A VOS STYLOS

PROBLEME NUMERO 50 : commentaires historiques et solution des lecteurs

par A. STOLL (IREM de Strasbourg)

1. Rappel de l'énoncé

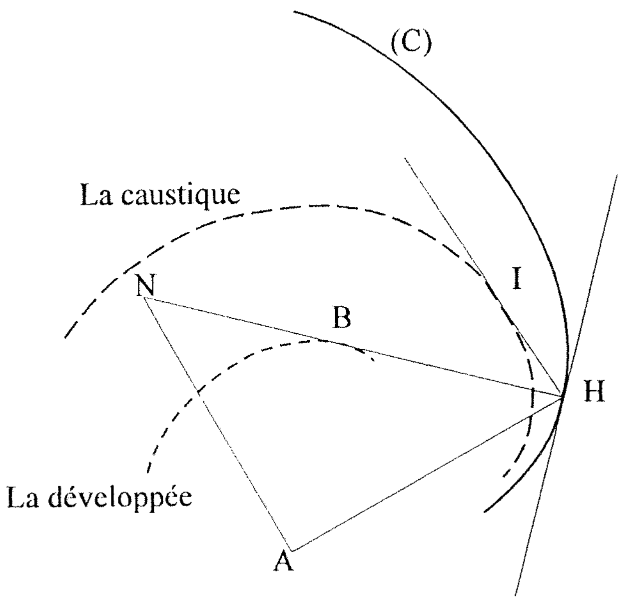
Données :

- Une courbe plane (C) "suffisamment régulière"
- Un point A dans le plan de la courbe (C)

Notations : (voir figure 1)

- H un point de la courbe (C)
- B désigne le centre de courbure correspondant à H
- N le point de la normale à (C) en H tel que (AN) soit perpendiculaire à (AH)
- I est le point de la caustique issue de A

figure 1



les angles $\widehat{AHB}$ et $\widehat{BHI}$ sont égaux

Montrer que :

$$\boxed{\frac{|2HN - HB|}{HB} = \frac{HA}{HI}}$$

Applications :

1. En déduire une construction géométrique du centre de courbure d'une parabole en un point quelconque.
2. Montrer que la caustique d'une spirale logarithmique par rapport à son centre est une spirale logarithmique identique.
3. Trouver d'autres applications de la formule ci-dessus.

2. Quelques commentaires.

Ce problème m'a été inspiré par la lecture du chapitre XLIX de "Acta eruditorum" de Jacob Bernoulli (1692)[1]. Ce chapitre s'intitule :

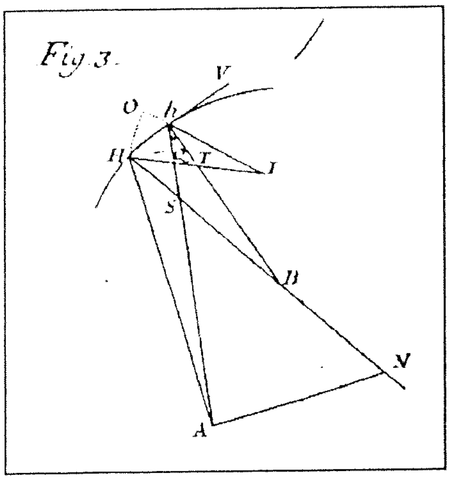
LIGNES CYCLOÏDALES,
DEVELOPPEES, ANTI-DEVELOPPEES, CAUSTIQUES, ANTI-CAUSTIQUES, PERI-CAUSTIQUES.

De leur usage et de leur simple relation mutuelle.
La spirale admirable. Et autres spirales.

Voici quelques extraits de ce texte :

La cycloïde mécanique (qui naît de la révolution d'un cercle sur une ligne droite) est communément connue depuis déjà un siècle. La cycloïde géométrique, qui naît de la rotation d'un cercle sur un autre cercle a commencé d'abord à être étudiée par les très illustres TSCHIRNHAUS et NEWTON. Nous avons connaissance des cycloïdes développées, grâce à l'illustre HUYGENS. De même on reconnaît comme auteur des premières études des cycloïdes caustiques le très noble TSCHIRNHAUS.

[...] il n'existe personne qui se soit intéressé aux dépendances et à la relation mutuelle entre les courbes développées et les caustiques. Il y a quelques jours, alors que je m'appliquais un peu plus attentivement encore à l'étude de la découverte de Tschirnhausius, je l'ai découverte et à cause de l'efficacité de cette chose et de son utilité j'ai pensé qu'il convenait de la rendre publique [...]



