Lemniscatomie, ou comment découper une lemniscate en parties égales, à la règle et au compas.

Jean-Pierre Friedelmeyer

Dans ses *Recherches arithmétiques*, section VII, intitulée *Des équations qui déterminent les sections circulaires*[1], Gauss fait la remarque que :

les principes de la théorie que nous entreprenons d'exposer, s'étendent bien plus loin que nous ne le faisons voir ici ; ils peuvent en effet s'appliquer non seulement aux fonctions circulaires, mais aussi avec autant de succès à beaucoup d'autres fonctions transcendantes, par exemple à celles qui dépendent de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$.[2]

Cette remarque n'échappe pas à Abel qui dans ses *Recherches sur les fonctions elliptiques* annonce :

entre autres théorèmes je suis parvenu à celui-ci : On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate en m *parties égales* <u>*par la règle et le compas seuls,*</u> *si* m *est de la forme* 2^n *ou* 2^n+1, *ce dernier nombre étant en même temps premier ; ou bien si* m *est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes. Ce théorème est, comme on le voit, précisément le même que celui de M. Gauss, relativement au cercle.*[3]

Dans l'article qui suit, nous nous proposons de dégager les idées principales d'Abel pour réaliser cette « lemniscatomie »,de façon suffisamment élémentaire pour ne pas avoir à mettre en place l'immense arsenal de la théorie des fonctions elliptiques. Nous nous appuierons sur le texte d'Abel cité ci-dessus, principalement les paragraphes I à V et le paragraphe VIII, mais limités et adaptés à ce qui concerne la lemniscate. Cette adaptation nous obligera quelquefois à faire appel à d'autres auteurs lorsque les méthodes développées par Abel sont trop compliquées ou générales. Les textes utilisés seront précisés au moment opportun.

1. La lemniscate.

La lemniscate se rencontre pour la première fois dans un article célèbre des *Acta eruditorum* de septembre 1694,[4] sous la dénomination de *curva quatuor dimensionum quæ hac aequatione exprimitur* $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$, *quaeque circum axe GG [2a] constitua formam refert jacentis notae octonarii* ∞ *seu complicitae in nodum fasciae, sive* ***lemnisci***, *d'un noeud de ruban Gallis.* [du grec ληµνισκος qui signifie bandelette ou ruban]. Nous renvoyons au livre de Loria : *Spezielle ebene algebraische Kurven*[5], dont ces informations sont extraites, pour

[1] Voir *L'Ouvert* n° 46 et 47, mars et juin 1987.

[2] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, traduites par A. C. M. Poullet Delisle, Paris 1807.

[3] N. H. Abel, *Recherches sur les fonctions elliptiques*, p. 314. Voir aussi la correspondance d'Abel citée dans ce numero de *L'Ouvert*, dans l'article *L'histoire des mathématiques par correspondance..*

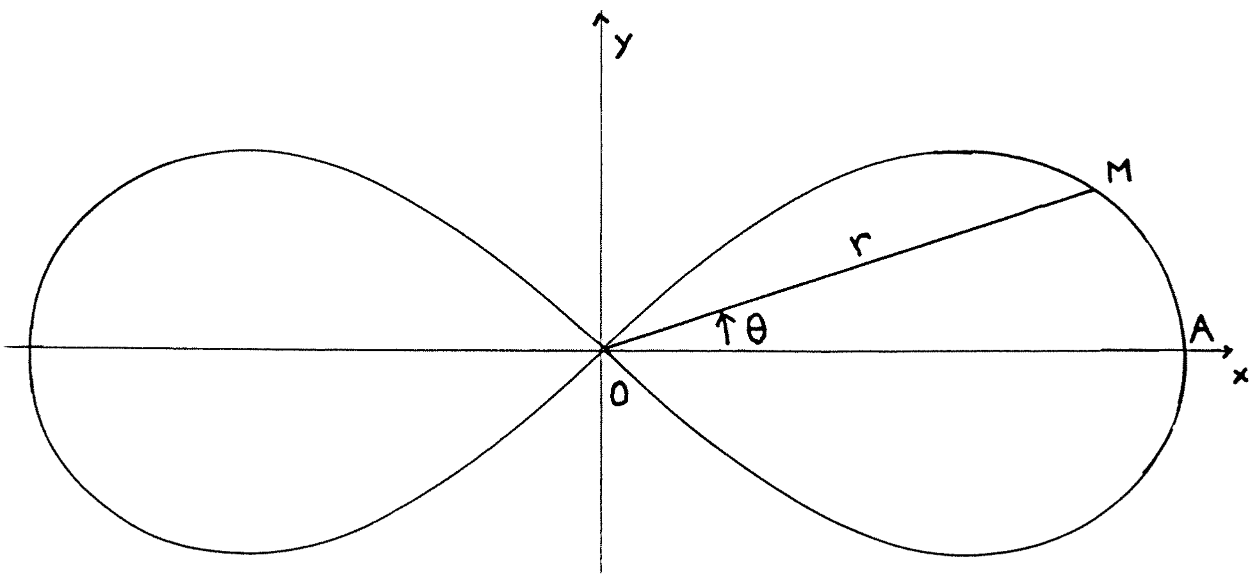
[4] Jacobi Bernoulli, *Constructio curvae accessus et recessus aequabilis, ope rectificationis curvae cujusdam algebraicae, addenta nuperae solutionis mensis Junii.*

[5] G. Loria, *Spezielle algebraische und transcentente ebene Kurven, Theorie und Geschichte*, Leipzig, Teubner p. 199.

une étude détaillée des propriétés géométriques de cette courbe. Nous nous limiterons ici à celles qui concernent directement sa division en n parties égales, à la règle et au compas.

La lemniscate est donc la courbe d'équation cartésienne : $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$, ou d'équation polaire : $r^2 = \cos 2\theta$, que l'on peut également paramétrer en posant : $x^2+y^2 = t^2 ; x^2 - y^2 = t^4$ donc : $x = \mp t\sqrt{\frac{1+t^2}{2}} ; y = t\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$ pour $t \in [-1;+1]$.

