

IMAGES MATHÉMATIQUES ET COMMUNICATION ENTRE MATHÉMATICIENS

Muriel LEFEBVRE

Le texte qui suit est basé sur le mémoire de D.E.A¹ auquel ont conduit les multiples entretiens réalisés entre avril et juin 1997, dans les locaux de l'IRMA et du département de mathématiques. Nombre d'entre vous avaient alors accepté de s'y prêter, et certains vont sans nul doute se retrouver dans les citations qui sont extraites de ces entretiens. J'espère avant tout ne pas avoir trahi leurs propos.

Cette étude se poursuit dans le cadre d'une thèse, au GERSULP. Aussi, ne soyez pas étonné(e)s de m'apercevoir à nouveau déambulant dans les couloirs, et éventuellement être admise dans vos bureaux ou participer à vos séminaires. Encore une fois, merci à tou(te)s, pour le travail que vous m'avez permis de réaliser.

Quelques heures passées dans un département de mathématiques suffisent à nous rappeler l'importance des images dans cette discipline. En effet, que ce soit graphiquement (par l'intermédiaire de figures, dessins, et diagrammes divers) ou verbalement (utilisation d'un vocabulaire analogique, ou métaphorique emprunté au langage commun), lorsque les mathématiciens travaillent, ils utilisent fréquemment des images. Ces images sont présentes à différentes étapes des activités de recherche en mathématiques, qui correspondent par ailleurs à de multiples modes d'interaction entre chercheurs. Figures et diagrammes sont manipulés de manière tout à fait explicite lorsque les "mathématiques sont en train de se faire"², mais aussi lors de la construction de conventions dans la formalisation des savoirs mathématiques. Enfin, il est possible d'observer la présence répétée d'images au cours de la diffusion des connaissances mathématiques entre chercheurs, et lorsque celle-ci est destinée à l'extérieur de la communauté mathématique (enseignement, vulgarisation). Il nous a paru intéressant d'étudier les va-et-vient des images mathématiques à travers les quatre étapes citées précédemment, de façon à mettre en évidence le statut d'intermédiaire dont dispose l'image. En effet, des fonctions très diverses lui sont reconnues : support à l'imaginaire dans une visée heuristique, dans la communication et les échanges mathématiques, comme alternative à un formalisme parfois réducteur, ou encore en tant qu'instrument incontournable dans certaines démonstrations. L'observation met en évidence la grande diversité des pratiques iconiques, fonction des domaines mathématiques, mais aussi des individus... Or les objets mathématiques ont une nature bien singulière, puisqu'ils ne sont pas saisissables comme tels par une expérience sensible et immédiate. Du fait de leur degré d'abstraction, l'appréhension de ces objets soulève de nombreuses questions concernant leur représentabilité. Il fallait alors s'interroger sur les modes de construction de ces images. Font-elles partie de la culture mathématique ? A quel titre ? En quoi participent-elles à un système de conventions, et à la formalisation des connaissances mathématiques ? Est-il possible de construire un consensus dans une démonstration mathématique sur la base de ces images ? L'image mathématique, nous semble t-il,

© L'OUVERT 91 (1998)

¹ Ce mémoire peut être consulté à la bibliothèque du GERSULP (Groupe d'Etude et de Recherche sur la Science de l'Université Louis Pasteur), 7 rue de l'Université, Strasbourg.

² pour reprendre l'expression "la science en train de se faire", in Latour, B. (1995). *La science en action*. Folio.

constitue un terrain de recherche particulièrement révélateur des pratiques de communication de la communauté des mathématiciens.

De manière à répondre à ce questionnement, il a paru indispensable d'aller sur le terrain, à la rencontre d'une communauté de mathématiciens, afin d'observer, d'interroger les chercheurs et de questionner leurs pratiques. Aussi, la première partie est-elle une entrée en matière anthropologique³, comprenant notamment une présentation de la communauté au sein de laquelle la plupart des observations ont été réalisées. J'y retrace ma démarche méthodologique, pour décrire ensuite les techniques d'observation utilisées et le déroulement des entretiens.

Une seconde partie est consacrée à la dimension communautaire de l'utilisation des images mathématiques. La lecture d'une image ne s'improvise pas, il existe des conventions graphiques qui réservent son interprétation à des spécialistes à même de la décoder convenablement. On peut faire l'hypothèse qu'une telle éducation, si elle existe, transmet implicitement d'une génération de mathématiciens à l'autre, une sorte de mode d'emploi de ces images mathématiques, assorti de conventions d'usage. Aussi, nous nous sommes interrogée sur l'existence d'une opposition entre deux modes distincts d'utilisation des images : l'un public, reconnu par l'ensemble de la communauté ; l'autre, privé, dont l'utilisation reste très individuelle.

A la rencontre d'une communauté de mathématiciens

1. Démarche méthodologique

Dans la perspective d'une observation participante, durant les quelques semaines passées à l'IRMA, il était essentiel d'assister à des séminaires, congrès, présentations, cours, rencontres informelles, discussions professeur/élève, chercheur/chercheur, etc. C'est d'ailleurs à l'occasion de séminaires que la plupart des éléments présentés ici ont été observés. Les notes prises en ces diverses occasions comprennent bien sûr de nombreux schémas et graphiques, relevés lors des séminaires, et qui sont accompagnés d'une description détaillée du contexte de leur observation ainsi que place dans la démonstration, dans le discours, etc. Quelques photographies de tableaux sont venues compléter l'ensemble.

