L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PAR CORRESPONDANCE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Connaître la personnalité des mathématiciens célèbres n'est pas chose aisée. Leur oeuvre publiée a gommé toute trace d'émotion et de sentiment pour présenter les résultats mathématiques dans toute leur rigueur et leur vérité. Vérité souvent très belle sans doute et admirable, "honneur de l'esprit humain", mais abstraite et froide, figée dans son éternité comme un ciel étoilé par une nuit d'hiver glacée. Ce qui en a éloigné plus d'un, curieux de sciences mais rebuté par son aridité. A tort : les lettres écrites par les mathématiciens à leurs amis ou collègues nous révèlent des personnalités sensibles et passionnées, essayant de résoudre au mieux, non seulement les problèmes scientifiques qu'ils se sont posés mais aussi les mille et un tracas de leur vie quotidienne et les difficultés causées par les événements politiques et sociaux. Cette rubrique vous présente des lettres, ou de larges extraits que nous pensons représentatifs et révélateurs de la personnalité profonde, mais quelquefois méconnue, de nos illustres savants. Dans ce numéro :

Le voyage d'Abel en Europe.

Niels Henrik Abel est né le 5 août 1802 dans Finnö, petite île de la côte sud-ouest de la Norvège. Son père, pasteur, était un homme distingué, actif comme représentant élu aux deux premiers parlements de Norvège. Sa mère était louée pour son exceptionnelle beauté, bonne vivante, mais très tôt portée sur l'abus d'alcool. Niels Henrik était le second d'une famille de six enfants : cinq garçons et une fille. Leur enfance se situe dans la période la plus critique de l'histoire de la Norvège. Celle-ci avait à ce moment là son destin lié à celui du Danemark, ce qui l'entraîna dans les guerres napoléoniennes aux côtés de la France, subissant ainsi le blocage de ses côtes par la flotte britannique. Durant la guerre, un mouvement nationaliste se développa, dont l'un des premiers soucis était le ravitaillement du pays, mais qui fut aussi à l'origine de la création de l'Université de Christiania (aujourd'hui Oslo) grâce à une souscription nationale. L'épisode napoléonien tirant à sa fin au moment où la famille régnante en Suède s'éteignait, le gouvernement y choisit un des généraux de Napoléon pour assurer la succession : le maréchal Bernadotte qui, en bon émule de son empereur, envahit aussitôt le Danemark. Celui-ci dut céder la Norvège à son victorieux adversaire suédois, mais l'élection rapide d'une assemblée nationale, le *Storting*, permit de limiter la sujétion : le roi de Suède occupera le trône de Norvège, mais en lui accordant un gouvernement autonome. Le père d'Abel avait été élu représentant au *Storting* et y joua un rôle non négligeable pour garantir la liberté par un certain nombre d'articles inscrits dans la Constitution d'Eidsvoll, reconnue par Bernadotte.

C'est dans ce contexte difficile et agité que Abel passa son enfance à Gjerrestad la nouvelle paroisse de son père; celui-ci lui donna la première éducation, avant de l'envoyer, en 1815 à l'Ecole cathédrale de Christiania. Depuis l'ouverture de l'Université, en 1811, cette école était assez médiocre, ses meilleurs professeurs l'ayant quitté pour l'Université. Leurs remplaçants étaient moins qualifiés, souvent abrutis par l'alcool. Le professeur de mathématiques dû même donner sa démission après avoir cogné un de ses élèves tellement fort qu'il en mourut. A sa place fut nommé un jeune homme, ancien élève de l'Ecole, qui n'avait que sept ans de plus qu'Abel mais qui restera dans l'histoire comme celui qui a su éveiller le génie d'Abel : Berndt Michael Holmboe. Sans être lui-même un mathématicien de grand talent, il était cependant un excellent pédagogue, passionné de littérature et de musique, s'attachait à rendre son enseignement attrayant et laissant ses élèves travailler selon leur rythme. Voici comment lui-même évoque son rôle dans la formation mathématique qu'il procura à son élève, durant ses premières années :

"Il ne s'attira aucune attention particulière, jusqu'à ce qu'en 1818, époque d'où date ma nomination de professeur de mathématiques à ladite école, on accorda aux disciples quelques heures exprès pour les exercer à résoudre des problèmes algébriques ou géométriques. Ce fut alors que le talent d'Abel se développa d'une manière éclatante. Il fallut bientôt lui réserver des problèmes tout-exprès. Depuis ce temps il se voua aux mathématiques avec ardeur, et y fit des progrès énormes, et avec une rapidité qui n'appartient qu'au génie. Ayant rapidement passé le cours élémentaire, je lui donnais, sur sa demande, des leçons en particulier sur le calcul infinitésimal. Après l'avoir initié dans les éléments de cette science, je parcourus avec lui l'introduction et les institutions du calcul différentiel et intégral d'Euler. Dès-lors il commença à marcher seul. Il étudia les ouvrages de Lacroix, Francoeur, Poisson, Gauss et surtout ceux de Lagrange, et fit déjà lui-même quelques essais."