Le fait essentiel qui nous intéresse ici est que la longueur s d'un arc $\overset{\frown}{OM}$ tel que le segment OM mesure r est donné par : $s = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$, comme le montre le calcul de $ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.



Pour bien mettre en place l'analogie existant entre la « cyclotomie » et la « lemniscatomie », et pour prendre la mesure exacte des méthodes et des articulations liées à ce problème, il peut être utile de faire un détour afin de montrer comment on peut définir les fonctions circulaires et leurs propriétés principales uniquement à partir de l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

2. Définition purement analytique des fonctions circulaires.

L'intégrale $\alpha = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ définit une fonction réelle continue de la variable réelle x, impaire, strictement croissante, de [-1 ; +1] sur $[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}]$, en posant par définition $\frac{\pi}{2}=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Il existe donc une fonction réciproque continue, impaire, strictement croissante que nous appellerons sinus, définie par l'équivalence :

$$x=\sin\alpha \Leftrightarrow \alpha=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \text{ pour } \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right] \text{ et } x\in[-1;+1].$$

De même on peut définir une fonction cosinus continue, strictement décroissante, par l'équivalence : $y=\cos\beta \Leftrightarrow \beta=\int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, pour $\beta\in[0;\pi]$ et $y\in[-1;+1]$.

Le changement de variable $u=\sqrt{1-t^2}$ dans l'intégrale $\alpha=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ donne $\alpha=\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$; autrement dit : si $x=\sin\alpha$, alors $\sqrt{1-x^2}=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. D'où la relation $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ permettant de prolonger la définition de $\sin\alpha$ et de $\cos\alpha$ à l'intervalle $[-\pi;+\pi]$.

La fonction sinus est dérivable en tant que réciproque d'une fonction dérivable, à dérivée non nulle $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $|x|\neq 1$; donc $(\sin\alpha)'=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\cos\alpha$; relation que nous pouvons étendre à l'intervalle fermé $[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}]$, puis $[-\pi;+\pi]$. De même on démontre que $(\cos\alpha)'=-\sin\alpha$.

Il reste à mettre en place les formules d'addition, c'est-à-dire les formules

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha.\cos\beta\pm\sin\beta.\cos\alpha.$$

Un moyen simple consiste à effectuer le développement en série de Taylor de $\sin(\alpha+\beta)$ sous la forme $\sin(\alpha+\beta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\beta^n}{n!}(\sin\alpha)^{(n)}$. On a : $(\sin\alpha)^{(2n)}=(-1)^n\sin\alpha$ et $(\sin\alpha)^{(2n+1)}=(-1)^n\cos\alpha$ pour tout entier naturel n. De sorte que $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.V_1+\cos\alpha.V_2$, où V_1 et V_2 sont des fonctions de β seul. En dérivant cette relation par rapport à α puis en faisant $\alpha=0$, on trouve bien $V_1=\cos\beta$ et $V_2=\sin\beta$ Malheureusement cette méthode s'applique difficilement à d'autres cas tels que les fonctions elliptiques par exemple. C'est pourquoi nous donnons également une autre démonstration, que nous pourrons adapter plus facilement.

Si nous posons $u=\sin\alpha$; $v=\sin\beta$, $r=\sin\gamma$ il faut déterminer la fonction r(u, v) telle que : $\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+\int_0^v \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ce qui équivaut à $\alpha+\beta=\gamma$. Considérant là aussi α comme variable et β comme constant, on a : $\frac{du}{d\alpha}=\cos\alpha$; $\frac{d^2u}{d\alpha^2}=-\sin\alpha$; $\frac{dr}{d\alpha}=\frac{dr}{d\gamma}=\cos\gamma$; $\frac{d^2r}{d\alpha^2}=-\sin\gamma$; de sorte que : $\frac{d}{d\alpha}\left[r\frac{du}{d\alpha}-u\frac{dr}{d\alpha}\right]=\sin\gamma.(-\sin\alpha)-\sin\alpha.(-\sin\gamma)=0$. Donc

$r\dfrac{du}{d\alpha} - u\dfrac{dr}{d\alpha} = \sin\gamma.\cos\alpha - \sin\alpha.\cos\gamma$ est constant , égal à k. Avec $\alpha = 0$, on trouve $k = \sin\beta$;
d'où la relation : $\sin\beta = \sin(\gamma - \alpha) = \sin\gamma.\cos\alpha - \sin\alpha.\cos\gamma \Leftrightarrow v = r\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{1-r^2}$, puis :
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha \Leftrightarrow r = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}$.

En appliquant ces formules avec $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, nous pouvons étendre de proche en proche la définition des fonctions sinus et cosinus à l'ensemble des réels, et mettre en évidence la période 2π pour chacune d'elles.
Nous sommes maintenant en mesure de comprendre la démarche d 'Abel pour définir la fonction elliptique utilisée pour la division de la lemniscate.

3. Fonction sinus lemniscatique.[6]

Soit s la fonction : $x \mapsto s(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ donnant la longueur de l'arc $\overset{\frown}{OM}$ sur la lemniscate, pour une distance OM=x donnée ; posons $s(1) = \dfrac{\varpi}{2}$; (longueur du quart de lemniscate : $s(1) \cong 1{,}31$). Cette fonction est continue, impaire, strictement croissante de $[-1;+1]$ sur $\left[-\dfrac{\varpi}{2};+\dfrac{\varpi}{2}\right]$, ce qui permet de définir la fonction réciproque φ continue, impaire, strictement croissante, de $\left[-\dfrac{\varpi}{2};+\dfrac{\varpi}{2}\right]$ sur $[-1;+1]$. En remarquant que le changement formel u= - it dans $\displaystyle\int_0^{ix} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^x \frac{i\,du}{\sqrt{1-u^4}}$ donne la relation s(ix) = is(x), Abel définit φ également sur $\left[-\dfrac{i\varpi}{2};+\dfrac{i\varpi}{2}\right]$ en posant $\varphi(is) = i\varphi(s)$ et introduit par ailleurs les fonctions f et F définies par $f(s) = \sqrt{1-\varphi^2(s)}$ et $F(s) = \sqrt{1+\varphi^2(s)}$. Le principal problème est alors de mettre en place les formules d'addition **(1)** :

$$\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varphi(\alpha)f(\beta)F(\beta) + \varphi(\beta)f(\alpha)F(\alpha)}{1+\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\beta)} = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2} \text{ ; où } u = \varphi(\alpha) \text{ et } v = \varphi(\beta).$$

$$f(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} - uv\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}}{1+u^2v^2}$$

$$F(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2} + uv\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}}{1+u^2v^2}.$$

[6] Terme utilisé par Gauss dans des papiers qu'il a laissés à sa mort : Gauss Nachlass, Werke III p. 404. Nous n'utiliserons pas ce terme dans la suite.
[7] Méthode proposée par Darboux in *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, t.IV, p. 85, Paris 1867.Cf. A. Enneper, *Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte*, p. 140.