Le plus remarquable de ce que j'ai décidé d'exposer concerne la relation de beaucoup la plus simple entre les Caustiques et les Développées que je détermine comme suit : Si en un point rayonnant A on trace une perpendiculaire AN au rayon incident AH, perpendiculaire coupant le rayon du cercle osculateur HB (prolongé s'il le faut) en N, nous aurons 2HN -HB sur HB, comme AH sur HI. Le point I sera sur la caustique issue de A.

(Pour les notations, voir la figure ci-contre de J. Bernoulli, la figure 1 ou la figure 2)

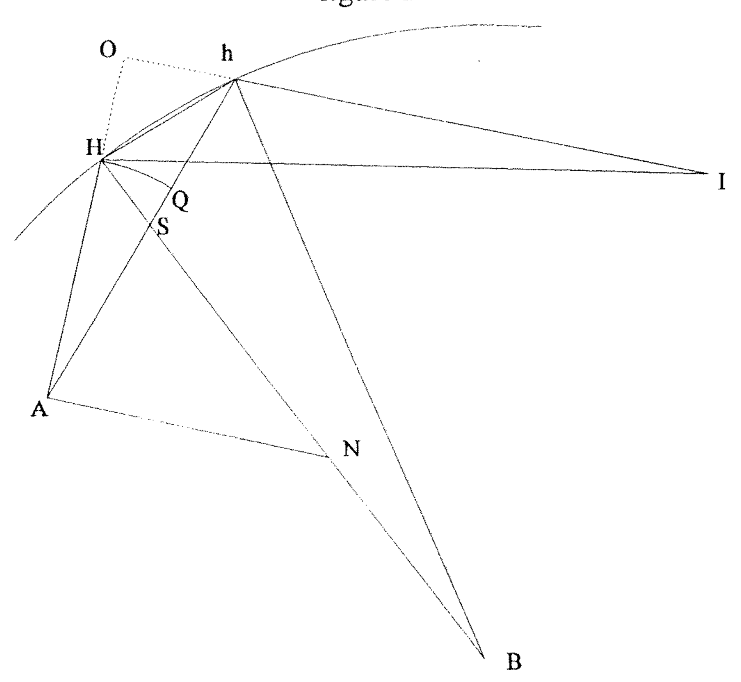
J. Bernoulli démontre cette proposition de la manière suivante :

[1] Traduit du latin par M. Buffard et A. Stoll

Soient H, h *(Fig.3)* [deux] *points très voisins de la courbe développante ;* HB, hB *sont des rayons du cercle osculateur qui a généré la courbe* Hh ; AH, Ah *sont des rayons incidents ;* HI, hi *des rayons réfléchis. La somme des angles* AHB *et* HAh *est égale à l'angle* ASB, *qui est égal à la somme des angles* AhB, hBH. *Donc la somme des angles* AHB, HAh *est égale à la somme des angles* AhB, hBH *; et donc la différence entre les angles* AHB, AhB, *est égale à la différence entre les angles* A *et* B. *Pareillement l'angle* BTI *est égal à la somme des angles* BHI, HBh, *comme à la somme de* BhI, HIh. *Ces sommes sont égales et donc la différence entre les angles* BHI *et* BhI *est égale à la différence entre les angles* B *et* I. *Mais par la loi de la réflexion, on peut dire que les angles* AHB, AhB *sont égaux aux angles* BHI, BhI *car la différence entre eux est égale. C'est pourquoi la différence entre les angles* A *et* B *est égale à la différence entre les angles* B *et* I. B *est en conséquence la moyenne arithmétique des angles* A *et* I, *et le double de l'angle* B *est égal à la somme des angles* A et I. *Les mesures des angles* A, I, B *sont les arcs* HQ, HO, Hh *(décrits par* H, *de centres* A, I, B*), divisés par leurs rayons respectifs,* HA, HI, HB. *Mais (comme* HhO = IhV = HhQ, *car* O *et* Q *sont droits par l'hypothénuse commune* Hh*) les triangles* HOh, HQh *sont égaux et* HO= HQ. *De même le triangle* hHQ *et le triangle* HAN *à cause des angles droits* Q *et* A *ayant des angles égaux* hHQ *et* AHN *(l'un et l'autre en effet font un droit avec l'angle* QHS*) sont des triangles semblables de sorte que* HA :HN = HQ :Hh *d'où* $Hh = \frac{HN}{HA} HQ$. *Les mesures des angles* A, I, B, *sont donc* HQ, HQ, $\frac{HN}{HA} HQ$ *ou bien* HA, HA, HN *divisés par les rayons* HA, HI, HB. *C'est pourquoi puisque* A+I =2B *ou bien* I = 2B- A *nous aurons* $\frac{HA}{HI} = \frac{2HN}{HB} - \frac{HA}{HA}$ *ou bien encore (en multipliant par* HB.HI) HA.HB = 2HN.HI - HB HI *laquelle équation résolue par l'analogie donne :* 2HN - HB sur HB *comme* HA sur HI.