Lorsqu'en automne 1821 Abel entre à l'Université de Christiania il connaît l'essentiel des mathématiques de son temps et les problèmes que celles-ci posent aux mathématiciens d'alors. Encouragé par Holmboe mais sans ressources depuis la mort de son père en 1820, il obtient une place gratuite au dortoir de l'Université, et quelques professeurs se sont même concertés pour lui fournir, à leurs frais, une subvention, afin de "*préserver ce rare talent pour les sciences, talent d'autant plus digne d'attention qu'il s'accompagne de persévérance et de bonne conduite.*" L'Université n'avait rien à lui apprendre en mathématiques, mais favorisait le développement de ses propres recherches, quelque fois au détriment des autres cours. La tradition rapporte qu'un jour, pendant la leçon d'un certain professeur Sverdrup, il se leva brusquement, au grand étonnement de l'auditoire, et se précipita vers la porte en criant "*Jeg har det*" ("Je la tiens", sous entendu : la solution)

Les professeurs de l'université de Christiania où étudiait Abel avaient bien compris que les capacités extraordinaires de celui-ci avaient besoin d'une stimulation qu'eux-mêmes étaient incapables de lui donner. Aussi deux d'entre eux, Hansteen et Rasmusen écrivirent au Conseil de l'université afin qu'il finance un voyage à l'étranger :

"Nous considérons qu'il est de notre devoir de recommander ce jeune homme, dont la moralité est au dessus de tout soupçon, pour une aide qui lui permette de continuer à cultiver une science où bien peu, à son âge, ont fait des progrès aussi remarquables que ceux dont il a donné des preuves. Le Conseil sait qu'il ne possède rien, et que c'est dans des conditions très précaires, et uniquement grâce aux souscriptions mensuelles de quelques uns, qu'il a pu vivre depuis son entrée à l'Université. Maintenant il lui faut une aide plus importante, afin qu'il puisse acquérir à son pays l'honneur que ses dons et ses progrès permettent d'espérer d'un tel savant. Nous estimons qu'un séjour à l'étranger dans les villes où se trouvent les mathématiciens les plus éminents contribuera de la manière la plus heureuse à son éducation scientifique. A Paris, il trouvera probablement l'occasion de faire insérer son travail sur l'intégration dans les Mémoires de l'Institut, et nous croyons que ce sera le moyen le plus rapide de le faire connaître."

Après quelques tergiversations, Abel obtient une bourse de 600 thalers pour un an de voyage, en même temps que trois autres camarades et amis de l'université : Christian Peter Boeck pour visiter les écoles vétérinaires afin de prendre la direction d'une telle école créée par le Storting sous l'impulsion du père d'Abel ; les deux autres, Nicolas Benjamin Moller et Niels Otto Tank tous deux géologues, qui devaient faire des mesures du champ magnétique terrestre partout ou ils se rendraient, et communiquer les résultats au professeur Hansteen. Abel avait dû envoyer un itinéraire détaillé de son voyage lequel devait se limiter à deux destinations : Göttingen pour y rencontrer Gauss; Paris qui représentait à ce moment là le pôle le plus important de la recherche mathématique avec Cauchy, Legendre, Lacroix, Fourier, Poisson, Laplace.

Mais Abel était trop dépendant de ses amis pour supporter l'idée de travailler seul à Paris. Boeck et Moller devaient passer tout l'hiver à Berlin, il décida de les y accompagner prenant ainsi dès le départ de sérieuses libertés avec l'itinéraire prévu. Ce fut sans aucun doute une des initiatives les plus heureuses que son caractère indépendant put prendre, car il y rencontra Crelle.

Avec ses amis, il passa la plus grande partie de l'hiver, y menant joyeuse vie au bal, au théâtre, en fêtes nocturnes au point de gêner leur locataire du dessus au n°4 Kupfergraber dans le voisinage de la Sprée. Un jour que le tapage devenait vraiment trop violent, celui-ci demanda à la logeuse quelle espèce de gens pouvaient bien faire un boucan pareil. "Des étudiants danois" lui répondit-elle. "Des danois, que non ! des ours russes oui !" répliqua-t-il furieux ! Il faut dire, à la décharge du locataire ainsi dérangé qu'il était philosophe et s'appelait... Hegel !

