A VOS STYLOS

PROBLÈME 49

Énoncé (proposé par R. Kern) :

Dans un triangle ABC, on note a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB, et α, β, γ les mesures respectives des angles en A, B et C.

1) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos\alpha = \cos 2\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 2\beta$.

2) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos\alpha = \cos 3\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 3\beta$.

Solution (par J. Dautreveaux) :

On se propose de rechercher tous les triangles ABC à côtés entiers, caractèrisés par une certaine relation entre leurs angles.

Soient, selon l'usage, a, b, c les mesures des côtés respectivement opposés aux sommets A, B, C : ils satisfont aux inégalités $0 < |a - b| < c < a + b$ (et à trois autres analogues), ou encore $c > 0$ et $(a - b)^2 < c^2 < (a + b)^2$.

Soient d'autre part α, β, γ les mesures des angles ayant respectivement pour sommets A, B, C . Inversement, trois nombres réels α, β, γ peuvent représenter les mesures des trois angles intérieurs d'un triangle si et seulement si on a :

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ et $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ou, ce qui est équivalent,

$\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha + \beta < \pi$, avec $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$.

On observe que, de par ces conditions, on a (conditions surabondantes) :

$0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, $0 < \alpha + \beta < \pi$.

Dans la question posée, existent en fait deux problèmes indépendants, que l'on traitera donc de façon distincte.

1er cas. Condition $\cos\alpha = \cos 2\beta$

Cette condition se traduit par : $\alpha = 2\beta + 2k\pi$ ou $\alpha = -2\beta + 2k\pi$ En vertu des conditions précédemment énoncées, la première solution conduit à $k = 0$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{3}$, la seconde à $k = 1$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ (pour $0 < \alpha < \pi$) qui est incompatible avec $\pi < \beta < 2\pi$ (provenant de $\alpha + \beta < \pi$) , ce qui fait que la contrainte $\cos\alpha = \cos 2\beta$ n'admet que la seule solution :

$\alpha = 2\beta$, $\gamma = \pi - 3\beta$, avec $0 < \beta < \frac{\pi}{3}$.

La relation $\alpha = 2\beta$ équivaut donc dans ce cas à $\cos\alpha = \cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$, soit en revenant aux côtés grâce aux relations classiques entre côtés et angles d'un triangle : $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{\left(a^2-b^2+c^2\right)^2}{2a^2c^2} - 1$, soit

$$b\left[a^4 - 2a^2b^2 + \left(b^2-c^2\right)^2\right] - a^2c\left(b^2+c^2-a^2\right) =$$

$$a^4(b+c) - a^2\left[c\left(b^2+c^2\right) + 2b^3\right] + b\left(b^2-c^2\right)^2 = 0 \quad , \quad \text{soit :}$$

$$a^2c\left(b^2+c^2-a^2\right) = b\left[\left(a^2-b^2+c^2\right)^2 - 2a^2c^2\right] =$$

$$= b\left[a^4 - 2a^2\left(b^2-c^2\right) + \left(b^2-c^2\right)^2 - 2a^2c^2\right]$$

ou encore, en ordonnant par rapport à a et divisant par b + c :

$a^4 - a^2\left(2b^2 - bc + c^2\right) + b(b-c)^2(b+c) = 0$, qui se factorise aisément en :

$\left[a^2 - b(b+c)\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] = 0$ et, puisque $a > |b - c|$, le second facteur est non nul et la seule solution est : $a^2 = b(b+c)$; la condition $|b - c| < a < b + c$ se traduit alors par : $(b-c)^2 < b(b+c) < (b+c)^2$.

L'inégalité de droite se réduit à $b < b + c$ et est certainement vérifiée , celle de gauche s'écrit alors :

$b^2 - 2bc + c^2 < b^2 + bc$, soit $c^2 < 3bc$ ou $c < 3b$.

On se trouve par suite ramené à résoudre en entiers l'équation $a^2 = b(b+c)$ avec la condition $c < 3b$.

On ne restreint pas la généralité du problème en supposant que les entiers a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble , car si (a,b,c) est une solution du problème , $(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$ en est une autre, pour tout entier $\lambda \geq 1$. Dans cette hypothèse, b et c sont nécessairement premiers entre eux car sinon ils admettraient un diviseur premier commun autre que 1, lequel diviserait a . Dès lors, b et b + c sont eux aussi premiers entre eux, de sorte qu'il existe deux entiers m et n premiers entre eux , tels que :

$b + c = m^2$, $b = n^2$ d'où $a^2 = m^2n^2$, soit $a = mn$.

et la condition $c < 3b$ se traduit par $m^2 < 4n^2$, soit $m < 2n$.