A l'IRMA de Strasbourg et au département de mathématiques de l'ULP, 23 entretiens ont été réalisés, auprès de mathématiciens de spécialités relativement variées, mais toujours dans le champ de ce qu'on appelle les "mathématiques fondamentales" : arithmétique, géométrie-arithmétique, géométrie, géométrie algébrique, théorie des nœuds, topologie, algèbre, théorie des nombres, probabilités, analyse, etc. Ces mathématiciens sont en majorité des universitaires, mais aussi des étudiants en fin de thèse de doctorat. J'ai également rencontré trois chercheurs en didactique de mathématiques, toujours à Strasbourg, ainsi que deux physiciens-théoriciens ayant eu, à l'occasion de leur activité de recherche, des contacts privilégiés avec une communauté de mathématiciens. Enfin, deux étudiants de Toulouse ont accepté d'éclaircir certaines de ces questions sur la base de leur expérience mathématique.

³ au sens de Latour, *ibid.*

La plupart des entretiens ont été enregistrés, puis retranscrits. Leur durée moyenne est d'une heure. Le plus souvent les rendez-vous ont été pris à l'avance, de façon à laisser un temps de réflexion à chaque interviewé. Ces entretiens étaient tous de type semi-directif, c'est-à-dire que si j'ai tenu à aborder quelques questions essentielles concernant le travail et la communication en mathématiques, j'ai néanmoins été attentive à l'ouverture de mes interlocuteurs pour des sujets adjacents. Les premiers entretiens sont restés très généraux dans leur approche de la communication entre mathématiciens. Ils ont progressivement évolué, pour se centrer sur les différentes perspectives des objets mathématiques, dans l'intention d'analyser l'influence de ces divergences sur la communication entre chercheurs. Les entretiens commençaient le plus souvent par une présentation de leur domaine de travail. Les mathématiciens étaient ensuite invités à préciser la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent, à décrire la représentation qu'ils en ont, la manière dont ils en parlent avec leurs collègues - surtout lorsque ces discussions mélangent les disciplines et les perspectives, etc. Souvent, de leur propre initiative, les chercheurs ont fait appel à des diagrammes et à des dessins afin d'exposer aussi bien leur domaine de recherche que les objets utilisés. Les entrevues se terminaient en général sur une manifestation de curiosité naturelle de leur part, concernant l'utilisation qui serait faite des données recueillies.⁴

Certains chercheurs mentionnèrent des titres d'ouvrages, souvent des autobiographies de mathématiciens, ou des articles de vulgarisation mathématique. Nombreux sont ceux qui ont fait mention de l'essai de J. Hadamard⁵ ou des autobiographies de mathématiciens comme Laurent Schwartz ou André Weil, traduisant ainsi leur intérêt pour les questions concernant la psychologie de l'invention en mathématiques, ou le point de vue d'autres chercheurs dans cette discipline.

Parallèlement à mon travail de terrain (observations et entretiens), j'ai consulté de la littérature consacrée à l'appréhension des objets mathématiques ou scientifiques, au rôle des images dans les sciences,... afin de confronter le matériau recueilli à une analyse plus théorique. Mais, mener simultanément lecture et observation de terrain s'est parfois avéré difficile.

A plusieurs reprises, au cours des entretiens, certains mathématiciens se sont interrogés sur mon niveau d'études, en mathématiques, ou dans une autre discipline scientifique. Cette question survenait généralement avec l'introduction d'un détail plus technique (liée à la présentation de leur spécialité ou à la nécessité d'illustrer leur propos par un exemple, alors suivi d'un dessin). Ébauchant une explication de nature purement mathématique, les chercheurs prenaient conscience qu'ils étaient sur le point de s'engager dans une discussion sur les mathématiques avec quelqu'un qui pouvait être totalement étranger à leur domaine.

Ma maîtrise de mathématiques me donnait l'impression de partager un peu leur culture. Le fait d'avoir des connaissances de base m'a sans doute donné accès à un niveau d'informations que je n'aurais pas pu obtenir sans cela, grâce au langage spécialisé. Aussi, cela m'a-t-il permis d'observer les mathématiciens en situation de "communication mathématique", et non pas de communication limitée à l'aspect sociologique.

Il s'est avéré difficile mais essentiel de conserver à la fois le recul du "sociologue" indispensable à toute étude de nature anthropologique, tout en restant "marginale sur le

⁴ Voici, peut-être un peu tardivement, une tentative de réponse à ces interrogations.

⁵ Hadamard, J. (1949). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*. Paris. Librairie Scientifique Albert Blanchard. Trad. J. Hadamard. (1959).

terrain". Comme l'a souligné S. Traweek⁶ : "*Clairement, une enquête par observation participante ne peut pas maintenir la distinction entre les connaissances subjectives et celles objectives.*" Cette difficulté est d'autant plus réelle que l'on a entrepris, comme c'est mon cas, des études universitaires dans le domaine observé.

2. Le poids des images dans la communication

"La première proposition de mon anthropologie philosophique est que les êtres humains sont créateurs d'images."

I. Hacking⁷

L'observation réalisée sur le terrain a confirmé l'importance des représentations iconiques et graphiques comme moyen de communication dans les mathématiques, quoi qu'en disent parfois les mathématiciens. Les entretiens ont confirmé et précisé ce point : les chercheurs ont très fréquemment recours aux images mathématiques aussi bien à titre explicatif, descriptif, qu'à titre d'exemple. Néanmoins, si dessins et images mathématiques sont omniprésents lors des contacts entre mathématiciens, ce sujet n'est jamais abordé explicitement par eux, et ils semblent même ressentir un certain malaise à s'exprimer sur ce point.