Voici trois lettres d'Abel, l'une écrite à Copenhague - les deux autres à Berlin.

ABEL A HOLMBOE - Copenhague (4 août 1823)
Année $\sqrt[3]{6.064.321219}$ Prends aussi les décimales

Cher ami !
Tu dois avoir reçu la lettre que je t'ai écrite aussitôt arrivé. - Je vais te faire part maintenant des observations que j'ai faites. Les mathématiques, ici ne sont pas précisément florissantes. j'ai eu beau demander, je n'ai pas encore pu découvrir un seul étudiant qui soit un peu solide, et encore bien moins quelqu'un qui cultive les math. ex. professo. - Le seul qui sache des math. ici est Degen, mais aussi c'est un diable d'homme. Il m'a montré plusieurs de ses petits mémoires, et ils témoignent d'une grande finesse. Je lui ai montré quelques uns des miens, il les a trouvé bons, il a surtout été tout à fait saisi devant une formule qui indique combien un nombre a de facteurs impairs, et il ne pouvait comprendre comment je l'avais trouvée. Ce petit travail traitait, tu te rappelles, des fonctions inverses des Transcendantes elliptiques, (*)*et j'y avais démontré une chose impossible ; je l'ai prié de le lire d'un bout à l'autre ; mais il ne put découvrir aucune fausse conclusion, ni comprendre où était la faute ; Dieu sait comment je m'en tirerai.*
J'ai étudié depuis que je suis ici deux ouvrages importants. Application de l'Analyse à la géométrie par Monge, *et* Essai sur la théorie des nombres par Legendre. *Ce dernier est extrêmement intéressant, et c'est grand dommage qu'il ne se trouve pas à Christiania. - Je ne peux m'empêcher de transcrire le théorème suivant qui s'y trouve, et qui est certes le plus merveilleux de toutes les mathématiques :*

Théorème. — *Si y désigne le nombre des nombres premiers compris entre* 1 *et x, on a*

$$y = \frac{x}{\log x - 1,08366}$$

Naturellement le logarithme est népérien.

La formule, comme on peut bien le comprendre, n'est qu'approximative, mais elle se

(*) En français dans le texte

rapproche beaucoup de la vérité, ce que tu pourras voir d'après le tableau suivant :

x	d'après	y la vraie
	la formule :	valeur :
10000	1230	1230
100000	9588	9592
200000	13844	13849
300000	26023	25998
400000	33854	33861
1000000	78543	78527

Tu peux t'exciter sur la démonstration jusqu'à mon retour, alors je te communiquerai la démonstration qu'on trouve dans Legendre.
Un autre beau théorème est que $a^2 + a + 41$ *est un nombre premier, si a est un des nombres* $0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ *juqu'à 39. - et bien d'autres. Les bibliothèques ne sont pas bien pourvues de livres mathématiques; mais elles possèdent bon nombre de revues de sociétés savantes. Entre autres les* Philosophical transactions, *où se trouvent beaucoup de très bonnes choses; en sorte que les anglais ne sont pas aussi mauvais mathématiciens que je l'avais cru. Herschel et Young sont très habiles. Ivory est parmi les meilleurs mathématiciens vivants (s'il n'est pas mort). j'ai lu trois mémoires de V. Schmidten, ils ne sont pas aussi bons que j'aurais cru; il reste quand même un math. très habile, il faut dire que c'étaient ses premiers travaux. J'ai lu une masse de Gruson (verjagen (*)); c'est un affreux rodomont; pourtant il a démontré que e est irrationnel. - Croirais tu qu'il a eu l'impudence de voler un mémoire de Parseval et de le présenter à la Société des Sciences de Berlin. Il est traduit mot pour mot. En même temps que je lis, je travaille aussi moi-même. Ainsi j'ai cherché à démontrer l'impossibilité de résoudre l'équation* $a^n = b^n + c^n$ *en nombres entiers lorsque n est plus grand que 2; mais je suis resté en route. Je n'ai pu aller au delà des théorèmes ci-joints, qui sont pourtant assez curieux. j'ai résolu l'équation suivante :*

$$\psi(a) = \int \varphi(ax)\dot{f}(x)dx \quad (x = k, x = k')$$

où ψ *et* f *sont deux fonctions données, et où l'on cherche* φ*. En outre j'ai intégré l'expression*