4. Démonstration.[7]

On a $\frac{du}{d\alpha} = \sqrt{1-u^4}$; $\frac{d^2u}{d\alpha^2} = -2u^3$. De même, si $r = \varphi(\gamma)$ avec $\gamma = \alpha + \beta$ et en considérant β comme fixé, $\frac{dr}{d\alpha} = \sqrt{1-r^4}$; $\frac{d^2r}{d\alpha^2} = -2r^3$; donc $\frac{d}{d\alpha}\left[r\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dr}{d\alpha}\right] = 2ru(r^2-u^2)$ et $\left(r\frac{du}{d\alpha}\right)^2 - \left(u\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 = (r^2-u^2)(1+r^2u^2)$. De sorte que $\frac{\frac{d}{d\alpha}\left(r\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dr}{d\alpha}\right)}{\left(r\frac{du}{d\alpha}\right)^2 - \left(u\frac{dr}{d\alpha}\right)^2} = \frac{2ru}{1+r^2u^2}$, ou

encore : $\frac{\frac{d}{d\alpha}\left(r\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dr}{d\alpha}\right)}{r\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dr}{d\alpha}} = \left(\frac{2ru}{1+r^2u^2}\right)\frac{d}{d\alpha}(ru)$. En conséquence $r\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dr}{d\alpha} = k(1+r^2u^2)$,

où k est une constante, ce qui s'écrit également : $\frac{\varphi(\alpha+\beta)\varphi'(\alpha) - \varphi(\alpha)\varphi'(\alpha+\beta)}{1+\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\alpha+\beta)} = k$.

Prenons $\alpha = 0$; alors $\varphi'(\alpha) = 1$, ce qui donne $k = \varphi(\beta)$. Finalement : $v = \frac{r\sqrt{1-u^4} - u\sqrt{1-r^4}}{1+u^2r^2}$,

et par permutation et changement de signe : $r = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}$. Les égalités pour $f(\alpha+\beta)$ et $F(\alpha+\beta)$ s'en déduiront à partir de leurs définitions.

Ces relations permettent de définir la fonction φ sur le carré $\left[-\frac{\varpi}{2};+\frac{\varpi}{2}\right] \times \left[-\frac{i\varpi}{2};+\frac{i\varpi}{2}\right]$ par

(2) $\varphi(\alpha + i\beta) = \frac{u\sqrt{1-v^4} + iv\sqrt{1-u^4}}{1-u^2v^2}$ avec $u = \varphi(\alpha)$; $\varphi(i\beta) = i\varphi(\beta) = iv$, sauf pour $uv = \mp 1$. D'autre part on a également $f(i\beta) = F(\beta)$ et $F(i\beta) = f(\beta)$.

5. Un peu d'histoire : le grand théorème d'Abel.

La formule d'addition **(1)** a été découverte, un peu par tâtonnement, par Euler en 1752 et généralisée un peu plus tard sous une forme que nous pouvons écrire:

$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$, pour un polynôme $P(t) = A + Bt^2 + Ct^4$, avec

$$r = A\frac{x\sqrt{P(y)} + y\sqrt{P(x)}}{A - Cx^2y^2}.$$

Cette formule d'addition sera le point de départ d'une des plus fécondes théories initiée par Abel qui a tenté de traiter le cas plus général des intégrales que l'on appelle aujourd'hui

Intégrales abéliennes dans un grand mémoire composé en 1826 pour être soumis à l'Académie des Sciences de Paris. Il y énonce un théorème qui généralise le résultat d'Euler ci-dessus :

Si l'on a plusieurs fonctions dont les dérivées peuvent être racines d'une même équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions rationnelles d'une même variable, on peut toujours exprimer la somme d'un nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique, pourvu qu'on établisse entre les variables des fonctions en question un certain nombre de relations algébriques.

Abel avait beaucoup misé sur ce mémoire intitulé : *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes,* dont il parle à plusieurs reprises dans ses lettres[8] : *J'ai achevé un grand mémoire sur une certaine classe de fonctions transcendantes pour le présenter à l'Institut. Cela aura lieu lundi. Je l'ai montré à Cauchy ; mais c'est à peine s'il a voulu y jeter les yeux. Et j'ose dire sans me vanter qu'il est bon. Je suis curieux d'entendre le jugement de l'Institut.* L'Institut avait désigné Cauchy et Legendre comme juges , et le premier également comme rapporteur, mais apparemment le mémoire a été mis de côté et oublié ! On imagine Abel attendant la réponse de l'Institut à un ouvrage qu'il jugeait excellent ; d'abord avec patience et confiance, sachant bien que son mémoire nécessitait un travail important de lecture et d'appropriation ; puis avec une anxiété croissante lorsqu'il dut quitter Paris sans avoir aucune nouvelle, après Noël 1826. En fait Abel mourra le 6 avril 1829 sans avoir reçu de réponse. Jacobi qualifiera ce théorème de *peut-être la plus importante découverte de ce qu'a fait dans les mathématiques le siècle dans lequel nous vivons.* Quant à Legendre, il l'appellera *monumentum aere perennius.* Il ne sera publié qu'en 1841[9].