Dans cette démonstration, nous pouvons apprécier la façon dont J. Bernoulli manipule "les infiniment petits". Pour le lecteur qui n'aurait pas l'habitude de lire des textes anciens, voici quelques commentaires qui peuvent l'aider à comprendre cette démonstration.

figure 2



Dans un premier temps, J. Bernoulli identifie la portion de courbe voisine du point H avec l'arc de cercle osculateur, c'est-à-dire le cercle de centre B et de rayon BH. Il identifie également les points I et i avec le point d'intersection des deux rayons réfléchis en H et h. (Rappelons que les points I et i sont les points de contact des rayons réfléchis en H et h avec la caustique).

Il démontre ensuite que la différence des angles $\hat{B} = h\hat{B}H$ et $\hat{A} = h\hat{A}H$ est égale à la différence des angles $A\hat{H}B$ et $A\hat{h}B$:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AHB}+\widehat{HAh}=\widehat{ASB}\\ \widehat{AhB}+\widehat{hBH}=\widehat{ASB}\end{array}\right\} \quad \text{d'où : } \widehat{AHB}+\widehat{HAh}=\widehat{AhB}+\widehat{hBH}$$

De la même manière, il montre que la différence des angles $\hat{I}=\widehat{hIH}$ et $\hat{B}=\widehat{hBH}$ est égale à la différence des angles $\widehat{BHI}$ et $\widehat{BhI}$.

Par la loi de la réfraction de la lumière, on a les égalités d'angles suivantes :

$$\widehat{AHB}=\widehat{BHI} \quad \text{et} \quad \widehat{AhB}=\widehat{BhI}$$

De toutes ces égalités, J. Bernoulli déduit que : $2\hat{B}=\hat{A}+\hat{I}$.

Soit Q le point d'intersection de Ah avec le cercle de centre A passant par H, et O le point d'intersection de Ih avec le cercle de centre I passant par H; En identifiant l'arc et le segment du même nom et en exprimant l'angle en radians, on a :

$$\hat{A}=\frac{HQ}{HA} \quad , \quad \hat{I}=\frac{HO}{HI} \quad , \quad \hat{B}=\frac{Hh}{HB}$$

Comme les points h et H sont très voisins, (Hh) est tangente au cercle et par suite l'angle HhB est droit. De même, les angles HQh et HhB sont droits. J. Bernoulli en déduit l'égalité des deux triangles rectangles HOh et HQh.

En effet Hh est commun aux deux triangles et $\widehat{HhO}=1\,\text{droit}-\widehat{IhB}=1\,\text{droit}-\widehat{BhQ}=\widehat{HhQ}$.
De cette égalité découle l'égalité des deux côtés HO et HQ.

Comme Hh est perpendiculaire à HN et AH est perpendiculaire à HQ, les angles HhQ, QHS et AHN sont égaux. Par suite, les triangles rectangles HQh et HAN sont semblables et : $\frac{HQ}{HA}=\frac{Hh}{HN}$ ou encore : $Hh=HN\frac{HQ}{HA}$ et $\hat{B}=\frac{HN.HQ}{HA.HB}$

Finalement: $\frac{HQ}{HI}=\frac{HO}{HI}=\hat{I}=2\hat{B}-\hat{A}=\frac{2.HN.HQ}{HA.HB}-\frac{HQ}{HA}$

On multiplie par HA et on divise par HQ :

$$\frac{HA}{HI}=\frac{2.HN}{HB}-1 \quad \text{et} \quad \frac{2.HN-HB}{HB}=\frac{HA}{HI}$$

Dans la deuxième partie de son traité, J. Bernoulli applique le résultat ci-dessus à différentes courbes, dont la spirale logarithmique, Il montre entr'autres que la caustique de celle-ci est une spirale "*tout à fait identique*"

Suite à la découverte des nombreuses propriétés de cette courbe, J. Bernoulli la qualifie de "*Spirale Admirable*". Il souhaite que celle-ci soit gravée sur sa tombe avec l'épigraphe : "*Eadem numero mutata resurget*" c'est à dire : "Elle ressuscitera identique à elle-même ".[2]