Par exemple, ils ne parlent pas entre eux des images mentales, des représentations d'objets mathématiques auxquels ils se réfèrent, de ce qu'ils "imaginent". Un physicien-théoricien, qui, un moment, fit partie de la communauté des mathématiciens de Strasbourg, déclarait notamment : "*On ne parle pas de ça. Les types ne parlent pas de ça. Je n'ai jamais vu des types venant me demander dans une discussion "Tiens, comment est-ce que tu imagines cette bête là ?" et que je lui dise "J' imagine qu'elle a 6 pattes, comme ça, une fourrure épaisse, et trois cornes", et que l'autre me dise "C'est marrant, parce que moi, je l'imagine le poil complètement ras, aucune corne, mais par contre une très longue queue".(...) Tels que je connais les mathématiciens, ils auraient surtout honte si on leur demandait de décrire exactement ce qu'ils voient.*" Ce type d'images sont le plus souvent exclues des échanges entre chercheurs, et considérées comme relevant du domaine privé.

Cette étude nous a conduit à nous interroger sur la constante confrontation entre ce qui résultait d'une démarche d'observation - l'omniprésence des images en mathématiques -, et ce que rapportaient les mathématiciens lors des entretiens. Ce constat de la présence répétée d'images et de dessins dans la communication entre ces scientifiques, suscite une série de remarques et de questions. Si les mathématiques comprennent des spécialités différentes, supposant des rapports spécifiques aux objets mathématiques et des perspectives distinctes, il existe néanmoins une activité de communication importante entre ces divers domaines. Quel rôle les images jouent-elles dans ces différents cas ? Favorisent-elles l'échange d'informations, le transfert de connaissances ? Selon les spécialités, comment s'effectue le recours aux images, quelles en sont les pratiques ? Comment se réalisent alors les collaborations interdisciplinaires ? Quels sont les enjeux de la communication visuelle en mathématiques, j'entends ici par l'intermédiaire des "images mathématiques" ? Derrière une fonction instrumentale, qui n'est jamais discutée, et dont

⁶ Traweek, S. (1988). *Beamtimes and lifetimes. The world of high energy physicists*. Cambridge. Harvard University Press.

⁷ Hacking, I. (1983). *Concevoir et expérimenter*. Paris. Ed. Christian Bourgeois. Trad. B. Ducrest. (1989).

on considère qu'elle fait partie de la culture mathématique, mais n'a pas de réelle importance (alors que la communication visuelle est présente à tous les niveaux), n'y a-t-il pas un enjeu social primordial, qui régle, gère, cette communication visuelle ?

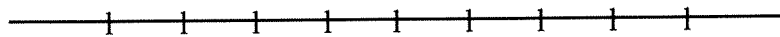
Dimension communautaire de l'usage des images mathématiques

Comme l'a souligné cette étude, les images font véritablement partie de la culture des mathématiciens. Cependant, il fallait se demander si ce qui est généralement considéré comme relevant de la perception intuitive, c'est-à-dire l'appréhension «spontanée» des objets mathématiques par les images, n'est pas en réalité une construction élaborée selon des normes et des règles communes à l'ensemble de la communauté des mathématiciens. Nous commencerons ce paragraphe en abordant la question de la lecture et de l'interprétation des images.

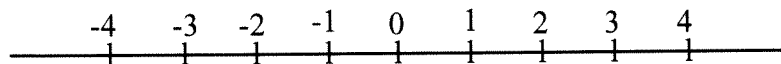
1. Une éducation visuelle

"L'oeil innocent ne voit rien."
E.H. Gombrich.

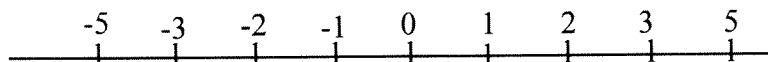
La lecture d'une image ne s'improvise pas de façon arbitraire : elle s'accompagne toujours d'une interprétation. Un même dessin peut en avoir plusieurs distinctes selon le contexte dans lequel il s'inscrit. Prenons par exemple une ligne droite hachurée régulièrement.



En analyse, elle a toutes les chances de représenter l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels (figuré par la droite), et son sous-ensemble $\mathbf{Z}$ des nombres entiers relatifs (...-6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6...).



En géométrie arithmétique, par contre, la droite figure $\mathbf{Z}$ (ensemble des nombres entiers relatifs), et les encoches son sous-ensemble des nombres premiers (... -7 ; -5 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ...).

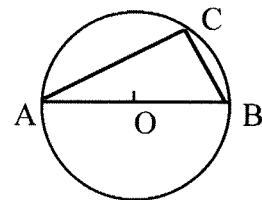


De fait, une image mathématique n'est compréhensible que par une minorité de spécialistes, à même de décoder, de déchiffrer la représentation en analysant convenablement les symboles utilisés. Par spécialiste, nous entendons tout d'abord un mathématicien ; mais, de façon plus précise, il s'agit d'un spécialiste dans un domaine extrêmement précis et spécifique. Certains mathématiciens supposent en effet que l'ensemble de la communauté mathématique a une base culturelle commune, ce qui leur permettrait de comprendre et de participer au travaux de leurs collègues. Mais d'autres reconnaissent sans détour que, dès qu'ils s'éloignent des domaines qu'ils ont l'habitude d'explorer - en dehors des concepts et des dessins assimilés pendant les deux premiers cycles universitaires - ils ne parviennent plus à saisir le sens de ces recherches, ni parfois le langage utilisé.

