RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 1998

En 1998, nous célébrons la 25ème édition du Rallye Mathématique d'Alsace. Cette compétition est la plus ancienne de ce type en France. Directement inspirée des Olympiades Internationales et créée par Monsieur le Professeur Glaeser, son succès ne s'est pas démenti depuis 1973.

Elle a réuni cette année 1160 candidats. La participation est très légèrement inférieure à celle de l'année précédente. Les élèves de Première ont composé le 18 mars et ceux de Terminale le 25 mars.

En Première, 14 binômes sont primés, dont 5 premiers prix et 9 seconds. Les candidats ont dans l'ensemble été très inspirés par les exercices proposés, mais beaucoup d'entre eux conduisent mal leur raisonnement et arrivent à des conclusions non démontrées. Les premiers prix sont décernés aux candidats qui ont résolu parfaitement deux problèmes et presque complètement le troisième. Pour les seconds prix, nous avons sélectionné des copies qui proposent une solution excellente de deux exercices et un début rigoureux du troisième.

En Terminale, 16 binômes se voient récompensés. Les 6 premiers prix reviennent aux élèves qui ont proposé de bonnes solutions à deux exercices et des idées très intéressantes sur le troisième. Pour les 4 seconds prix et les 5 troisièmes prix, nous avons retenu des copies qui développent toutes - sans toujours aboutir à une conclusion - des raisonnements bien formalisés sur les trois problèmes. Un prix spécial récompense deux candidats ayant proposé une excellente résolution du sujet sur les soldats.

Corrigé des Epreuves de Terminale

Sujet 1 :

Est-il possible de trouver quatre nombres réels tels que, pris deux à deux, leurs sommes soient égales à 3 , 4 , 4 , 5 , 6 , 8 ?

Sujet 2 :

Déterminer le dernier chiffre du plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{10^{1998}}{10^{54}-7}$

Sujet 3 :

1998 soldats sont alignés côte à côte face à leur général. Celui-ci leur donne l'ordre d'effectuer un quart de tour vers la gauche. Certains obéissent, les autres tournent d'un quart de tour vers la droite.

Ensuite s'effectue à chaque seconde le processus suivant : ceux qui se retrouvent face à face tournent d'un demi tour ; les autres restent immobiles.

Montrer qu'il arrive un moment où tous restent immobiles.

Sujet 1

Notons a, b, c et d les quatre réels cherchés. On peut supposer que $a \leq b \leq c \leq d$. On a donc $a + b = 3$ (la plus petite somme) et $c + d = 8$ (la plus grande somme). Ainsi $a + b + c + d = 11$. L'une des sommes proposées vaut 4, donc il existe deux réels dont la somme vaut $11 - 4 = 7$, qui ne figure pas dans la liste. Finalement on conclut que quatre tels réels ne peuvent exister.

Sujet 2

Nous avons $\dfrac{10^{1998}}{10^{54} - 7} = \dfrac{\lambda^{37}}{\lambda - 7}$, avec $\lambda = 10^{54}$. De plus

$$\frac{\lambda^{37}}{\lambda - 7} = \lambda^{36} \cdot \frac{1}{1 - \frac{7}{\lambda}} = \lambda^{36}\left(\sum_{k=0}^{36}(\frac{7}{\lambda})^k + \frac{(\frac{7}{\lambda})^{37}}{1 - \frac{7}{\lambda}}\right) = \sum_{k=0}^{35} 7^k \lambda^{36-k} + 7^{36} + \frac{7^{37}}{\lambda - 7}.$$

Remarquons qu'alors $0 < \dfrac{7^{37}}{\lambda - 7} < \dfrac{7^{37}}{10^{37}} < 1$ et, pour tout entier k entre 0 et 35, l'entier $7^k \lambda^{36-k}$ est strictement positif et multiple de 10. Le chiffre cherché est donc le chiffre des unités de 7^{36}. Le chiffre des unités de 7^4 étant 1, par périodicité, comme $9 \cdot 4 = 36$, on en déduit que 7^{36} se termine par 1.

Remarque : On a utilisé la formule utile suivante, valable pour tout n naturel et tout x complexe différent de 1:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Sujet 3

1) Remarquons d'abord que si les p premiers soldats sont tournés vers la droite et le $p + 1^{ième}$ vers la gauche, alors à la seconde suivante les $p - 1$ premiers soldats sont tournés vers la droite et le $p^{ième}$ vers la gauche :

$$\underbrace{\longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow}_{p \text{ soldats}} \quad \longleftarrow \quad \cdots$$

$$\text{(1 seconde après)} \qquad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \cdots$$

En appliquant ce raisonnement p fois, on en déduit que, partant de la situation précédente, le premier soldat regarde vers la gauche après p secondes.
2) Ajoutons que, si le premier soldat regarde vers la gauche, il reste définitivement immobile.
3) Montrons par récurrence, sur le nombre n de soldats, qu'il arrive un moment où tous les soldats sont immobiles.