3. La solution des lecteurs

Depuis J. Bernoulli, presque trois siècles se sont écoulés. Le calcul différentiel s'est structuré atteignant une maturité certaine.
Les deux lecteurs - Pierre RENFER 67540 Ostwald et Marguerite PONCHAUX 59000 Lille - qui nous ont envoyé la solution du problème ont évidemment utilisé cet outil. Tous deux travaillent dans le repère mobile de Frenet associé à la courbe.
Marguerite PONCHAUX choisit de paramétrer la courbe en coordonnées polaires. Pierre RENFER préfère conserver les vecteurs. Voici sa solution détaillée

1. Notations (voir figure 3)

On choisit A comme origine du repère orthonormé fixe $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On suppose la courbe paramètrée par une abscisse curviligne s .

Soit $\left(H, \vec{\tau}, \vec{\nu}\right)$ le repère mobile de Frenet.

Soit φ l'angle polaire de $\vec{\tau}$

Soit $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AH}}{AH}$ (c'est un vecteur directeur unitaire du rayon incident)

Soit θ l'angle polaire de $\vec{u}$.

Soit $\vec{w}$ le vecteur directeur unitaire du rayon réfléchi (HI) tel que :

$$\text{angle}\left(\vec{\tau}, \vec{w}\right) = \text{angle}\left(\vec{u}, \vec{\tau}\right)$$

Soient r=AH et λ tel que $\overrightarrow{HI} = \lambda \vec{w}$

soit ρ tel que $\overrightarrow{HB} = \rho \vec{\nu}$ ($\rho = \varepsilon\, HB$, où ε est le signe de la courbure algébrique)

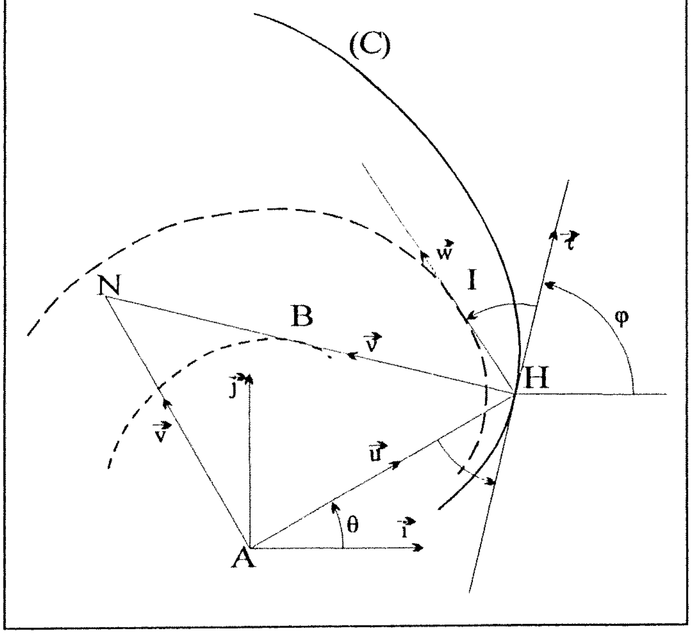


figure 3

2. Démonstration de la formule

Comme

$$\text{angle}\left(\vec{\tau}, \vec{w}\right) = \text{angle}\left(\vec{u}, \vec{\tau}\right) = \varphi - \theta$$

$$\vec{w} = \cos(\varphi - \theta)\,\vec{\tau} + \sin(\varphi - \theta)\,\vec{\nu}$$

et :

$$\frac{d\vec{w}}{ds} = -\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{d\theta}{ds}\right)\sin(\varphi-\theta).\vec{\tau} + \frac{1}{\rho}\cos(\varphi-\theta).\vec{\nu} + \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{d\theta}{ds}\right)\cos(\varphi-\theta).\vec{\nu} - \frac{1}{\rho}\sin(\varphi-\theta).\vec{\tau}$$

$$= \left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{2}{\rho}\right)\sin(\varphi-\theta).\vec{\tau} + \left(\frac{2}{\rho} - \frac{d\theta}{ds}\right)\cos(\varphi-\theta).\vec{\nu}$$

$$I = H + \lambda\vec{w}\text{, donc } \frac{\overrightarrow{dI}}{ds} = \vec{\tau} + \frac{d\lambda}{ds}.\vec{w} + \lambda.\frac{d\vec{w}}{ds}$$

La colinéarité de $\dfrac{\overrightarrow{dI}}{ds}$ et $\vec{w}$ s'exprime par la nullité du déterminant suivant :

[2] Le lecteur curieux pourra voir la pierre tombale de J. Bernoulli en la cathédrale de Bâle Il y trouvera effectivement une spirale. Mais celle-ci n'est pas logarithmique mais d'Archimède.

