pour avoir organisé un séminaire stimulant durant mon séjour d'une année à Strasbourg.