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{(a-(m+2)x^{m+1}+(m+1)x^{x+2})(1+2x+3x^2+\ldots+mx^{m-1}+(m+1)x^m)}}$$

(*) En allemand dans le texte

où a est une constante quelconque, ce qu'il faut bien remarquer. Peux tu intégrer cette expression ? - Ce n'est pas difficile.
Le 1er juillet on a fêté solennellement le jubilé de Regentsen (**). J'y ai été. On a bu ferme 800 bouteilles de vin. On a eu deux fois la Comédie. J'y ai été les deux fois. La dernière fois une pièce a été sifflée. Je rentrerai à la fin d'août, et je te montrerai ma moisson, qui est très bonne. Si tu veux m'honorer de quelques mots, mon adresse est : Christianshavn, Store Strandgade, 30. Tous mes compliments à tes frères. Ton N. ABEL.

ABEL A HANSTEEN - Berlin (5 décembre 1825)

Professeur Hansteen !
J'aurais bien pu, et j'aurais dû, peut-être, vous écrire plus tôt, monsieur le Professeur; mais je désirais d'abord prendre quelques dispositions afin d'être en mesure de vous dire quel profit je tire et je tirerai de mon séjour ici. Voua aurez peut-être été surpris de ce que je suis venu d'abord en Allemagne; je l'ai fait, en partie parce qu'il se trouve que j'y vis avec des connaissances, et aussi parce que j'y suis moins exposé à ne pas employer mon temps le mieux possible, puisque je peux quitter l'Allemagne n'importe quand pour aller à Paris, qui doit être pour moi le lieu le plus important. Ici à Berlin, je n'ai pas trouvé grande ressource dans les bibliothèques publiques, car en ce qui concerne les mathématiques, elles sont étonnamment médiocres; il n'y a presque rien des travaux récents, et ce qui s'y trouve est très incomplet. Notre bibliothèque, si j'ose dire, est mieux pourvue. j'ai été assez heureux pour faire la connaissance de deux mathématiciens distingués : le conseiller privé Crelle, et le professeur Dirksen. V. Schmidten m'avait parlé du premier comme d'un homme excellent à tous égards, et lorsque je suis arrivé à Berlin, je me suis rendu chez lui sans perdre de temps. Ce fut long, avant que je puisse lui faire bien comprendre le but de ma visite, et le résultat semblait devoir être lamentable, lorsque je pris courage à sa question sur ce que j'avais déjà étudié en mathématiques. Quand je lui eu cité quelques travaux des mathématiciens les plus éminents, il devint tout à fait empressé, et parut vraiment enchanté. Il engagea une longue conversation sur diverses questions difficiles qui n'étaient pas encore résolues, et nous en vimes à parler des équations de degré supérieur; lorsque je lui dis que j'avais démontré l'impossibilité de résoudre l'équation générale du 5ème degré, il ne voulut pas le croire, et dit qu'il y ferait des objections. Je lui remis donc un exemplaire; mais il dit qu'il ne pouvait comprendre la raison de plusieurs de mes conclusions. Plusieurs autres m'ont dit la même chose, j'ai entrepris une refonte de ce travail.

Il parla beaucoup aussi du faible niveau des mathématiques en Allemagne, et dit que les connaissances de la plupart de mathématiciens se réduisaient à un peu de géométrie, et à quelque chose qu'ils appelaient Analyse, mais qui n'était rien d'autre que la théorie des combinaisons. Pourtant il semblait, à son avis, qu'une