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{2}{\rho}\right)\sin(\varphi-\theta) & \cos(\varphi-\theta) \\ -\lambda\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{2}{\rho}\right)\cos(\varphi-\theta) & \sin(\varphi-\theta) \end{vmatrix} = \lambda\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{2}{\rho}\right)+\sin(\varphi-\theta)=0 \qquad (1)$$

On peut choisir l'abscisse curviligne s dans le sens des θ croissants.

Alors : $\alpha = \text{angle}\left(\vec{\nu},\vec{u}\right) = \text{angle}\left(\vec{\nu},\vec{\tau}\right)+\text{angle}\left(\vec{\tau},\vec{u}\right) - \frac{\pi}{2}-(\varphi-\theta)$

Et : $HA = HN.|\cos\alpha| = HN.\sin(\varphi-\theta)$

D'autre part : $\vec{AH} = r\,\vec{u}$

Et : $\frac{d\vec{H}}{ds} = \frac{dr}{ds}.\vec{u}+r.\frac{d\theta}{ds}.\frac{d\vec{u}}{ds} = \vec{\tau} = \cos(\varphi-\theta)\,\vec{u}+\sin(\varphi-\theta)\,\frac{d\vec{u}}{ds}$

Donc : $r.\frac{d\theta}{ds} = \sin(\varphi-\theta)$

Dans la formule (1), on remplace $\sin(\varphi-\theta)$ par $\frac{HA}{HN}$ et $\frac{d\theta}{ds}$ par $\frac{1}{HN}$.

On obtient alors : $\frac{2.HN-\rho}{\rho} = \frac{HA}{\lambda}$ (2)

En égalant les valeurs absolues des deux membres , on trouve :

$$\frac{|2HN-\varepsilon HB|}{HB} = \frac{HA}{HI}$$

La formule de l'énoncé n'est vraie que si la courbure est positive.

Si la courbure est négative, on obtient :

$$\frac{2HN+HB}{HB} = \frac{HA}{HI}$$

3. Application à la parabole (figure 4)

On choisit A = F , où F est le foyer de la parabole.

La propriété optique classique de la parabole montre que le point I est le point à l'infini sur l'axe de la parabole

La courbure est positive.

La formule donne donc :

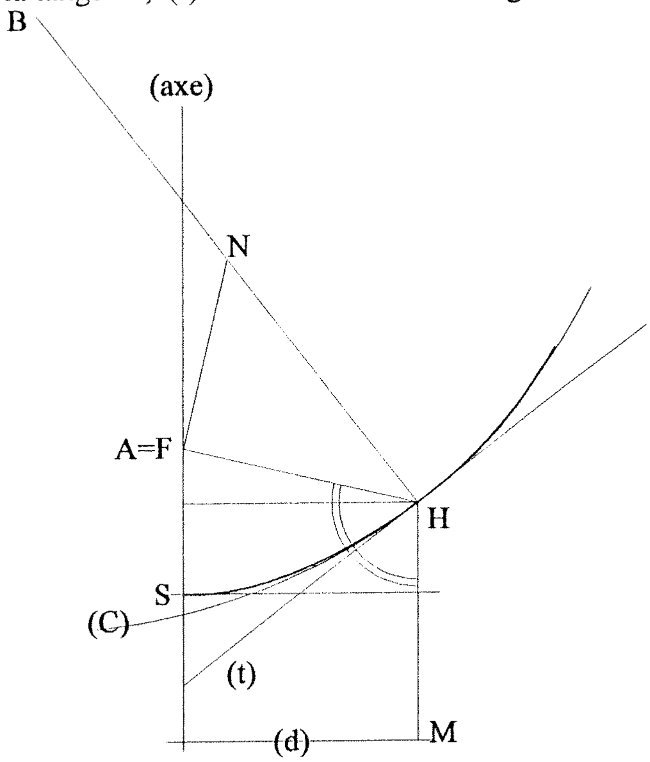
$$2HN - HB = 0$$

La construction de la normale en H à la parabole est classique.

On place facilement le point N et on construit B tel que HB=2HN

figure 4

(d) la directrice , (C) le cercle osculateur en H, (t) la tangente,: (t) est la bissectrice de l'angle FHM.