6. Périodes.

Comme $f(\frac{\varpi}{2}) = F(\frac{i\varpi}{2}) = 0$, la fonction φ n'est pas définie pour $uv = \mp 1$, c'est-à-dire pour $\mp\frac{\varpi}{2}(1\mp i)$. Par contre on obtient $\varphi(\alpha + \frac{\varpi}{2}) = \sqrt{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \varphi(-\alpha + \frac{\varpi}{2})$ par les relations **(1)**. Ce qui donne : $\varphi(\varpi + \alpha) = \varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha)$ et $\varphi(2\varpi + \alpha) = \varphi(\alpha)$.

La fonction φ ainsi prolongée au moyen des relations **(1)** est périodique de période 2ϖ. On met de même en évidence la période imaginaire $2i\varpi$ et plus généralement les périodes $2(m\varpi + in\varpi)$, $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$. L'outil principal de la division de la lemniscate est maintenant en place.

7. Bissection d'un arc de lemniscate.

Soient $\alpha = \beta = \frac{s}{2}$; $v = u = \varphi(\frac{s}{2})$; alors $\varphi(s) = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$;

$$f(s) = \frac{1-2u^2-u^4}{1+u^4} \ ; \quad F(s) = \frac{1+2u^2-u^4}{1+u^4}.$$

En nous limitant à $0 \le s \le \varpi$, et en posant $x = \varphi(\frac{s}{2})$; $y = f(\frac{s}{2})$; $z = F(\frac{s}{2})$ nous avons :

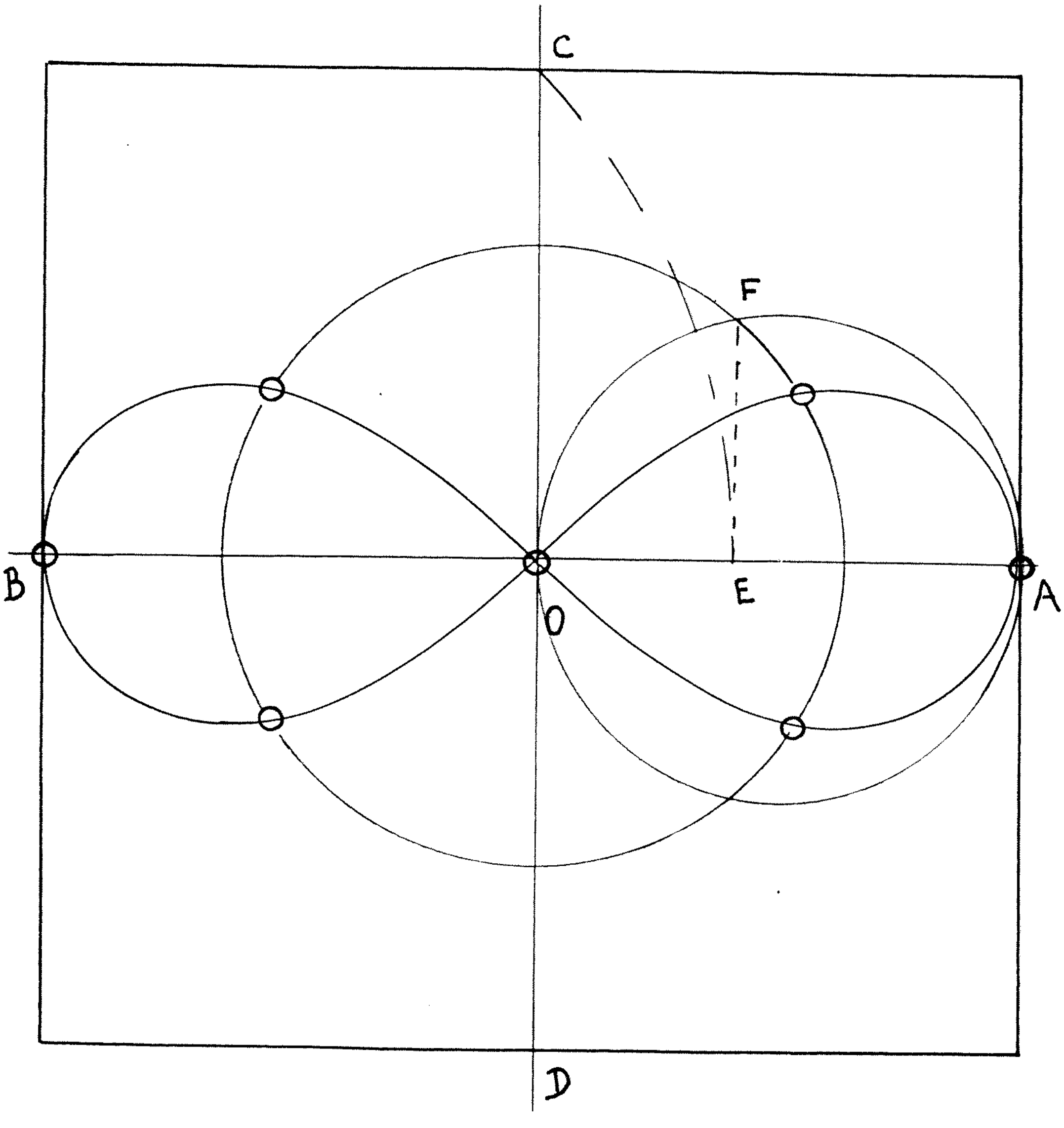
[8] Voir l'article dans ce n° de l'Ouvert :*Histoire des mathématiques par correspondance.*

[9] Houzel Ch., *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes,* in Abrégé d'histoire des mathématiques, t. II, p.74.

$f(s)=\dfrac{1-2x^2-x^4}{1+x^4}$; $F(s)=\dfrac{1+2x^2-x^4}{1+x^4}$. D'où l'on tire $x^2=\dfrac{F(s)-1}{f(s)+1}=\dfrac{1-f(s)}{1+F(s)}$ et comme $y^2=1-x^2$ et $z^2=1+x^2$ on a aussi : $y^2=\dfrac{F(s)+f(s)}{1+F(s)}$ et $z^2=\dfrac{F(s)+f(s)}{1+f(s)}$.