Il importe d'être un "spécialiste" pour décoder une image, afin de s'emparer de l'information qui y est contenue, mais aussi pour déterminer ce qui est, ou n'est pas important dans cette image : jusqu'à quel point peut-on se fier à l'image même ? De quelle façon les exigences de rigueur doivent-elles être prises en compte ? une ligne un peu plus recourbée qu'une autre occasionne-t-elle une quelconque différence de sens ? Jusqu'où de simples modifications de forme n'entraînent-elles pas des modifications notables de sens ? Il faut savoir s'approprier une image, un dessin pour pouvoir ensuite l'utiliser, c'est-à-dire l'interpréter et le redessiner. *"Voir, c'est une éducation."* me dira ainsi une chercheuse en didactique des mathématiques.

Les témoignages suivants confirment que la plupart des mathématiciens reconnaissent la nécessité d'une éducation visuelle pour pouvoir développer une culture de l'image. Un algébriste déclarait ainsi : *"Moi, je n'arrive pas à lire des dessins géométriques, parce qu'il s'agit d'objets de dimensions importantes. Mais je pense que si on étudie la géométrie, on finit par savoir lire ce dessin. Il suffit de développer une certaine habitude."* Un autre ajoutait, tout en traçant la figure ci-dessous sur un brouillon : *"Sur ce dessin, je vois l'angle droit du triangle, culturellement, mais quelqu'un qui ne serait pas géomètre ne le verrait pas"*.

Comme on vient de le voir, toute lecture d'image s'accompagne d'un décodage et d'une interprétation qui obéissent à certaines conventions, lesquelles s'acquièrent au cours d'une sorte d'éducation visuelle. N. Goodman écrit : *"La perception et l'interprétation ne sont pas des opérations distinctes; elles sont au contraire complètement interdépendantes."* De nombreux auteurs comme J.P.



Changeux⁸, I. Hacking, J. Hadamard ou encore A. Sauvageot⁹, soulignent l'importance d'une telle éducation dans l'interprétation des images. En mathématiques, cette éducation commence dès les premiers cours de l'enseignement primaire (avec, par exemple en géométrie, le cercle ou le carré ; les "patates" pour la théorie des ensembles, etc.). Mais elle peut varier considérablement d'un mathématicien à l'autre, en fonction de son parcours personnel et scientifique, de la culture mathématique dans laquelle il est immergé, de sa plus ou moins grande ouverture à des disciplines adjacentes, de sa spécialité... Il existe des différences essentielles entre les spécialités mathématiques, et il est possible d'observer des comportements nettement différenciés, selon les domaines. Bien sûr, géomètres et topologues - qui s'intéressent avant tout aux formes - sont-ils amateurs de dessins de toutes sortes, tandis qu'algébristes - plus soucieux de l'étude des structures -et analystes leur préfèrent souvent des diagrammes, voire une écriture entièrement formalisée. Comme l'écrit I. Hacking : *"Il existe différents styles de représentations. Il n'y a pas de représentation sans style."* Mon observation m'a déjà amenée à souligner que ces comportements différenciés, associés aux différents domaines mathématiques, semblent se maintenir au cours des collaborations entre domaines adjacents : les chercheurs restent attachés à leur affinité d'origine «avec ou sans dessins». A.Sauvageot parle ainsi d'un *"habitus perceptif et mental"*, et P.Virilio de *"générations visuelles"*.

⁸ Changeux, J.P., Connes, A.(1989). *Matière à pensée*. Paris. Collection Points. Ed. Odile Jacob. (1992)

⁹ Sauvageot, A. (1994). *Voires et Savoirs. Esquisse d'une sociologie du regard*. Paris. P.U.F.

A travers l'analyse ci-dessus, on perçoit l'existence d'une sphère "d'intuition dirigée". En effet, les images mathématiques, tout en se rapprochant davantage d'un mode intuitif plutôt que formel - elles sont appréhendées, manipulées comme des éléments concrets, malléables, transformables, subjectifs, voire ambigus -, nécessitent une éducation visuelle spécifique pour pouvoir être interprétées et utilisées correctement. Contrairement à ce que l'on aurait pu penser, elles relèvent d'une construction obéissant à certaines normes et conventions communautaires qui définissent leur usage comme un véritable langage.

2. La normalisation des images

Ainsi que nous venons de le souligner, il existe un processus de normalisation qui tend à éviter ou, du moins, à limiter l'ambiguïté dans la lecture des images. Est-il possible de réellement normaliser les images ? Pour répondre à cette question, nous nous sommes à nouveau intéressée à l'origine et à la construction des images mathématiques. Il est en effet possible de distinguer deux catégories d'images : celles qui sont normalisées et formalisées, et celles dont l'utilisation est plus personnelle, plus intuitive. Les images normalisées font partie des représentations reconnues et acceptées par l'ensemble de la communauté. Au contraire, les images intuitives sont utilisées dans une perspective plus personnelle et individuelle ; les mathématiciens y recourent de façon privée ou dans un domaine spécifique. Elles sont, de ce fait, manipulées avec une certaine souplesse : il est toujours possible de les modifier sans contraintes, hors des règles figées qui codifient les images normalisées. En contrepartie, elles ne sont pas toujours reconnues par l'ensemble de la communauté.