4. Application à l'ellipse (figure 5)

On choisit A=F , où F est l'un des foyers de l'ellipse, de demi-grand axe a.

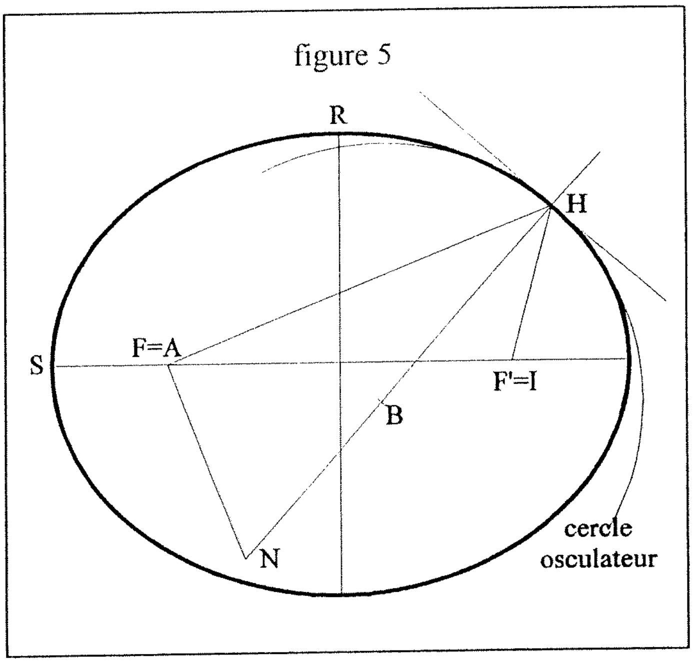
La propriété optique classique de l'ellipse montre que le point I est alors le deuxième foyer F'.
Les nombres ρ et λ sont positifs.
La formule (2) donne alors :

$$\frac{2HN - HB}{HB} = \frac{HF}{HF'}$$

et :

$$HB = \frac{2.HN.HF'}{HF + HF'} = \frac{HN.HF'}{a}$$

On peut ainsi construire le centre de courbure B.



5. Application à l'hyperbole

On choisit A = F , où F est l'un des foyers de l'hyperbole, de grand axe a. La propriété optique classique de l'hyperbole montre que le point I est alors le deuxième foyer F'.
Si H appartient à la branche d'hyperbole proche de F, alors $\rho>0$ et $\lambda<0$.
La formule (2) donne alors : $\dfrac{HB - 2HN}{HB} = \dfrac{HF}{HF'}$ et $HB = \dfrac{2.HN.HF'}{HF - HF'} = \dfrac{HN.HF'}{a}$
Si H appartient à l'autre branche d'hyperbole, alors $\rho<0$ et $\lambda<0$.
La formule (2) donne alors : $\dfrac{HB + 2HN}{HB} = \dfrac{HF}{HF'}$ et $HB = \dfrac{2.HN.HF'}{HF - HF'} = \dfrac{HN.HF'}{a}$
On peut ainsi construire le centre de courbure B.

6. Application à la spirale logarithmique.
L'application de la formule de J. Bernoulli à la spirale logarithmique donne $\dfrac{HA}{HI} = 1$. Par suite, I est le symétrique de A par rapport à la normale (HB).
On en déduit facilement que la caustique est une spirale logarithmique identique.

7. Deux applications au cercle.

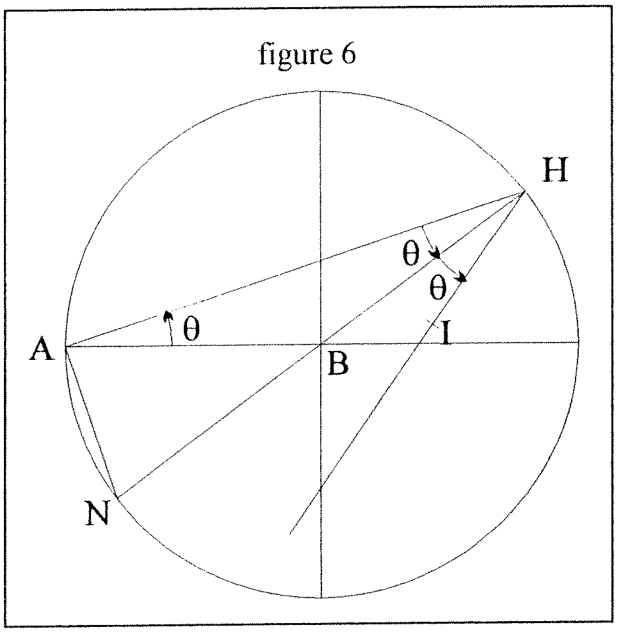
7a. Pierre RENFER étudie la caustique d'un cercle, issue d'un point du cercle. (figure 6)

Soit (C) un cercle et A un point de ce cercle.