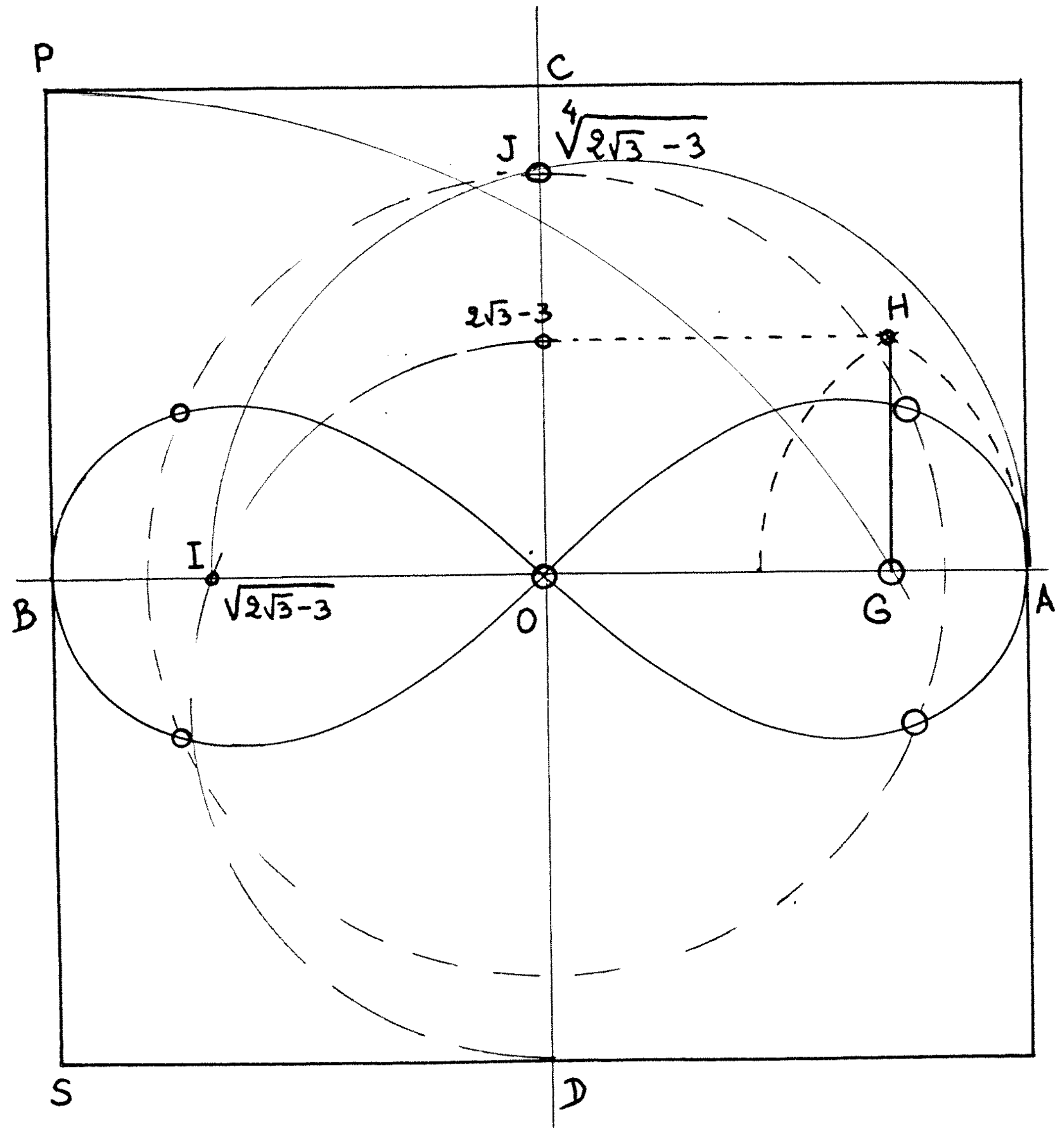
En particulier pour $s=\dfrac{\varpi}{2}$, le quart de lemniscate est partagé en deux. Dans ce cas : $f(s)=0$; $F(s)=\sqrt{2}$ donc $x=\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Cette longueur est constructible à la règle et au compas, de la manière suivante : la lemniscate étant inscrite dans le carré d'axes de symétrie (BOA) et (COD), tracer l'arc de cercle de centre B et de rayon BC= $\sqrt{2}$, qui coupe (OA) en E. La perpendiculaire en E à (OA) coupe le cercle de diamètre [OA] en F. OF est la longueur $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ cherchée . (Rappelons que OA = 1).
D'une manière plus générale, pour s fixé, l'arc moitié, d'origine O est obtenu en construisant

$$x=\sqrt{\frac{F(s)-1}{f(s)+1}}=\sqrt{\frac{1-f(s)}{1+F(s)}} \text{ avec } F(s)=\sqrt{1+\varphi^2(s)} \text{ et } f(s)=\sqrt{1-\varphi^2(s)}.$$



8. Trisection d'une demi lemniscate.

En appliquant**(1)** à $\alpha = 2s$ et $\beta = s$ on obtient : $\varphi(3s) = \dfrac{u(3-6u^4-u^8)}{1+6u^4-3u^8}$ avec $u = \varphi(s)$. Prenant $3s = \varpi$, on obtient $u = \varphi(s) = \varphi(\dfrac{\varpi}{3})$ comme racine de l'équation **(3)** : $u^8 + 6u^4 - 3 = 0$, soit $u = \sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}$, constructible comme suit : le cercle de centre S de rayon SP=2 coupe [BA] en G tel que AG = $2-\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}-3=$ GH est la hauteur d'un triangle équilatéral de demi base AG. Il est alors facile de construire successivement les longueurs OI = $\sqrt{2\sqrt{3}-3}$ puis $u = \sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}$ = OJ. Remarquons que les huit solutions de l'équation **(3)** correspondent aux huit valeurs de $\varphi\left[\dfrac{\varpi}{3}(1+2m+2in)\right]$ déterminées par les solutions de $3s = \varpi + 2\varpi(m+in)$ m et n entiers : $0 \le m \le 2$; $0 \le n \le 2$; le couple (1,0) correspondant à la solution u=0 étant laissé de côté., donc : $(m,n) \in \left[(0,1);(0,2);(0,0);(1,1);(1,2);(2,0);(2,1);(2;2)\right]$.