(**) Ancien internat d'étudiants à Copenhague *période plus heureuse pour les mathématiques allait commencer maintenant en Allemagne. Lorsque je lui exprimai mon étonnement qu'il n'existait pas ici de Journal de mathématiques, comme en France, il dit qu'il avait eu depuis longtemps l'intention d'entreprendre un pareil journal, et qu'il n'allait pas tarder à le lancer. Tout est prêt maintenant, et j'en suis très enchanté; car j'ai ainsi où faire paraître tel ou tel de mes petits travaux. - j'en ai déjà rédigé 4, qui doivent prendre place dans le premier fascicule, et comme je les ai écrits en français, Crelle est assez aimable pour les traduire. Mon peu de français m'est ainsi bien utile. Crelle, au sujet de la forme de mes articles, m'a dit qu'à son avis ils sont très clairs et bien écrits, ce qui me fait grand plaisir, car j'ai toujours craint d'avoir de la peine à développer mes idées d'une manière convenable. Mais il m'a conseillé de m'étendre davantage, surtout ici, en Allemagne. il m'a aussi offert des honoraires pour mes articles, ce sur quoi je n'avais naturellement pas compté, aussi ai-je refusé; pourtant j'ai cru remarquer qu'il aurait préféré me voir accepter. Ce même Crelle a aussi une bibliothèque mathématique tout à fait remarquable, dont je me sers comme si elle était à moi, et qui m'est très utile, car elle contient toutes les choses les plus nouvelles, qu'il a aussi vite que possible. Il a entre autres la revue publiée à Paris sous la direction du baron de Ferrussac, le* "Bulletin universel des sciences et de l'industrie", *qui m'est d'une extrême utilité, car j'y trouve annoncés tous les livres et découvertes mathématiques. - Je suis invité chez Crelle une fois pour toutes le lundi soir. Il y a chez lui une sorte d'assemblée, et l'on s'y occupe principalement de musique, à quoi malheureusement je ne comprends pas grand chose. Je m'y amuse bien tout de même, car j'y rencontre toujours quelques jeunes mathématiciens avec qui je cause. Cela m'exerce aussi à l'allemand, ce dont j'ai grand besoin, et ce qui ne va guère bien. Chez Crelle il y avait aussi auparavant une réunion hebdomadaire de mathématiciens, mais il a été obligé de les interrompre, parcequ'il y avait un nommé Ohm avec qui personne ne pouvait s'entendre à cause de son effroyable arrogance. C'est vraiment une chose pénible qu'un seul homme se mette ainsi en travers, quand il s'agit de science. C'est extraordinaire à quel point les jeunes mathématiciens, ici à Berlin, et à ce que j'entends dire, partout en Allemagne, portent Gauss aux nues, pour ainsi dire. Il est pour eux la substance de toute perfection mathématique, mais, s'il est en effet certainement un grand génie, il est tout aussi sûr qu'il rédige mal. Crelle dit que tout Gauss écrit est une horreur (*), car c'est tellement obscur qu'il n'est presque pas possible de le comprendre. - Gauss travaille maintenant à un grand ouvrage sur l'astronomie physique, dont les trois premières parties sont prêtes à imprimer (à ce que me dit un de ses élèves qui est ici, à Berlin). Il s'y trouvera beaucoup de choses nouvelles. - Lorsque j'étais à Hambourg, j'ai rendu visite au Professeur Schumacher, qui m'a reçu avec beaucoup d'empressement, mais il ne se portait pas bien à ce moment là. J'y ai fait aussi connaissance avec T. Clausen, qui a certainement des dispositions remarquables pour les mathématiques; mais, autant que j'en ai pu juger, il n'avait pas étudié beaucoup. Le Professeur Encke, qui est maintenant nommé ici à l'Académie de Berlin, était aussi alors, à Hambourg, mais je ne l'ai pas vu. Il est bizarre qu'il n'y*

(*) Gräuel en allemand, dans le texte

ait ici, à Berlin, aucune chaire d'astronomie. Encke ne donnera pas de leçons.

Je vois que je vais passer tout l'hiver à Berlin, et je n'ai pas encore bien décidé l'époque à laquelle je partirai. A cause de Crelle et du Journal, je resterais volontiers ici aussi longtemps que possible, et d'après ce que j'entends dire, il n'y a aucun autre endroit en Allemagne qui me sera plus profitable. Göttingen a, il est vrai, une bonne bibliothèque, mais c'est tout; car Gauss y est le seul qui sache quelque chose, et il est absolument inabordable. Pourtant, je dois aller à Göttingen, bien entendu. En somme, je voudrais visiter le plus d'universités que je pourrai, car je dois pouvoir récolter un peu dans chacune. -

Je vous prie, monsieur le Professeur, de saluer le professeur Rasmusen et B. Holmboe, et de dire à celui-ci que je lui écrirai bientôt une longue lettre mathématique.

Je souhaite de tout mon coeur que vous vous portiez bien, et je vous prie de continuer à me traiter avec la bonté que vous m'avez constamment témoignée. Je m'efforcerai de m'en rendre aussi digne que possible.
Respectueusement.
N. Abel.

ABEL A HOLMBOE - Le 16 janvier 1826

Cher ami !