Dès lors la solution réside dans les formules :

$a = mn$, $b = n^2$, $c = m^2 - n^2$, où m et n sont deux entiers premiers entre eux vérifiant la double inégalité $n < m < 2n$.

<u>Exemples :</u> $m = 3$, $n = 2$ $(a = 6 , b = 4 , c = 5)$
$m = 4$, $n = 3$ $(a = 12 , b = 9 , c = 7)$

<u>Remarque 1</u> . Existe-t'il des triangles rectangles satisfaisant à la condition $\alpha = 2\beta$?

Là on a la solution $0 < \beta < \dfrac{\pi}{3}$, $\alpha = 2\beta$, $\gamma = \pi - 3\beta$, et il est clair que le triangle ne saurait être rectangle en B ; s'il l'est en A on a $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{4}$, $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$, soit un triangle rectangle isocèle qui ne peut être à côtés entiers ; s'il l'est en C on aura $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, soit un demi-triangle équilatéral qui, ici aussi, ne saurait être à côtés entiers. Il n'existe donc aucun triangle rectangle solution du problème .

<u>Remarque 2 .</u> La condition $\alpha = 2\beta$ équivaut à $\cos\alpha = \cos 2\beta$ et $\sin\alpha = \sin 2\beta$. En utilisant $\sin\alpha = \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$ on obtient aisément entre les côtés la relation $a = 2b\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$, soit $a^2c = b\left(c^2 + a^2 - b^2\right)$, ou encore $a^2(b - c) = b\left(b^2 - c^2\right)$, soit $a^2 = b(b + c)$ sous réserve que $b \neq c$: or, on ne peut avoir $b = c$, équivalent à $\beta = \gamma$ que si $\beta = \frac{\pi}{4}$, soit un triangle rectangle isocèle dont on sait qu'il ne peut être solution du problème posé . D'ailleurs on vérifie aisément que la relation $a^2 = b(b + c)$ est néammoins vraie .

<u>Remarque 3 .</u> Réciproquement que dire d'un triangle vérifiant la relation $a^2 = b(b + c)$?

On a facilement : $a^2 = b^2 + bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, d'où $\cos\alpha = \frac{c - b}{2b}$;

par ailleurs $\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{c^2 + b^2 + bc - b^2}{2ac} = \frac{c + b}{2a}$, de sorte que :

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{(c + b)^2}{2a^2} - 1 = \frac{(c + b)^2}{2b(b + c)} - 1 = \frac{b + c}{2b} - 1 = \frac{c - b}{2b} = \cos\alpha \ .$$

Et de même on aura aussi :

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha \ , \quad \cos\beta = \frac{b + c}{2a} \quad \text{d'où} \quad \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{2b(b + c)}{2a^2}\sin\alpha = \sin\alpha \ .$$

<u>2ème cas :</u> $\cos\alpha = \cos 3\beta$

Cette condition se traduit par $\alpha = 3\beta + 2k\pi$ ou par $\alpha = -3\beta + 2k\pi$. La première hypothèse , compte tenu de $0 < \beta < \pi$, donne $2k\pi < \alpha < 3\pi + 2k\pi$, de sorte qu'il existera α tel que $0 < \alpha < \pi$ si $]0,\pi[\cap]2k\pi, 2k\pi + 3\pi[\neq \varnothing$, ce qui ne peut se produire que si $k = 0$ ou $k = -1$. On a donc les deux possibilités :

(1) $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$, $\alpha = 3\beta$, $\gamma = \pi - 4\beta$, et

(2) $\frac{2\pi}{3} < \beta < \frac{3\pi}{4}$, $\alpha = 3\beta - 2\pi$, $\gamma = 3\pi - 4\beta$.

Dans la deuxième hypothèse , on aura $2k\pi - 2\pi < \alpha < 2k\pi$, ce qui avec $0 < \alpha < \pi$ n'est possible qu'avec $k = 1$, et donne la solution :

(3) $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{2\pi}{3}$, $\alpha = 2\pi - 3\beta$, $\gamma = 2\beta - \pi$.