Cas $n = 2$. Il y a quatre situations possibles

$$\begin{array}{cc} \longrightarrow & \longrightarrow \\ \longleftarrow & \longleftarrow \\ \longleftarrow & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \longleftarrow \end{array}$$

Les trois premières sont stables et la dernière $\longrightarrow \quad \longleftarrow$ se transforme au bout d'une seconde l'avant-dernière $\longleftarrow \quad \longrightarrow$.

Hypothèse de récurrence au rang n. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et supposons le résultat vrai au rang n.

Démonstration au rang $n+1$.
- Premier cas : Tous les soldats regardent vers la droite. Le processus s'arrête.
- Deuxième cas : Le premier soldat regarde vers la gauche. Il reste donc immobile et ne se retrouve par conséquent plus jamais face à un autre soldat et n'intervient plus dans le processus. On applique alors l'hypothèse de récurrence aux n soldats suivants. Le processus s'arrête.
- Troisième cas : Le premier soldat regarde vers la droite et il existe un soldat qui regarde vers la gauche. Soit p le numéro du premier soldat regardant vers la gauche. D'après la remarque préalable 1, le premier soldat regardera au bout de p secondes vers la gauche. On est ramené au deuxième cas. Le processus s'arrête.

Corrigé des Epreuves de Première

Sujet 1 :

Depuis trois jours, Roméo attend Juliette au terminus du Tram de Vérone. La première fois, il a attendu 12 minutes et a vu arriver 5 rames. Le lendemain, 20 minutes se sont écoulées et 6 rames sont arrivées. Le surlendemain, combien a-t-il vu de rames durant ses 30 minutes d'attente, sachant qu'elles arrivent à intervalles réguliers ?

Sujet 2 :

La société RMA 25 produit la calculatrice révolutionnaire GG1998. Très simple d'utilisation, elle n'effectue que deux opérations : la multiplication habituelle notée **.** et une mystérieuse opération *. Des tests approfondis ont montré que pour tout entier non nul a, on a :

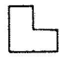
$$a*1 = a \quad \text{et} \quad a*a = 1.$$

Le mode d'emploi précise que si l'on prend quatre entiers naturels non nuls a, b, c et d, on a :

$$(a*b).(c*d) = (a.c)*(b.d)$$

où **.** désigne la multiplication habituelle. Quel est le résultat de $349650 * 7$?

Sujet 3 :

Le célèbre archéologue Émile Jones a découvert un coffret contenant 208 triminos  identiques, un unique monomino □ et le message suivant :

Celui qui avec toutes ces pièces
Un carré construira
De la main de la Déesse
Sacré géomètre sera.
Sinon rongé par la tristesse
Viticulteur deviendra
Et chaque jour à la Déesse
Du vin d'Alsace offrira.

Émile Jones peut-il devenir géomètre ?

Sujet 1

Soit t l'intervalle de temps séparant deux rames et t' le temps qui s'écoule entre l'arrivée de Roméo et celle de la première rame. On a alors $0 \leq t' < t$. Soit t'' le temps qui sépare le départ de la dernière rame du départ de Roméo, alors $0 \leq t'' < t$. Le premier jour, Roméo reste 12 minutes et voit passer 5 rames, donc $t' + 4t + t'' = 12$ et

$$4t \leq 12 < 6t.$$

Avec un raisonnement analogue pour le deuxième jour, on obtient

$$5t \leq 20 < 7t.$$

On déduit de ces deux résultats les inégalités

$$\frac{20}{7} < t \leq 3.$$

Le troisième jour, Roméo attend 30 minutes. Notons r le nombre de rames qu'il voit passer. On a alors, de la même manière que précédemment

$$(r-1)t \leq 30 < (r+1)t,$$

ce qui équivaut à $r \leq \frac{30}{t} + 1$ et $r > \frac{30}{t} - 1$. Or $t > \frac{20}{7}$, donc $r < 11.5$ et $t \leq 3$, donc $r > 9$. Finalement

$$9 < r < 11.5$$

et donc $r = 10$ ou 11.

On peut rapidement vérifier qu'avec $t = 3$ minutes, les deux cas sont possibles selon que Roméo arrive en même temps qu'une rame ou juste après qu'elle soit partie.