Après la promesse que je t'ai faite en quittant Christiania, tu dois depuis longtemps attendre une lettre de moi, et il faut que je te prie de m'excuser de ne pas t'avoir écrit plus tôt. C'est que je désirais ne pas te raconter seulement ce qui m'est arrivé dès le début de ma tournée, mais aussi comment se dessine mon voyage dans l'ensemble. En outre, je désirais encore t'informer de telle ou telle de mes recherches sur plusieurs sujets intéressants dont je me suis occupés. - Je ne vais pas te faire de récit de mon voyage, qui au total a été très dénué d'aventures, et dont peut-être, d'ailleurs, tu auras entendu parler par le professeur Hansteen. Je l'ai prié de te saluer dans la lettre que je lui ai écrite il y a quelque temps. Je suis enchanté qu'il me soit arrivé de venir en Allemagne, surtout à Berlin, avant d'aller à Paris; car, ainsi que tu l'as peut-être appris par ma lettre à Hansteen, j'ai fait ici une merveilleuse connaissance dans la personne du conseiller privé Crelle. Tu ne peux pas t'imaginer l'homme excellent qu'il est; justement ce qu'il me faut, prévenant sans être cuirassé de cette effroyable politesse dont se couvrent bien des gens, d'ailleurs fort honnêtes. Je le fréquente aussi aisément que toi ou d'autres de mes meilleures relations. Il travaille très assidûment les mathématiques, ce qui est d'autant plus méritoire qu'il a énormément à faire comme fonctionnaire. Il a publié dans ces dernières années plusieurs livres mathématiques, qui me paraissent très bons. Il m'a fait l'honneur de me donner la plupart, savoir : une traduction des oeuvres mathématiques de Lagrange, comprenant : Théorie des fonctions analytiques, Leçons sur les fonctions analytiques *et* théorie des équations numériques, *accompagnées de notes excellentes; j'ai reçu également la* Theorie der analytischen Facultäten, *de Crelle. (Elle se trouve à la bibliothèque de Christiania, et si tu ne l'a pas lue, il faut que tu la lises. c'est à beaucoup d'égards un livre remarquable, surtout sous le rapport de la forme)*; Lehrbuch der Arithmetik und Algebra *et* Lehrbuch der Elemente der geometrie *3 volumes, de Crelle. En outre, je me suis procuré sa* "Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Grössen" *et je me procurerai aussi plusieurs petits mémoires qu'il a fait imprimer. Au printemps j'enverrai tous ces livres et plusieurs autres en Norvège, et je les confierai à ta garde. Naturellement je ne peux pas les emporter avec moi. Je vais chez Crelle toutes les semaines le lundi soir, et de plus nous nous promenons ensemble tous les vendredis dans l'après-midi pendant quelques heures. Tu peux penser si l'on s'en donne, des mathématiques, aussi vite que mon mauvais allemand me le permet. Je m'y débrouille tout de même passablement. Il ne peut pas se mettre dans la tête que je peux comprendre tout ce qu'on dit, sans savoir bien parler moi-même. - La langue de Berlin n'est d'ailleurs pas précisément la meilleure, d'une part assez dure, et d'autre part excessivement molle et effacée. Ainsi on prononce toujours au commencement des mots j pou g, ce qui est diablement drôle à entendre, par exemple* O! Jot! *que l'on entend à chaque instant. On a la phrase suivante pour se moquer des Berlinois sous ce rapport* : "Eine jute jebratene Jans ist eine jute Jabe Jottes". *Une autre chose qui produit un effet bizarre est qu'ils intervertissent mir et mich, dir et dich : et aussi on dit constamment sind pour seyn. Mon garçon dit* : Wollen Sie so jut sind mich Jeld zu jeben; ich werde jleich hier sind. -

Comme Hansteen te l'a peut-être raconté, un Journal mathématique paraîtra ici à dater du commencement de l'année, ce dont je suis bien content, comme tu penses. Il ne contiendra certainement pas beaucoup de mauvais, un peu est inévitable, car il y aura probablement beaucoup de gens à y écrire. Dans chaque numéro paraîtront deux ou trois mémoires de moi, tu peux y compter, et je ferai tous mes efforts pour produire ce que je pourrai de mieux, tu peux m'en croire. J'en ai déjà terminé 6. Il en paraîtra 1 ou 4 dans le premier numéro, qui paraîtra bientôt, dans un mois environ. L'un de ces mémoires est la démonstration de l'impossibilité de la résolution générale des équations, que j'ai développée plus amplement que je ne l'avais fait dans le mémoire que j'ai fait imprimer à Christiania. Crelle disait de ce mémoire qu'il était honorable, mais qu'il ne pouvait pas encore le comprendre tout à fait. J'ai tant de peine à m'exprimer d'une manière claire dans ces sujets que l'on a encore si peu étudiés à ma façon. - Depuis que je suis arrivé ici à Berlin, j'ai cherché aussi à résoudre le problème général suivant : "Trouver toutes les équations que l'on peut résoudre algébriquement". *Je ne suis pas encore au bout, mais autant que je comprends, ça ira bien : Tant que le degré de l'équation est un nombre premier, il n'y a pas trop de difficulté, mais lorsque c'est un nombre composé, c'est le diable. J'ai appliqué aux équations du 5ème degré, et j'ai heureusement résolu le problème dans ce cas. J'ai trouvé un grand nombre d'équations, outre celle déjà connues, que l'on peut résoudre. Lorsque j'aurai achevé le mémoire comme je le désire, je me flatte qu'il sera bon. Au moins c'est quelque chose de général, et il y aura de la méthode, c'est là, je trouve, le plus important. - Un autre problème* *dont je me suis beaucoup occupé est la sommation de la série :*