Il existera donc trois types de triangles satisfaisant à la condition proposée. Cette condition s'écrit encore $\cos\alpha = \cos 3\beta = \cos\beta(4\cos^2\beta - 3$, soit comme précédemment en revenant aux côtés a, b, c du triangle

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}\left[\frac{4(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2c^2} - 3\right] \quad \text{, soit encore}$$

$$a^3c^2(b^2 + c^2 - a^2) = b(a^2 - b^2 + c^2)\left[(a^2 - b^2 + c^2)^2 - 3a^2c^2\right] \quad \text{, ou}$$

$$b(a^2 - b^2 + c^2)\left[c^4 - c^2(a^2 + 2b^2) + (a^2 - b^2)^2\right] - a^3c^2\left[c^2 - (a^2 - b^2)\right] = 0 \quad , \qquad \text{soit}$$

aussi en développant par rapport à c :

$$bc^6 - (a^3 + 3b^3)c^4 + (a^2 - b^2)(a^3 - 3b^3)c^2 + b(a^2 - b^2)^2 = 0 \; .$$

Ce polynôme se factorise immédiatement en :

$\left[bc^2 - (a + b)(a - b)^2\right]\left[c^2 - b(b - a)\right]\left[c^2 - (a + b)^2\right] = 0$. Comme $c < a + b$, le troisième facteur est certainement non nul, et il reste entre les côtés l'une ou l'autre des deux relations : $bc^2 = (a + b)(a - b)^2$ et $c^2 = b(b - a)$, avec la restriction supplémentaire $(a - b)^2 < c^2 < (a + b)^2$ et $c > 0$ qui conditionne l'existence d'un triangle dont les mesures des côtés sont précisément a, b, c . Il reste à relier ces deux conditions aux solutions obtenues pour les valeurs des angles .

On remarque que l'ensemble des cas (1) et (2) est caractèrisé (compte tenu de $\cos\alpha = \cos 3\beta$) par $\sin\alpha = \sin 3\beta$, le cas (3) l'étant par $\sin\alpha = -\sin 3\beta$. Comme $\dfrac{\sin 3\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}(3 - 4\sin^2\beta) = \dfrac{b}{a}(4\cos^2\beta - 1)$, on se trouve ramené à étudier

$$4\cos^2\beta - 1 = \frac{4(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2c^2} - 1 = \frac{c^4 + 2c^2(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2 - a^2c^2}{a^2c^2} =$$

$$= \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} + \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2c^2}$$

1°) Avec $c^2 = \dfrac{(a + b)(a - b)^2}{b}$ la condition $c^2 > (a - b)^2$ est satisfaite car $a + b > b$ mais $c^2 < (a + b)^2$ s'écrit

$(a - b)^2 < b(a + b)$, soit $a^2 < 3ab$, ou $a < 3b$; on doit avoir aussi $c < 0$ et , évidemment $a \neq b$ (sinon on aurait $c = 0$) . On a alors :

$$4\cos^2\beta - 1 = \frac{(a + b)(a - b)^2}{a^2b} + \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} + \frac{b(a^2 - b^2)^2}{a^2(a + b)(a - b)^2} =$$

$$= \frac{(a - b)(a^2 - b^2)}{a^2b} + 1 - \frac{2b^2}{a^2} + \frac{b(a + b)}{a^2} = 1 + \frac{b(a - b)}{a^2} + \frac{(a - b)(a^2 - b^2)}{a^2b}$$

$$= 1 + \frac{a^2(a-b)}{a^2 b} = \frac{a}{b} \quad \text{de sorte que} \quad \frac{\sin 3\beta}{\sin\alpha} = 1 \quad , \quad \text{ou} \quad \sin\alpha = \sin 3\beta \quad .$$

Cette solution correspond donc aux cas (1) et (2) . Pour discriminer les cas (1) et (2), on écrit $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = 4\cos^2\beta - 1$: dans le cas (1) on a $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ d'où

$$\cos\beta > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2\beta > \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad 2\cos^2\beta > 1 \quad \text{et} \quad 4\cos^2\beta - 1 > 1 \quad \text{d'où}$$

$a > b$; dans le cas (2) on aura $\frac{2\pi}{3} < \beta < \frac{3\pi}{4}$ d'où

$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\beta < -\frac{1}{2}$ soit $\cos^2\beta < \frac{1}{2}$ ou $2\cos^2\beta < 1$ et $4\cos^2\beta - 1 < 1$ donc $a < b$. On obtient donc ainsi la distinction entre les cas (1) et (2) . Il en résulte que :

Lorsque $c^2 = \frac{(a-b)(a^2-b^2)}{b}$, on obtient un triangle du type (1) $(\alpha = 3\beta)$ lorsque $b < a < 3b$, un triangle du type (2) $(\alpha = 3\beta - 2\pi)$ lorsque $a < b$.