Le point B est le centre du cercle. Le point N est diamétralement opposé à H, sur le cercle.

La formule de J. Bernoulli donne :

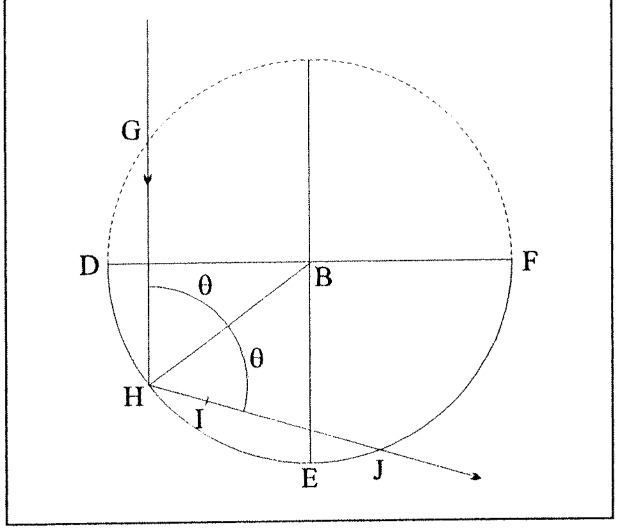
$$\frac{HA}{HI} = \frac{2HN - HB}{HB} = 3$$



La relation $HI = \frac{1}{3}HA$ permet une construction point par point de la caustique (figure 9).

7b. <u>Marguerite PONCHAUX étudie la caustique d'un demi-cercle, issue d'un point à l'infini. (figures 7 et 8)</u>

figure 7



Supposons que la courbe (C) soit un demi-cercle (DEF) (E milieu de l'arc DF) de centre B.
Prenons pour A le point à l'infini dans la direction de la demi-droite [EB).Soit H le point où une droite parallèle à [EB] rencontre le demi-cercle. On notera G le deuxième point où cette droite coupe le cercle (C). Le rayon réfléchi en H coupe le cercle (C) en J, symétrique de G par rapport au diamètre (BH)

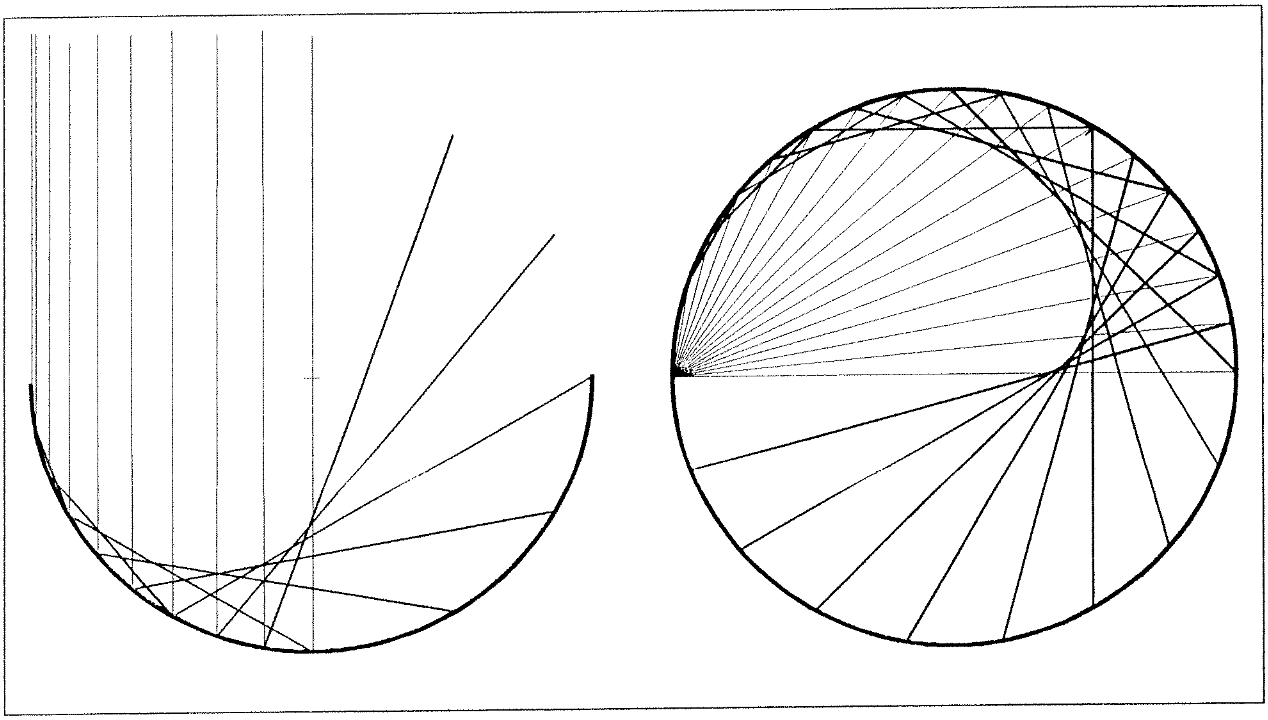
Ecrivons la formule de J. Bernoulli sous la forme : $\frac{HB}{HI} = \left|2\frac{HN}{HA} - \frac{HB}{HA}\right|$