Nous laissons au lecteur le soin de calculer $\varphi(\frac{\varpi}{6})$ pour la division de la demi lemniscate en six.

Indication : $x = \varphi(\frac{\varpi}{6}) = \varphi(\frac{1}{3}.\frac{\varpi}{2}) \Leftrightarrow \varphi(3s) = 1$, (avec $s = \frac{\varpi}{2}$)

$\Leftrightarrow u(3-6u^4-u^8) = 1+6u^4-3u^8 \Leftrightarrow (u+1)(t^2-2t-2)^2 = 0$ avec $t = u + \frac{1}{u}$.

(Réponse : $\varphi\left(\frac{\varpi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}+1-\sqrt{2\sqrt{3}}\right]$).On peut aussi réaliser la bissection de $s = \frac{\varpi}{3}$ par la méthode du § 7, qui donne $\varphi\left(\frac{\varpi}{6}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\sqrt{2\sqrt{3}-3}}-1}{\sqrt{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}+1}}$, dont on vérifiera l'égalité avec l'autre expression ci-dessus.

9. Division de la lemniscate en N parties égales.

Appliquons la relation **(2)** au cas où $\alpha = md$ et $\beta = \mu d$, avec m et μ entiers naturels tels que $m+\mu$ soit impair. Les relations **(1)** nous montrent facilement que $\varphi(kd)$, $f(kd)$, $F(kd)$ sont, pour k entier, des fractions rationnelles en $x = \varphi(d)$, $y = f(d)$, $z = F(d)$, avec en plus les relations $y^2 = 1-x^2 ; z^2 = 1+x^2$. On a en effet les formules de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} \varphi[(n+1)d] = -\varphi[(n-1)d] + \dfrac{2\varphi(nd)f(d)F(d)}{1+\varphi^2(nd)\varphi^2(d)} \\[2ex] f[(n+1)d] = -f[(n-1)d] + \dfrac{2f(nd)f(d)}{1+\varphi^2(nd)\varphi^2(d)} \\[2ex] F[(n+1)d] = -F[(n-1)d] + \dfrac{2F(nd)F(d)}{1+\varphi^2(nd)\varphi^2(d)} \end{cases}$$

Pour les premières valeurs de n on a de cette façon : $\varphi(2d) = \frac{2xyz}{1+x^4}$; $\varphi(3d) = \frac{x(3-6x^4-x^8)}{1+6x^4-3x^8}$;

$$\varphi(4d) = 4xyz\frac{1-5x^4-3x^8+x^{12}}{1+20x^4-26x^8+20x^{12}+x^{16}}$$ [10];

$$\varphi(5d) = \frac{x(5-2x^4+2x^8)(1-12x^4-26x^8+52x^{12}+x^{16})}{(1-2x^4+5x^8)(1+52x^4-26x^8+12x^{12}+x^{16})}$$

On peut montrer en particulier que pour n impair $\varphi(x)/x$ est une fraction rationnelle en x^4. On calculera alors $\varphi[(m+\mu i)d]$ par les formules **(1)** qui donnerons une expression de la forme

[10] Calculés par Gauss, in Gauss Nachlass, Werke III, p. 405.

$x\psi(x^2)$; où ψ est une fonction rationnelle. En changeant d en id , $\varphi(d)$ deviendra $\varphi(id) = i\varphi(d) = ix$ et $\varphi[(m+\mu i)d] = x.\psi(-x^2)$. Par conséquent $\psi(x^2) = T(x^4)$ où T est une fonction rationnelle de x. Le lecteur pourra par exemple vérifier que :

(4) $\varphi[(2+i)d] = x\dfrac{2-2x^8+i(1-6x^4+x^8)}{1-2x^4+5x^8}$, qui se simplifie en $xi\dfrac{1-2i-x^4}{1-(1-2i)x^4}$ par le facteur commun $1-(1+2i)x^4$.

Comme le cas de la division par deux a déjà été traité, on peut supposer dans la suite que N est impair. De plus, lorsque N est de la forme N = 4n+1, on sait que N se décompose en somme de deux carrés : N = $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)$. Comme N est impair, il en est de même de $\alpha+\beta$, de sorte que **(5)** : $\varphi[(\alpha+i\beta)d] = x\dfrac{T}{S}$ où T et S sont des polynômes en x^4. En prenant $d = \dfrac{\varpi}{\alpha+i\beta}$ le premier membre de (5) est nul, et par conséquent $x = \varphi\left(\dfrac{\varpi}{\alpha+i\beta}\right)$ sera une racine de l'équation : T = 0. Abel démontre que cette équation est en fait de degré $4n = \alpha^2+\beta^2-1$, que ses racines sont les nombres $\pm\varphi\left(\dfrac{k\varpi}{\alpha+i\beta}\right)$, avec $1 \le k \le 2n$ et qu'elle est résoluble par les mêmes méthodes que Gauss a mises en place pour la division du cercle. En particulier si N=4n+1 est de la forme $1+2^n$, alors l'expression de $\varphi\left(\dfrac{\varpi}{4n+1}\right)$ ne contient que des racines carrées et donc est constructible à la règle et au compas. Voyons en l'illustration avec le cas N = 5 = 2^2+1.