Il existe aussi des images qui sont "dans la norme" pour certains domaines, mais sont rejetées dans d'autres où elles sont considérées comme insuffisamment "rigoureuses". C'est un phénomène que l'on peut observer plus particulièrement au cours des collaborations interdisciplinaires. En effet, si nous prenons l'exemple topologique¹⁰ de la déformation d'un tore privé d'un point en un 8, cette démonstration n'est pas acceptée par les algébristes ou les analystes, qui exigeront une argumentation nettement plus formalisée. Les conventions peuvent varier considérablement d'un domaine à un autre ainsi que la notion même de rigueur, ce qui conduit parfois à des malentendus. Un géomètre me rapportait ainsi que : *"Si l'on confronte un arithméticien classique à une représentation de $\mathbb{Z}$ comme une droite avec des encoches représentant les nombres premiers, cela risque fort de le perturber."* Le risque de voir nombre de dessins mal compris ou mal interprétés reste grand. L'utilisation d'une représentation plutôt que d'une autre est donc avant tout une question de choix.

D'après un chercheur, *"Il y a 2 ou 3 dessins qui reviennent tout le temps, toujours les mêmes. (...) Les mathématiciens sont très conventionnels : on utilise tous les mêmes dessins."* A partir du moment où de nombreux mathématiciens font usage d'une image, celle-ci se normalise. En effet, la communauté - il peut s'agir de l'ensemble de la communauté ou des spécialistes d'un domaine déterminé - s'accorde alors sur son sens, réalisant, en quelque sorte, un consensus communautaire autour de cette image, en lui attribuant le statut d'image-standard¹¹, "d'image-normée", selon l'expression de A.

¹⁰ Voir chapitre III, p.38 du mémoire.

¹¹ La représentation du nœud topologique dessiné au chapitre II, p.28 du mémoire, a été introduite récemment par un chercheur d'un institut anglo-saxon. Elle fut progressivement adoptée par plusieurs de

Sauvageot. Cette dernière écrit : "*La perception des objets est indissociablement liée aux images-normées assimilées au cours des expériences antérieures, à l'échelle tant individuelle que collective, et en ce sens on peut sans doute parler d'un véritable 'habitus' perceptif et mental.*" Progressivement, ces codes visuels instituent une normalisation du monde mathématique. Ce sont alors de véritables pressions sociales qui imposent les représentations.

L'existence d'un véritable *langage de représentations* obéissant à certaines conventions qui en définissent la construction et l'usage, apparaît clairement, tout comme il existe des normes régissant l'écriture mathématique formelle. Les représentations qui ont la propriété d'être communicables et transmissibles d'un individu à un autre deviennent, selon l'expression de J.P. Changeux, des "*représentations publiques*". En effet, les images-standard font désormais partie du domaine normalisé, reconnu par l'ensemble de la communauté et, en tant que tel, considéré comme public. Une chercheuse en didactique des mathématiques parlait ainsi de "*règles d'admissibilité*", de "*règles du milieu*", c'est-à-dire de règles gérées par la communauté des mathématiciens, qui reconnaissent à certaines images un statut "public". Du fait de leur normalisation, les images-standard constituent une partie du langage mathématique formel.

Toutefois, il existe un rapport ambigu entre la démarche formelle, et l'utilisation des images. En effet, la mathématique formelle ne nécessite aucune interprétation intuitive, laquelle est considérée comme une démarche extra-mathématique. Tout ce que le formalisme requiert, c'est un principe de non-contradiction logique. Il tend donc à s'éloigner de l'appréhension intuitive d'un objet, de façon à supprimer toute ambiguïté dans son interprétation. "*Une équation est comprise par tout le monde de la même façon.*" rappelle un chercheur. M. Serres¹² écrit par ailleurs que : "*L'acte d'éliminer la cacophonie, la tentative d'éliminer le bruit - le bruit est l'ensemble des phénomènes de brouillage qui font obstacle à la communication - est à la fois la condition de l'appréhension de la forme abstraite, et la condition de la réussite de la communication. (...) Formaliser, c'est éliminer le bruit de manière optimale.*" Il ajoute : "*Le formalisme est la langue de la description. Mais cette langue obéit à des lois de langue : alors l'intention descriptive se double de l'intention normative.*" Les mathématiques, comme toute discipline qui se revendique exacte, cherche à prendre une certaine distance avec la perception, de façon à donner un fondement totalement "objectif" à ses recherches. Or, le "voir" est une activité qui relève incontestablement du domaine du sensible, car elle reste subjective, ce qui l'oppose à un mode formaliste supposé "neutre".

Compte tenu de ces différents éléments, il devient particulièrement difficile d'évaluer ce qui est acceptable - et accepté - dans le domaine des images, en mathématiques. Dans un tel contexte, les images sont-elles réellement autorisées ? Peut-on considérer qu'elles font toujours partie des mathématiques ? Selon l'avis d'un physicien-théoricien : "*Le contenu scientifique est ce qui reste quand on a supprimé les images.*" Un étudiant me rapportait les propos d'un enseignant en analyse qui commentait l'utilisation des images, à des fins argumentaires, par les topologues : "*Faire une démonstration avec des dessins, ce n'est*

ses collègues. En franchissant les frontières de l'institut, elle a semble-t-il été reprise par l'ensemble des mathématiciens de la spécialité.

¹² Serres, M. (1969). *Hermès I, la communication*. Paris. Editions de Minuit.

plus faire des mathématiques." On peut aussi citer P.J. Davis et R. Hersh¹³ : *"L'utilisation de dessins, de diagrammes ou même d'images mentales est considérée comme non-mathématique. En principe, ils ne devraient pas être nécessaires. Par conséquent, le mathématicien les juge inappropriés dans un texte mathématique, voire dans un cours de mathématiques."*

Néanmoins, le formalisme pourrait-il suffire, à lui seul, à l'appréhension et à la compréhension d'objets mathématiques ? Aucune démonstration n'est jamais entièrement formalisée. On se contente, s'il y a doute, de produire une formalisation partielle. A plusieurs reprises, il est advenu que des démonstrations partiellement formalisées, mais néanmoins considérées comme valides, soit reconnues incomplètes après une longue période de consensus général autour de leur prétendue exactitude. Parfois, c'est la validité du théorème lui-même qui se trouve remise en question. Une démonstration formelle est avant tout un instrument de contrôle et un moyen de consensus.