avec : $\frac{HB}{HA} = 0$ et $\frac{HA}{HN} = \cos(A\hat{H}B) = \frac{\frac{1}{2}HJ}{HB}$.

De sorte que : $HI = \frac{1}{4}HJ$.

Cette relation permet une construction de la caustique d'un demi-cercle, issue d'un point à l'infini; (On reconnaîtra une demi-néphroïde).

figure 8 et figure 9



PROBLÈME 51

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Démontrer l'identité

$$tg\,x = \frac{x - \dfrac{1.3.5}{1.2.3}\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5}\dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{1.3}{1.2}\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

2°) Généraliser l'identité précédente au quotient

$$\frac{x - \dfrac{a(a+2)(a+4)}{a(a+1)(a+2)}\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}\dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{a(a+2)}{a(a+1)}\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{a(a+2)(a+4)(a+6)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}\dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Indication (par P. Renfer) :

On montre d'abord que la fonction $f(z)$ définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+2)(a+4)\cdots(a+2n-2)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\frac{z^n}{n!}$$

est entière, car son rayon de convergence est infini.
On pose $g(z) = e^{-z}f(z)$; on montre que g est solution de l'équation différentielle

$$zg''(z) + ag'(z) - zg(z) = 0,$$

puis que c'est une fonction paire, enfin que pour x réel, $g(ix)$ est réel. On en déduit l'expression en fonction de g du numérateur et du dénominateur de la fraction donnée dans l'énoncé du problème, ce qui conduit au résultat.

PROBLÈME 52

Énoncé (proposé par Morley et Petersen) :

Soient trois droites D_1,D_2, D_3 dans l'espace, supposées non parallèles à un même plan et deux à deux non sécantes. Soient P_1, P_2, P_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_2, D_3), (D_3, D_1), (D_1, D_2), puis U_1, U_2, U_3 les perpendiculaires communes resp. de (D_1, P_1), (D_2, P_2), (D_3, P_3).
Montrer que les trois droites U_1, U_2, U_3 rencontrent à angle droit une dixième droite Z (qui est donc leur "commune perpendiculaire commune" quand on les prend deux à deux).

PROBLÈME 53

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Sur un paquet de $2n$ cartes, on itère des 2−mélanges réguliers (pour la définition d'un 2−mélange, voir l'article sur les tours de cartes dans le numéro 90 de l'Ouvert).
1°) Montrer qu'après $2n$ itérations, on revient au paquet initial.
2°) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne revient pas au paquet initial *avant* (strictement) les $2n$ itérations.

PROBLÈME 54

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Montrer que si x, y et z sont des entiers impairs, la somme de leurs carrés $x^2 + y^2 + z^2$ est un entier congru à 3 modulo 8.
2°) Soit n un entier congru à 3 modulo 8. Montrer, si possible par une bijection, que le nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = n \tag{1}$$

est égal au nombre de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers impairs positifs qui sont solutions de l'équation

$$xy + yz + zx = n. \tag{2}$$

Exemple.— n=35. L'équation (1) possède six solutions : $(1,3,5)$, $(1,5,3)$, $(3,1,5)$, $(3,5,1)$, $(5,1,3)$ et $(5,3,1)$; l'équation (2) possède également six solutions : $(1,5,5)$, $(5,1,5)$, $(5,5,1)$, $(1,1,17)$, $(1,17,1)$ et $(17,1,1)$.