Les égalités **(4)** nous fournissent les valeurs de $\varphi\left(\dfrac{k\varpi}{2+i}\right)$ pour $1 \le k \le 4$ comme racines de l'équation $1-2i-x^4 = 0$, c'est-à-dire comme racines quatrièmes de 1-2i. L'une de celle-ci s'écrit : $x_0 = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2\sqrt{5}+2}} - i\sqrt{2\sqrt[4]{5}-\sqrt{2\sqrt{5}+2}}\right] = \dfrac{1}{2}(u-iv)$. Alors :

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{5}\right) = \varphi\left(\frac{\varpi}{2+i}+\frac{\varpi}{2-i}\right) = \varphi\left(\frac{4\varpi}{5}\right) = \varphi\left(\varpi-\frac{4\varpi}{5}\right).$$

Par les formules **(1)** avec $\alpha = \dfrac{\varpi}{2+i}$ et $\beta = \dfrac{\varpi}{2-i}$, on a alors :

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{5}\right) = \frac{u-v}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2\sqrt{5}+2}} - \sqrt{2\sqrt[4]{5}-\sqrt{2\sqrt{5}+2}}}{\sqrt{5}+1} \text{ ; et de même :}$$

$$\varphi\left(\frac{2\varpi}{5}\right) = \frac{u+v}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2\sqrt{5}+2}} + \sqrt{2\sqrt[4]{5}-\sqrt{2\sqrt{5}+2}}}{\sqrt{5}+1}.$$

Remarque . L'équation T = 0 correspondant à $\varphi(\varpi)=0$, donne le partage de la demi lemniscate en cinq parties égales. Mais lorsqu'on a ce partage là, on a immédiatement aussi le partage de la lemniscate entière, en prenant un point sur deux. Cependant le cas N = 5 est trop immédiat au niveau de la résolution de l'équation T = 0 pour manifester toute la puissance de l'outil algébrique mis en place par Abel. Voyons celle-ci à l'œuvre dans le cas N = 17.

10. Partage de la lemniscate en dix-sept parties égales.

Il s'agit de déterminer les valeurs de $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)$; $1\leq k\leq 16$. Or $\frac{2k\varpi}{17}=\frac{k\varpi}{1-4i}+\frac{k\varpi}{1+4i}$, de sorte qu'il suffit de calculer les $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{1+4i}\right)$ qui, combinés avec leurs conjugués, donneront les $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)$. Définissons s par la relation :

(6) $\varphi(s)=\pm\varphi(4is)=\pm i\varphi(4s)\Leftrightarrow s=\pm 4is+2(\lambda\varpi+i\mu\varpi)$, ou $s=\frac{\varpi(\lambda+i\mu)}{1\pm 4i}$. Mais l'ensemble des valeurs $s_k=\frac{k\varpi}{1\pm 4i}$ coïncide avec l'ensemble des solutions de l'équation **(6).** En effet, cette dernière a pour solutions les nombres $s_{(\lambda,\mu)}=\frac{\varpi}{1\pm 4i}(\lambda+i\mu)$, mais on peut toujours trouver k, λ et μ de telle façon que $\frac{\varpi}{1+4i}(\lambda+i\mu)=\frac{k\varpi}{1+4i}+2\varpi(\lambda'+i\mu')$. Il suffit de vérifier les égalités $\begin{cases}\lambda=k+\lambda'-4\mu'\\ \mu=4\lambda'+\mu'\end{cases}$ ce qui se réalise avec $k=\lambda+4\mu$ [mod. 17] ; $\lambda'=\frac{\lambda+4\mu-k}{17}$ et $\mu'=\mu-4\lambda'$. De même avec $\frac{\varpi}{1-4i}(\lambda+i\mu)$.

Il y a donc 32 valeurs du type $s_k=\frac{k\varpi}{1\pm 4i}$; $1\leq k\leq 16$. Mais à cause de **(6)** on a : $\varphi^2(s_k)=-\varphi^2(s_{4k})=\varphi^2(s_{17-k})=-\varphi^2(s_{17-4k})$ pour k = 1 ; 2 ; 3 ; 6. Il n'y a par conséquent que huit valeurs distinctes de $\varphi^4(s)$. Cherchons en l'équation qui les admet comme racines.

Si $\varphi(s)=u$ alors $\varphi(2s)=\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$; $\varphi^2(2s)=\frac{4u^2(1-u^4)}{(1+u^4)^2}$; $\varphi^2(4s)=\frac{4\varphi^2(2s)(1-\varphi^4(2s)}{[1+\varphi^4(2s)]^2}$.

La relation $\varphi^2(4s) = -\varphi^2(s)$ donne alors :

$$u^2+\frac{16u^2(1-u^4)\left[(1+u^4)^4-16u^4(1-u^4)^2\right](1+u^4)}{\left[(1+u^4)^4+16u^4(1-u^4)^2\right]^2}=0$$; soit, en posant $u^4=x$:

(7) $x^8 + 24x^7 + 524x^6 - 1400x^5 + 886x^4 - 408x^3 + 748x^2 - 136x + 17 = 0$

Cette équation se décompose, comme on le verra un peu plus bas, en les deux suivantes à coefficients et racines conjuguées :

$$\begin{cases} x^4+(12-20i)x^3+(-10+28i)x^2+(-20-12i)x+1+4i=0\ ; \text{ équation (8)} \\ x^4+(12+20i)x^3+(-10-28i)x^2+(-20+12i)x+1-4i=0\ ; \text{ équation (9)} \end{cases}$$

Soit donc $x_1 = \varphi^4(s)$ l'une des racines de l'équation **(7).** Alors $x_2 = \varphi^4(2s)$ est aussi une racine.
Or $\varphi^2(2s)=\dfrac{4\varphi^2(s)\left(1-\varphi^4(s)\right)}{\left(1+\varphi^4(s)\right)^2}$ et $\varphi^2(4s)=\dfrac{4\varphi^2(2s)\left(1-\varphi^4(2s)\right)}{\left(1+\varphi^4(2s)\right)^2}=-\varphi^2(s)$. D'où :

$\dfrac{\varphi^2(2s)}{\varphi^2(s)}=\dfrac{4(1-x_1)}{(1+x_1)^2}=-\dfrac{(1+x_2)^2}{4(1-x_2)}$ et $\varphi^2(s).\varphi^2(2s)=\dfrac{4x_1(1-x_1)}{(1+x_1)^2}=-\dfrac{4x_2(1-x_2)}{(1+x_2)^2}$. En posant

$x_1 + x_2 = y$ et $x_1.x_2 = z$, on obtient y et z par élimination de z entre les deux équations :

$\begin{cases} 16(1-y+z)+(1+y+z)^2=0 \\ y-y^2+6z-yz-2z^2=0 \end{cases}$ qui nous donne $z=\dfrac{-y^2+27y-34}{3y+42}$ et

$y^4+24y^3+488y^2-1632y+1360 = 0$, laquelle se décompose en $\begin{cases} y^2+(12-20i)y+(-28+24i)=0 \\ y^2+(12+20i)y+(-28-24i)=0 \end{cases}$

En posant $r=\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}+1}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}}$ l'une des racine carrée de 1+4i, on aura pour y les quatre valeurs suivantes : $\begin{cases} y_1=-6+10i+6ir\ ; & y_2=-6+10i-6ir \\ y_3=-6-10i-6i\bar{r}\ ; & y_4=-6-10i+6i\bar{r} \end{cases}$, où $\bar{r}$ est le conjugué de r.