Avec $c^2 = b(b-a)$, nous devons avoir $(a-b)^2 < c^2 < (a+b)^2$, et nous voyons que $c^2 > (a-b)^2$ ou $(b-a)^2$ est vrai si $a < b$ car $b > b - a$; d'autre part $c^2 < (a+b)^2$ est vrai aussi car $b(b-a) < a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 > -3ab$ est vrai. Alors aussi on calcule $4\cos^2\beta - 1$:

$$4\cos^2\beta - 1 = \frac{b(b-a)}{a^2} + \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2 b(b-a)} = \frac{a^2 - ab - b^2}{a^2} - \frac{(a+b)^2(a-b)}{a^2 b}$$

$$\frac{b(a^2 - ab - b^2) - (a-b)(a^2 + 2ab + b^2)}{a^2 b} = -\frac{a^3}{a^2 b} = -\frac{a}{b} \quad \text{d'où} \quad \frac{\sin 3\beta}{\sin\alpha} = -1 \quad \text{et}$$

enfin $\sin 3\beta = -\sin\alpha$ d'où le cas (3) .

Lorsque $c^2 = b(b-a)$ on obtient un triangle du type (3) avec $a < b$.

Il ne reste plus qu'à trouver les triangles de l'espèce à côtés entiers ; on ne restreint pas la généralité du problème en supposant a, b, c premiers entre eux dans leur ensemble , car si (a,b,c) est une solution , $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ en est aussi une pour tout entier $\lambda \geq 1$.

<u>Types (1) et (2).</u> On a $c^2 = \frac{(a+b)(a-b)^2}{b}$, soit aussi: $\frac{a+b}{b} = \left(\frac{c}{|a-b|}\right)^2$.

Alors , il existe une fraction irréductible $\frac{m}{n}$ telle que $\frac{c}{|a-b|} = \frac{m}{n}$, m et n étant premiers entre eux, avec m > n (il en est de même de m^2 et n^2) et on pourra écrire : $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{m^2}{n^2}$ soit : $a + b = \lambda m^2$, $b = \lambda n^2$, soit $a = \lambda(m^2 - n^2$ et $c = \mu m$, $|a - b| = \mu n = \lambda|m^2 - 2n^2|$; m et n étant premiers entre eux, il en est de même de n et $|m^2 - 2n^2|$, de sorte que nécessairement n divise λ : $\lambda = kn$, ce qui en définitive nous donnera :

$a = kn|m^2 - 2n^2|$, $b = kn^3$, $c = km|m^2 - 2n^2|$, et l'hypothèse que a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble nous imposera alors $k = 1$.

La discrimination entre les types (1) et (2) reposant sur les inégalités respectives $b < a < 3b$ et $a < b$, on obtient aisément dans les deux cas les conditions respectives $2n^2 < m^2 < 4n^2$ et $n^2 < m^2 < 2n^2$. Les solutions sont donc :

Pour le type (1) $(\alpha = 3\beta)$ (m et n premiers entre eux) :
$a = n(m^2 - n^2)$, $b = n^3$, $c = m(m^2 - 2n^2)$ avec $n\sqrt{2} < m < 2n$

Pour le type (2) $(\alpha = 3\beta - 2\pi)$ (m et n premiers entre eux) :
$a = n(m^2 - n^2)$, $b = n^3$, $c = m(2n^2 - m^2)$ avec $n < m < n\sqrt{2}$.

Type (3). On a $c^2 = b(b - a)$ (ce qui suppose évidemment $a < b$) . Ici, a et b sont nécessairement premiers entre eux, car tout diviseur premier commun à a et b, donc aussi à b et b - a diviserait c , ce qui est contraire à l'hypothèse que a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble. b et b - a sont alors premiers entre eux , leur produit étant un carré, chacun d'eux est lui-même un carré, de sorte qu'il existe deuxentiers m et n premiers entre eux tels que $b = m^2$, $b - a = n^2$ avec $m > n$. Alors on a bien sûr c = mn. Les solutions sont donc :

Pour le type (3) $(\alpha = 2\pi - 3\beta)$ (m et n premiers entre eux) :
$a = m^2 - n^2$, $b = m^2$, $c = mn$ avec $m > n$.

On a ainsi obtenu toutes les solutions .