Surtout, on peut se demander si le formalisme, tel que nous l'avons décrit jusqu'à présent, n'est pas, comme l'a suggéré Feyerabend, trop rigide et inhibant, constituant par là-même un véritable frein aux activités de création et de communication des mathématiciens. La position formaliste est très souvent énoncée comme allant de soi. Mais un physicien-théoricien déclarait par exemple : *"L'algèbre peut cacher des choses que la 'visualisation' - par l'intermédiaire de diagrammes ou de schémas - fait apparaître plus facilement."* Un chercheur en algèbre a ajouté : *"Il y a une tendance des mathématiciens français en général à rechercher une espèce de perfection formelle¹⁴; ce qui fait qu'il y a beaucoup d'articles français qui sont parfois d'un tel formalisme, que moi, c'est ce que j'appelle du complètement abstrait, dans le sens où l'on ne voit pas quel peut en être l'intérêt mathématique."* Cette tendance à l'hyper formalisation est considérée par certains chercheurs comme une caractéristique de l'"École française". Le rôle des images n'est il pas aussi de donner davantage de liberté aux mathématiciens ?

Une telle orthodoxie existe dans tous les domaines scientifiques, mais pas nécessairement avec les mêmes exigences. L'orthodoxie mathématique tend à normaliser l'écriture des théorèmes et démonstrations, mais aussi celle des contenus et significations mathématiques. On peut rappeler à ce propos les difficultés qu'ont rencontré Lobatchevski et Riemann pour diffuser l'idée d'une nouvelle géométrie, non-euclidienne, rejetée par les défenseurs de la géométrie standard, d'obédience euclidienne. Le mode de représentation des mathématiques influe donc aussi sur les pratiques conceptuelles.

A ce stade de notre réflexion, il est nécessaire de considérer l'attitude des mathématiciens face à l'utilisation des images, en reprenant la distinction faite précédemment entre les images «normées» et les images «intuitives».

3. Le malaise des mathématiciens sur la question des images

¹³ Davis, P.J., Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. London. Penguin Books.

¹⁴ Il semble important de souligner ce point, afin de rappeler la très forte influence qu'a eu le Bourbakisme sur l'école mathématique française, aussi bien dans les contenus mathématiques que dans l'écriture reflétant de très fortes exigences de rigueur : le formalisme. Mais il est bon de garder à l'esprit que ces exigences de rigueur ont eu une emprise considérable sur la manière avec laquelle on a fait, et on fait encore de nos jours des mathématiques en France.

L'orthodoxie mathématique, dont nous avons parlé précédemment, exige une argumentation et des démonstrations "rigoureuses" - c'est-à-dire sans aucune ambiguïté dans l'interprétation - qui devraient suffire à la compréhension et à l'élaboration de travaux de recherche mathématique. En effet, selon les dires de nombreux algébristes, "*en mathématiques, tout est formalisable*." En outre, il est clairement apparu qu'il existe une véritable normalisation des images mathématiques, ayant pour effet de standardiser les dessins et représentations utilisées tout comme l'écriture mathématique formalisée obéit à des normes très précises.

L'étude que nous avons réalisée a cependant révélé la présence d'un incontestable malaise dès que l'on aborde la question des images mathématiques avec les chercheurs. C'est un sujet qui nous a semblé particulièrement sensible.

Dans une large mesure, les images sont utilisées par les chercheurs comme un support individuel à l'imaginaire, au cours d'activités heuristiques ou de compréhension. Les dessins réalisés par les mathématiciens dans ces moments-là sont davantage des esquisses qui rappellent qu'il ne s'agit que d'un travail en cours, non achevé et qui, par conséquent, obéit moins aux exigences de rigueur qu'un texte formalisé diffusé à travers la communauté des mathématiciens. Alors que les résultats scientifiques sont généralement publiés au moyen d'une démonstration formalisée tout à fait linéaire, le fait de montrer ses images est assimilé au fait de révéler ses brouillons : sont ainsi affichés tous les cheminements qui ont été nécessaires à la pensée pour produire tel ou tel résultat. Cela est peut-être perçu comme particulièrement dévalorisant, car une image est loin d'être aussi "esthétique" - au sens mathématique du terme - qu'une démonstration linéaire formalisée, qui peut donner l'impression d'avoir été construite avec un «éclair de génie». Or, on connaît l'importance de l'esthétisme en mathématiques, qui exige d'une "belle" démonstration qu'elle soit courte, et surtout la plus formalisée possible, tout en restant si possible "compréhensible".