Commentaires :

- Il fallait justifier que les deux valeurs trouvées correspondaient bien à des situations réalisables.
- On relève de nombreuses confusions entre inégalités strictes et larges.
- Il n'y avait pas lieu de multiplier le nombre des inconnues.

Sujet 2

En utilisant les propriétés de l'opération $*$ indiquées, on obtient :

$$349650 * 7 = (49950 \cdot 7) * (1 \cdot 7) = (49950 * 1) \cdot (7 * 7) = 49950 \cdot 1 = 49950 = 25 \cdot 1998.$$

Commentaires :

- On peut remarquer que l'opération $*$ est la division usuelle : en effet,

$$b \cdot (a * b) = (b * 1) \cdot (a * b) = (b \cdot a) * (1 \cdot b) = (a \cdot b) * (1 \cdot b) = (a * 1) \cdot (b * b) = a \cdot 1 = a$$

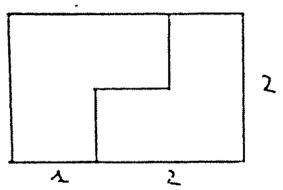
et donc, b étant non nul, $a * b = \frac{a}{b}$.

- Beaucoup d'élèves ont remarqué que la division vérifiait les propriétés de l'opération $*$ et en ont hâtivement déduit que $*$ était alors forcément la division.
- Certains élèves ont utilisé l'opération $*$ avec des nombres décimaux, alors que l'énoncé imposait des entiers non nuls.

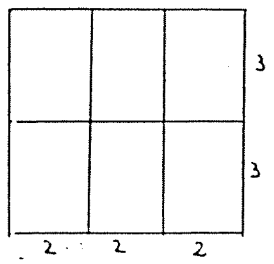
Sujet 3

Si la construction est possible, alors le carré est recouvert par $3 \times 208 + 1 = 625$ monominos, donc c'est un carré 25×25. Montrons que l'on peut effectivement recouvrir le carré comme demandé.

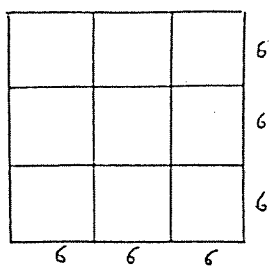
1) On peut faire un rectangle 2×3 avec 2 triminos :



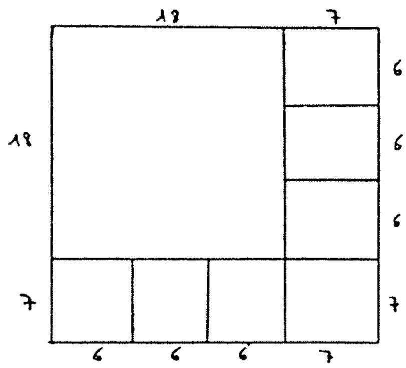
2) On peut faire un carré 6×6 avec 6 de ces rectangles :



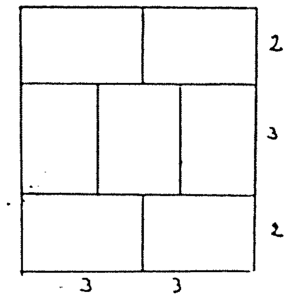
3) On peut faire un carré $6 \cdot 3 \times 6 \cdot 3$ avec 9 carrés 6×6 précédents :



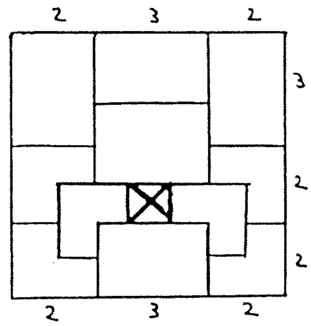
4) On recouvre un carré 25×25 de la manière suivante :



Les rectangles 6×7 sont recouverts avec 7 rectangles de type 1 comme suit :



Le carré 7×7 restant est obtenu ainsi :



Ainsi, on utilise exactement 208 triminos et 1 monomino. Emile Jones peut donc devenir géomètre.

Commentaires :

- De manière analogue , on peut aisément prouver qu'un carré $n \times n$ (avec n entier naturel non nul) peut être recouvert avec des triminos et un unique monomino si et seulement si n n'est pas multiple de 3. Il suffit d'examiner les différents cas $n = 6k + 1$, $n = 6k + 2$, $n = 6k + 4$ et $n = 6k + 5$.
- Dans un problème de ce type, un brouillon représentant (peut-être) un pavage possible, charge au correcteur de dénombrer lui-même les monomino et triminos, n'est pas une solution acceptable. Une fois un pavage trouvé, il s'agit d'exposer rigoureusement la démarche utilisée pour arriver au résultat.
- Le problème admet un grand nombre de solutions, plus ou moins astucieuses.