$$\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \ldots$$

Si m est un nombre entier positif, la somme de cette série, comme tu sais, est $(2\cos x)^m$, mais si m n'est pas un nombre entier, il n'en est plus de même, à moins que x soit plus petit que $\frac{\pi}{2}$. - Il n'y a aucun problème qui ait occupé les mathématiciens autant que celui-là dans ces derniers temps. Poisson, Poinsot, Plana, Crelle, et une quantité d'autres ont cherché à le résoudre, et Poinsot est le premier qui ait trouvé une somme exacte, mais son raisonnement est tout à fait faux, et personne encore n'a pu en venir à bout. J'y ai réussi avec une entière rigueur. Un mémoire là-dessus prendra place dans le Journal, et j'en enverrai bientôt un autre en France pour être inséré dans les Annales de mathématiques *de Gergonne. - j'ai trouvé*

$$\cos mx + m\cos(m-2)x + \ldots = (2+2\cos 2x)^{\frac{m}{2}} . \cos mk\pi$$
$$\sin mx + m\sin(m-2)x + \ldots = (2+2\cos 2x)^{\frac{m}{2}} . \sin mk\pi$$

m est une grandeur comprise entre -1 et $+\infty$, k un nombre entier, et x une grandeur comprise entre $(k-\frac{1}{2})\pi$ et $(k+\frac{1}{2})\pi$. Si tu fais dans la seconde égalité $k=0$, tu as la curieuse formule :

$$\sin mx + m\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\sin(m-4)x + \ldots = 0$$

pour toutes valeurs de x comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si m est compris entre -1 et $-\infty$, les deux séries sont divergentes, et par suite n'ont aucune somme. Les séries divergentes sont en bloc une invention du diable, et c'est une honte que l'on ose fonder sur elles la moindre démonstration. On peut en tirer tout ce qu'on veut quand on les emploie, et ce sont elles qui ont produit tant d'échecs et tant de paradoxes. Peut-on penser quelque chose de plus affreux que de dire que

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + etc.$$

où n est un nombre positif. Risum tencatis amici. *Je suis devenu prodigieusement attentif à tout cela ; car si l'on excepte les cas de la plus extrême simplicité, par exemple : les séries géométriques, il n'y a presque pas, dans toutes les mathématiques, une seule série infinie dont la somme est déterminée d'une manière rigoureuse ; en d'autres termes, ce qu'il y a de plus important dans les mathématiques est sans fondement. La plupart des choses sont exactes ; cela est vrai ; et c'est extraordinairement surprenant. Je m'efforce d'en chercher la raison. Sujet excessivement intéressant. - Je ne crois pas que tu puisses me présenter beaucoup de propositions ou entrent des séries infinies, contre la démonstration desquelles je ne puisse faire des objections fondées. Fais-le, je te répondrai. Même la formule du binôme n'est pas encore démontrée rigoureusement. -*

j'ai trouvé que l'on a

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \dots$$

pour toutes les valeurs de m lorsque x est plus petit que 1. Si x est égal à $+1$, on a la même formule dans le cas où $m > -1$, et seulement alors, mais si $x = -1$, la formule n'a pas lieu, à moins que m soit positif. Pour toutes les autres valeurs de x et de m la série $1 + mx+$ etc. est divergente. Le théorème de Taylor, la base de toutes les mathématiques supérieures, est tout aussi mal fondé. Je n'en ai trouvé qu'une démonstration rigoureuse, et elle est de Gauchy dans son Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal. *Il y démontre que l'on a :*