Il est nécessaire de s'arrêter ici un instant pour discuter de la réaction de scientifiques non-mathématiciens, comme par exemple les physiciens-théoriciens, face aux images. La physique théorique est un domaine qui est sans doute peu éloigné des mathématiques, si ce n'est, que ces scientifiques ont particulièrement conscience de travailler sur de la matière. Il nous ont paru en général beaucoup moins méfiants à l'égard des manipulations de dessins et de schémas que leurs collègues mathématiciens. Ainsi, un étudiant en physique-mathématique, décrivait-il les physiciens-théoriciens comme des chercheurs qui "*savent calculer des intégrales représentées par des dessins parce qu'ils en connaissent la signification physique. Ils jonglent beaucoup plus facilement avec les images sans s'encombrer d'un formalisme inhibant. Tandis que les mathématiciens interprètent un dessin au pied de la lettre, sans donner de sens à la suite de dessins qui leur est présentée.*"

Mais les images ne peuvent pas toujours être aussi rigoureuses que les mathématiciens le souhaiteraient. Les déchiffrer, c'est toujours faire appel à une interprétation et, comme le rappelle I. Hacking, "*une interprétation est toujours intentionnelle*." Or, nous l'avons déjà noté, les interprétations tendent à se multiplier en fonction de divers critères : domaine mathématique considéré, personnalité du chercheur, éducation, etc. On retrouve donc, dans chaque domaine ou spécialité - à côté des images-standard qui sont plus ou moins connues de l'ensemble des mathématiciens parce qu'elles sont utilisées dès les deux premiers cycles universitaires - des séries d'images beaucoup plus intuitives et

personnelles qui, hors de leur contexte mathématique spécialisé, ne sont pas acceptées comme telles par l'ensemble de la communauté. Ces dernières sont même désignées avec méfiance, car non normalisées et censées ne pas être nécessaires aux mathématiciens. On peut alors se demander quels sont, parmi ces dessins, ceux qui sont considérés comme standard et ceux qui sont jugés plus intuitifs.

Afin d'expliquer davantage le sentiment de malaise que semblent éprouver les mathématiciens lorsqu'ils s'expriment au sujet des dessins, il nous faut souligner ici le fait que parmi tous les scientifiques, les mathématiciens sont sans doute les seuls dont l'activité de recherche ne fasse pas explicitement référence à la matière. Il est relativement fréquent d'entendre les chercheurs travaillant sur des concepts abstraits procéder par ailleurs à une dépréciation du sensible. Un mathématicien disait à ce propos que : *"Les mathématiques sont singulières parmi les sciences car leur lien avec le réel n'est pas clair... mes collègues hurleraient car cela fait des années qu'ils disent que ce qu'ils font est très concret, afin d'obtenir des crédits!!!"*, ce qui est aussi l'avis d'un physicien-théoricien : *"Je crois que les mathématiciens, dès le départ, vivent l'absence totale de contact avec le réel, qu'ils en éprouvent au fond d'eux-mêmes une certaine honte. Ils exorcisent leur honte en faisant semblant de s'en vanter."*

Les mathématiciens s'expriment très rarement au sujet des images, et cela malgré l'utilisation incessante qu'ils en font. Ils n'en parlent pas entre eux et manifestent une certaine réticence à s'expliquer sur l'usage qu'ils font des images auprès de personnes extérieures à leur communauté scientifique. Confronter plusieurs chercheurs autour du thème des images mathématiques est une expérience surprenante : une gêne s'installe parmi les interlocuteurs, comme si aucun consensus n'existait réellement autour du rôle et de l'usage des images en mathématiques. Cette gêne nous semble pouvoir s'expliquer ainsi : dès que les mathématiciens sont amenés à discuter ensemble de leurs manières d'appréhender individuellement les objets mathématiques, ils ont l'impression d'être mis à nu, peut-être même jugés par les autres mathématiciens. Les images font partie de la culture mathématique ; pourtant, il s'avère difficile d'en parler, à la fois avec des non-initiés, c'est-à-dire vers l'extérieur de la communauté, mais aussi à l'intérieur de celle-ci, puisqu'elles n'ont aucun statut véritable.

On peut alors s'interroger sur la signification réelle du "bricolage" des images dans l'activité mathématique. En effet, il existe une contradiction entre d'une part, un certain accommodement des images à des fins individuelles¹⁵, et d'autre part une normalisation sociale de celles-ci. Outre une difficulté à définir des normes relatives aux images mathématiques, se pose ici un réel problème de communication, puisque, par l'intermédiaire des images, deux formes d'interrelation sont en jeu et coexistent en permanence.

4. La coexistence de deux modes d'expression par l'intermédiaire des images

Il semblerait que les images constituent un support de négociation entre deux dimensions très différentes de l'activité de communication en mathématiques : une dimension psychologique, privée et individuelle, opposée à une dimension communautaire

¹⁵ On peut se référer ici à la partie III du mémoire, qui souligne le rôle des images au cours d'activités heuristiques, pédagogiques ou communicationnelles.

publique et sociale. Peut-être faudrait-il parler ici d'un espace "pri-blic", c'est-à-dire un espace à la fois privé et public.

La dimension publique s'inscrirait dans une communication mathématique explicite, reconnue comme participant à l'élaboration des connaissances mathématiques mais qui reste toujours dépendante du contexte d'utilisation : une image peut être considérée comme mathématique par les topologues, mais non par les algébristes. La normalisation des images et le formalisme fonctionnent de pair dans une activité collective.

La dimension privée serait présente dès que l'on s'éloigne un tant soit peu de la rigoureuse orthodoxie exigée par la communauté des mathématiciens. Par dimension privée, nous entendons aussi bien un usage restreint à un domaine spécifique et non reconnu ailleurs... qu'un usage strictement personnel et individuel. Ce fragment tacite des connaissances mathématiques serait transmis au cours d'une communication implicite, pendant une activité de recherche personnelle, sans être nécessairement mis en avant comme tel : on peut rappeler à ce propos que les nombreux petits dessins réalisés sur les tableaux sont rarement achevés, mais délaissés dans un coin. L'éducation mathématique crée cependant un implicite commun puisque, très rapidement, l'étudiant s'habitue à utiliser les images aussi bien dans ses activités individuelles de compréhension que dans une perspective didactique, tout en considérant certaines images comme plus "acceptables" que d'autres, conformément aux normes en vigueur. Une partie des connaissances ne peut donc pas être rendue explicite tant qu'elle n'est pas reconnue d'utilité mathématique et conforme aux exigences de l'orthodoxie, donc acceptable par la communauté.