Les valeurs correspondantes de z sont $\begin{cases} z_1=9+2i+(4-2i)r\ ; & z_2=9+2i-(4-2i)r \\ z_3=9-2i+(4+2i)\bar{r}\ ; & z_4=9-2i+(4+2i)\bar{r} \end{cases}$

Les deux équations $x^2 - y_1x + z_1 = 0$ et $x^2 - y_2x + z_2 = 0$ donnent par leur produit :

$x^4 - (y_1 + y_2)x^3 + (y_1y_2 + z_1 + z_2)x^2 - (y_1z_2 + y_2z_1)x + z_1z_2 = 0$, soit justement l'équation **(8)** :

$$x^4 + (12 - 20)x^3 + (-10 + 28i)x^2 + (-20-12i)x + 1+4i = 0$$

Les racines de cette dernière sont donc données par $\begin{cases} \dfrac{y_1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{y_1^2}{4}-z_1} \\ \dfrac{y_2}{2}\pm\sqrt{\dfrac{y_2^2}{4}-z_2} \end{cases}$; mais

$\dfrac{y_1^2}{4}-z_1=-34-68i+(-34-16i)r=[-34-16i+(-18+4i)r]r=[-1+4i+(1+2i)r]^2.r$.

De sorte que, en désignant par ρ une racine quatrième de 1+4i :

$\rho=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2\sqrt{17}+\sqrt{2\sqrt{17}+2}}+i\sqrt{2\sqrt{17}-\sqrt{2\sqrt{17}+2}}\right]$, les racines de l'équation **(8)** sont alors

données par $\begin{cases} x_1=-3+5i+3ir+\rho[-1+4i+(1+2i)r] \\ x_2=-3+5i+3ir+\rho[-1+4i+(1+2i)r] \\ x_3=-3+5i-3ir+i\rho[-1+4i-(1+2i)r] \\ x_4=-3+5i-3ir-i\rho[-1+4i-(1+2i)r] \end{cases}$ et celles de l'équation **(9)** par leur conjuguées.

Il reste maintenant à déterminer les expressions des $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)$ à partir de la formule

$\varphi(\alpha+\beta)=\frac{u\sqrt{1-v^4}+v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}$, avec $u=\varphi\left(\frac{2k\varpi}{1+4i}\right)$ et $v=\varphi\left(\frac{2k\varpi}{1-4i}\right)$; donc si x est l'une quelconque

des racines de (8) et $\bar{x}$ sa conjuguée, alors $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)=\frac{\sqrt[4]{x}\sqrt{1-\bar{x}}+\sqrt[4]{\bar{x}}\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x\bar{x}}}$

Ces expressions n'ont évidemment qu'un intérêt tout théorique. Elles ont été calculées par L. Kiepert dans le *Journal de Crelle*, tome LXXV, en 1873. Abel lui-même n'a jamais publié de calcul effectif pour le partage de la lemniscate, se contentant d'énoncer sa possibilité, et donnant la méthode générale. Celle-ci est un peu différente de celle de Kiepert et généralise la méthode que Gauss avait développée pour la division du cercle, en s'appuyant sur ses propres recherches concernant la résolution des équations algébriques et développées dans le mémoire *Sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*[11].

Exercice. Montrer que la division de la lemniscate en 13 parties égales se ramène à la résolution de deux équations du troisième degré : $x^3-(11\pm10i)x^2+(7\pm4i)x+3\mp2i=0$

Bibliographie.

Abel N.H., *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*, Oeuvres complètes , (Sylow, Lie éd.s), Christiania, 1881, vol. I , p. 478-507.

Abel N.H., *Recherches sur les fonctions elliptiques*, Journal für die reine und angew.Mathematik, Bd. 2, p.101-181, Bd.3, p.160-190. 1827-1828. Oeuvres complètes (Sylow, Lie éd.s), Christiania, 1881, vol. I, p.263-388.

Cooke R., *Abel's Theorem*, in *The history of modern mathematics*, vol. I, p. 389-424, ed. D. Rowe, J. McCleary, Academic Press, 1989.

Enneper A., *Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte*, Halle, 1876.

Friedelmeyer J-P., *Des équations qui déterminent les sections circulaires*, in *L'Ouvert*, n° 46 et 47, mars et juin 1987, Revue de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'I.R.E.M. de Strasbourg.

Friedelmeyer J-P., *Emergence du concept de groupe*, Fragments d'histoire des mathématiques III, Brochure A.P.M.E.P. n° 83, 1991.

Gauss C.F., *Recherches arithmétiques*, traduites par A. C. M. Poullet Delisle, Paris, 1807.

Gauss C.F., *Elegantiores integralis* $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ *proprietates*, Gauss Nachlass, Werke, Göttingen, 1870-1927, Vol III.

Houzel Ch., *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes*, in *Abrégé d'histoire des mathématiques*, t. II, Paris Hermann, 1978, p.1-113.

Kiepert L., *Siebzehntheilung des Lemniscatenumfangs durch alleinige Anwendung von Lineal und Cirkel*, Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd.75, p.255-263, 1873.

Loria G., *Spezielle algebraische und transcentente ebene Kurven, Theorie und Geschichte*, Leipzig, Teubner 1902.

[11] Pour une étude de ce mémoire, cf .Friedelmeyer J-P, *Emergence du concept de groupe*, p.85 à 97.