$$\varphi(x+a) = \varphi x + a\varphi' x + \frac{a^2}{2}\varphi'' x + \dots$$

toutes les fois que la série est convergente (mais on a bientôt fait de s'en servir dans tous les cas). Pour montrer par exemple général (sit venia verbo) *combien on raisonne mal et combien il faut être prudent, je choisirai l'exemple suivant : - J'en étais là lorsque Maschmann est entré, et comme depuis longtemps je n'ai pas reçu de lettre de chez nous, je me suis arrêté pour m'informer s'il n'en avait pas une pour moi (c'est lui en effet qui nous les apporte toujours), mais il n'y avait rien. Par contre il avait lui-même reçu une lettre, et entre autres nouvelles, il a raconté que toi, mon ami, tu es nommé lecteur à la place de Rasmusen. Reçois mes félicitations les plus sincères, et sois assuré qu'aucun de tes amis ne s'en réjouit autant que moi. j'ai souvent souhaité un changement dans ta situation, tu peux me croire, car être professeur dans une école doit être quelque chose d'affreux pour quelqu'un comme toi, qui t'intéresses tant à ta science. - A présent il va falloir que tu t'occupes de trouver une fiancée, n'est-ce pas. J'entends dire que ton frère le doyen (*) en a trouvé une. Je ne puis nier que cela m'a vivement frappé. Salue-le bien de ma part, et félicite le "très-chaudement" (**)*

Et maintenant je reviens à mon exemple. Soit une série infinie quelconque

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + etc.$$

tu sais qu'une manière très courante d'en faire la sommation, est de chercher la somme de :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

et de faire ensuite $x = 1$ dans le résultat. C'est juste : mais il me semble qu'on ne peut l'accepter sans démonstration; car si l'on prouve que

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

(*) Degré dans la hiérarchie ecclésiastique luthérienne, au dessus des prêtres et au dessous de l'évêque
(**) Am meisten, en allemand, dans le texte

pour toutes les valeurs de x inférieurs à 1, il n'est pas dit pour cela qu'il en soit de même lorsque $x = 1$. Il serait très possible que la série $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ s'approchât d'une valeur toute différente de $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ à mesure que x tends vers 1. Cela est clair dans le cas général où la série $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ est divergente, car elle n'a alors aucune somme. j'ai démontré que c'est exact lorsque la série est convergente. l'exemple suivant montre combien on peut se tromper. On peut démontrer rigoureusement que l'on a pour toutes les valeurs de x inférieures à π

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 3x - etc$$

Il semble que par suite la même formule devrait avoir lieu pour $x = \pi$; mais cela donnerait :

$$\pi = \sin\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi + \frac{1}{2}\sin 3\pi - etc. = 0(absurde).*$$

On peut trouver d'innombrables exemples de ce genre. - En général la théorie des séries infinies, jusqu'à présent, est très mal établie. - On fait toute espèce d'opérations sur les séries infinies, comme si elles étaient finies, mais est-ce permis ? Jamais de la vie. Où cela est-il démontré que l'on obtient la dérivée d'une série infinie en prenant la dérivée de chaque terme ? Il est facile de citer des exemples où cela n'est pas exact, par ex. :

$$x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 3x - \ldots **$$

En prenant les dérivées on a :

$$x = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - etc. **$$

Résultat absolument faux, car cette série est divergente. - Il en est de même pour la multiplication, la division, etc. des séries infinies. - j'ai commencé à passer en revue les règles les plus importantes qui sont admises (aujourd'hui) sous ce rapport, et à montrer dans quels cas elles sont justes ou non. - Cela va très bien et m'intéresse extrêmement. -

Il est probable que je resterai ici à Berlin jusqu'à la fin de février ou jusqu'en mars, et que je passerai ensuite par Leipzig et Halle pour aller à Göttingen (non pas pour Gauss, car il est , paraît-il, insupportablement orgueilleux, mais pour la bibliothèque, qui est, dit-on, magnifique).

Vers la fin de l'été, j'irai à Paris. Je voudrais bien être chez nous, car j'ai une terrible nostalgie. Et maintenant écris-moi une longue lettre sur toutes sortes de choses. Fais- le, je te prie, sitôt ma lettre reçue. - Demain j'irai à la Comédie voir Die schöne Müllerinn. Adieu, et salue mes connaissances.
Ton ami N. H. ABEL.

* Abel a par incurie mis au premier membre π au lieu de $\frac{1}{2}\pi$
** Abel a par incurie mis au premier membre x au lieu de $\frac{1}{2}x$
** Abel a mis x au lieu de $\frac{1}{2}$