Conclusion

La présente étude a volontairement privilégié une dimension anthropologique dans son approche de la communication entre mathématiciens, de façon à mettre en évidence la présence des images dans la culture mathématique et à souligner leur rôle pourtant controversé dans le fonctionnement des collectifs de mathématiciens.

Nous y avons établi que les images font pleinement partie de la culture et du langage mathématique, à côté de l'écriture formalisée. Elles participent ainsi à constitution d'une identité commune à l'ensemble des mathématiciens. En effet, les images constituent une sorte d'intermédiaire à usages multiples, par exemple entre des concepts de nature abstraite et des objets plus concrets. Un passage en revue des différentes images observées nous a conduit à repérer d'une part, leur nature extrêmement diversifiée, et d'autre part, la variété de leurs utilisations, en fonction des domaines mathématiques considérés, que ce soit dans les activités de compréhension, de création, ou encore de communication. Tous les mathématiciens ne recourent pas aux images de la même façon. Cette différence dans l'utilisation des images et de l'écriture formelle autorise à parler de "pratiques iconiques" différentes, spécifiques à chaque spécialité mathématique.

L'emploi des images nécessite véritablement une éducation visuelle, obéissant à des normes qui seules standardisent leur interprétation et leur utilisation, selon une certaine "orthodoxie" ; celle-ci, du même coup, invalide tout usage intuitif.

L'examen plus approfondi de la notion d'"image mathématique", a mis en évidence l'existence d'une opposition flagrante entre deux modes d'appréhension et de traitement des objets : le premier, de nature surtout intuitive, s'appuie sur de très nombreuses images dont l'interprétation reste parfois ambiguë, tandis que le second se contente d'une écriture

formalisée ; ce dernier est considéré comme le seul langage véritablement rigoureux et dont l'utilisation ne prête pas à équivoque. L'image constitue donc un support de négociation entre ces deux dimensions distinctes de la communication en mathématiques : celle de nature intuitive, privée, individuelle, spécialisée, employée comme support de réification de concepts mathématiques, comme support à l'imaginaire, ou dans les activités heuristiques ; l'autre, de nature formelle, publique, sociale, pluridisciplinaire, utilisée comme support didactique aussi bien que rhétorique. Les enjeux de la communication visuelle en mathématiques me semblent donc avant tout liés à l'opposition entre l'appréhension intuitive des objets et l'analyse formelle, entre une logique de bricolage personnel et une logique d'utilisation collective. Les images appartiennent à ce qu'on pourrait alors appeler un domaine "pri-blic", c'est-à-dire à la fois privé et public. Elles constituent de fait ce que l'on nomme parfois des "objets-frontière", c'est-à-dire des objets qui, malgré des points de vue très divers posés sur eux, permettent de faire lien entre différentes communautés, différents groupes ou individus, et leurs différentes utilisations. L'image est un véritable objet de médiation à plusieurs dimensions, auquel ont recours les mathématiciens entre eux, ou dans leurs échanges avec la société, et qui participe ainsi à la construction d'espaces de socialisation.

Ce mémoire ne constituait qu'un examen préliminaire à une recherche plus approfondie, actuellement entreprise dans le cadre d'une thèse, et qui s'appuie sur un matériau théorique plus consistant. La notion "d'image" telle que nous l'avons présentée ici est excessivement simplifiée, et il conviendra de la nuancer au regard d'une analyse sémiotique. Des recherches ultérieures devraient en effet nous permettre d'examiner plus attentivement le processus dynamique de construction et de validation (ou d'invalidation) des images en mathématiques. Nous étudierons dans quelle mesure les images jouent un rôle dans la recherche mathématique, au niveau de la formalisation des connaissances, mais aussi de leur diffusion hors de la communauté scientifique (enseignement, vulgarisation).

Bibliographie

- Bastide, F. (1985). Iconographie des textes scientifiques. *Culture technique*. n°14. Paris. CRCT. Diffusion P.U.F.
- Davis, P.J., Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. London. Penguin Books.
- Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM Strasbourg.
- Fleck, L. (1935). *Genesis and development of scientific fact*. University of Chicago Press. Trad. F. Bradley. (1979).
- Goodman, N. (1968). *Languages of art*. Bobbs-Merrill Company. USA.
- Hadamard, J. (1949). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*. Paris. Librairie Scientifique Albert Blanchard. Trad. J. Hadamard. (1959).
- Kuhn, T.S. (1970). *La structure des révolutions scientifiques*. Paris. Champs Flammarion. (1983).
- Latour, B. (1995). *La science en action*. Folio.
- Lynch, M., Woolgar, S. (1990). *Representation in scientific practice*. Cambridge. MIT Press.
- Mandelbrot, B. (1985). La galaxie Mandelbrot. *Culture technique*. n°14. Paris. CRCT. Diffusion P.U.F.
- Pickering, A. (1992). *Science as practice and culture*. University of Chicago Press.
- Sauvageot, A. (1994). *Voires et Savoirs. Esquisse d'une sociologie du regard*. Paris. P.U.F.
- Serres, M. (1969). *Hermès I, la communication*. Paris. Editions de Minuit.
- Traweek, S. (1988). *Beamtimes and lifetimes. The world of high energy physicists*. Cambridge. Harvard University Press.