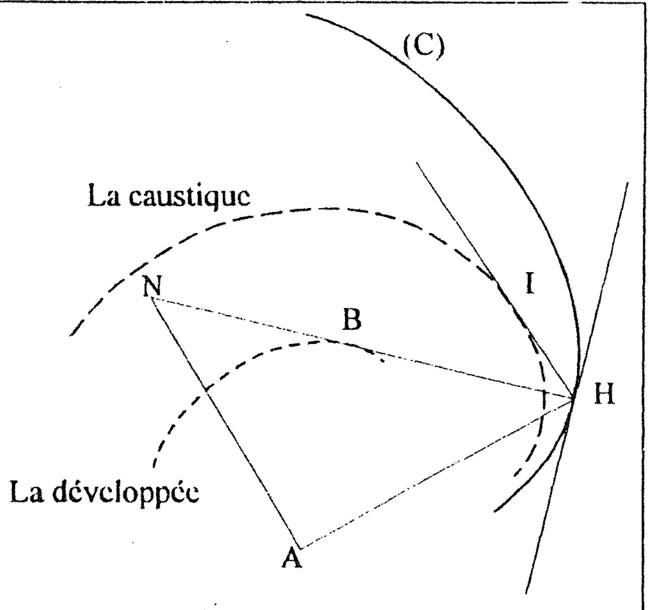
Exemples :

Type (1) :	m = 3 , n = 2	(a = 10 , b = 8 , c = 3)
	m = 5 , n = 3	(a = 48 , b = 27 , c = 35)
Type (2) :	m = 4 , n = 3	(a = 21 , b = 27 , c = 8)
	m = 5 , n = 4	(a = 36 , b = 64 , c = 35)
Type (3) :	m = 2 , n = 1	(a = 3 , b = 4 , c = 2)
	m = 3 , n = 2	(a = 5 , b = 9 , c = 6)

Remarque : Existe-t'il des triangles rectangles solutions de ce problème ? Certainement pas pour les types (2) et (3) pour lesquels on sait par avance que l'angle β est obtus. Il reste pour le type (1), qui ne saurait être rectangle en B car $0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$, que le cas du triangle rectangle en A ($\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{6}$, $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$), demi-triangle équilatéral qui ne saurait être à côtés entiers, et celui du triangle rectangle en C ($\alpha = \frac{3\pi}{8}$, $\beta = \frac{\pi}{8}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$) qui lui non plus ne peut être à côtés entiers puisque $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ n'est pas rationnel. Le cas des triangles isocèles apporte également une réponse négative car $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{7}$ sont irrationnels, les seules possibilités étant, $\alpha = \frac{3\pi}{5}, \beta = \frac{\pi}{5}, \gamma = \frac{\pi}{5}$ et $\alpha = \frac{3\pi}{7}, \beta = \frac{\pi}{7}, \gamma = \frac{3\pi}{7}$ pour le type (1) ; $\alpha = \frac{\pi}{7}, \beta = \frac{5\pi}{7}, \gamma = \frac{\pi}{7}$ pour le type (2) ; et enfin $\alpha = \frac{\pi}{5}, \beta = \frac{3\pi}{5}, \gamma = \frac{\pi}{5}$ pour le type (3).

PROBLÈME 50

Énoncé (proposé par A. Stoll, IREM de Strasbourg) :



les angles $\widehat{AHB}$ et $\widehat{BHI}$ sont égaux

Données :
- Une courbe plane (C) "suffisamment régulière"
- un point A dans le plan de la courbe (C)

Notations : (cf. figure)

- H un point de la courbe (C)
- B désigne le centre de courbure correspondant à H
- N le point de la normale à (C) en H tel que (AN) soit perpendiculaire à (AH)
- I est le point de la caustique issue de A

Montrer que :

$$\boxed{\frac{|2HN - HB|}{HB} = \frac{HA}{HI}}$$

Applications :

1. En déduire une construction géométrique du centre de courbure d'une parabole en un point quelconque.
2. Montrer que la caustique d'une spirale logarithmique par rapport à son centre est une spirale logarithmique identique.
3. Trouver d'autres applications de la formule ci-dessus.

PROBLÈME 51

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Démontrer l'identité

$$tg\, x = \frac{x - \frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5}\frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{1.3}{1.2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

2°) Généraliser l'identité précédente au quotient

$$\frac{x - \frac{a(a+2)(a+4)}{a(a+1)(a+2)}\frac{x^3}{3!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}\frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{a(a+2)}{a(a+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}\frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1,D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2), puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3).
Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

PROBLÈME 53

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des 2−mélanges réguliers (pour la définition d'un 2−mélange, voir l'article sur les tours de cartes dans le présent numéro de l'Ouvert).
1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.
2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.