

A VOS STYLOS

PROBLÈME 50

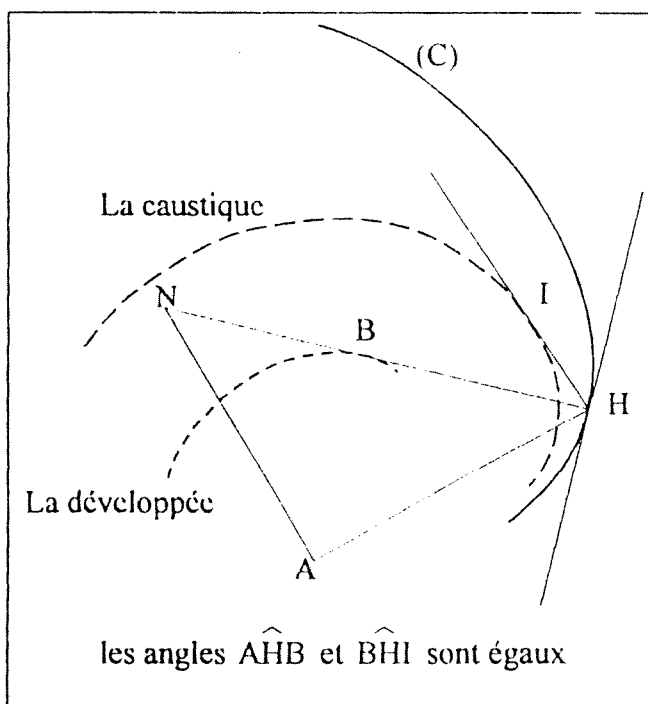
Énoncé (proposé par A. Stoll, IREM de Strasbourg) :

Données :

- Une courbe plane (C) “suffisamment régulière”
- un point A dans le plan de la courbe (C)

Notations : (cf. figure)

- H un point de la courbe (C)
- B désigne le centre de courbure correspondant à H
- N le point de la normale à (C) en H tel que (AN) soit perpendiculaire à (AH)
- I est le point de la caustique issue de A



Montrer que :

$$\frac{|2HN - HB|}{HB} = \frac{HA}{HI}$$

Applications :

1. En déduire une construction géométrique du centre de courbure d'une parabole en un point quelconque.
2. Montrer que la caustique d'une spirale logarithmique par rapport à son centre est une spirale logarithmique identique.
3. Trouver d'autres applications de la formule ci-dessus.

Etat de ce problème :

Nous avons reçu deux solutions, l'une de Marguerite Ponchaux et l'autre de Pierre Renfer, et André Stoll nous en prépare une synthèse pour notre prochain numéro.

PROBLÈME 51

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Démontrer l'identité

$$\operatorname{tg} x = \frac{x - \frac{1.3.5}{1.2.3} \frac{x^3}{3!} + \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5} \frac{x^5}{5!} - \dots}{1 - \frac{1.3}{1.2} \frac{x^2}{2!} + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4} \frac{x^4}{4!} - \dots}$$

2°) Généraliser l'identité précédente au quotient

$$\frac{x - \frac{a(a+2)(a+4)}{a(a+1)(a+2)} \frac{x^3}{3!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)} \frac{x^5}{5!} - \dots}{1 - \frac{a(a+2)}{a(a+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)}{a(a+1)(a+2)(a+3)} \frac{x^4}{4!} - \dots}$$

Indication (par P. Renfer) :

On montre d'abord que la fonction $f(z)$ définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+2)(a+4) \cdots (a+2n-2)}{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n)} \frac{z^n}{n!}$$

est entière, car son rayon de convergence est infini.

On pose $g(z) = e^{-z} f(z)$; on montre que g est solution de l'équation différentielle

$$zg''(z) + ag'(z) - zg(z) = 0,$$

puis que c'est une fonction paire, enfin que pour x réel, $g(ix)$ est réel. On en déduit l'expression en fonction de g du numérateur et du dénominateur de la fraction donnée dans l'énoncé du problème, ce qui conduit au résultat.

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1, D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de $(D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2)$, puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de $(D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3)$.

Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

PROBLÈME 53

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des 2-mélanges réguliers (pour la définition d'un 2-mélange, voir l'article sur les tours de cartes dans le numéro 90 de l'Ouvert).

1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.

2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.

PROBLÈME 54

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Montrer que si x, y et z sont des entiers impairs, la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier congru à 3 modulo 8.

2°) Soit n un entier congru à 3 modulo 8. Montrer, si possible par une bijection, que le nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = n$$

est égal au nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$(2) \quad xy + yz + zx = n.$$

Exemple. — $n=35$. L'équation (1) possède six solutions : $(1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 1, 3)$ et $(5, 3, 1)$; l'équation (2) possède également six solutions : $(1, 5, 5), (5, 1, 5), (5, 5, 1), (1, 1, 17), (1, 17, 1)$ et $(17, 1, 1)$.