UN TRAVAIL INTERDISCIPLINAIRE EN FRANCAIS ET EN MATHEMATIQUES (SUITE)

Par le groupe math-français de l'IREM de Strasbourg :
D. Kremer, M. Vaillant, I. Beck, G. Didierjean, C. Dupuis, M.A. Egret, G. Robert, M. Ziegler.

Dans le n° 92 de septembre 1998 de L'Ouvert a été publiée la première partie de cet article, sans que, par erreur, la deuxième partie ne soit annoncée. Il s'agissait du premier aspect d'un travail interdisciplinaire en mathématiques et en français, concernant la compréhension de textes. La seconde partie de l'article, ci-dessous, propose des activités de raisonnement menées conjointement par un professeur de français et un professeur de mathématiques, à la suite du premier travail sur la compréhension de textes.

II. LE RAISONNEMENT

Le travail présenté, étendu sur plusieurs séances, s'est inscrit dans un travail plus général sur les démarches de raisonnement en français et en mathématiques. Avant d'aborder le raisonnement déductif en géométrie ou l'argumentation en français, il nous a paru utile de faire réfléchir les élèves sur l'activité qui consiste à tirer une conclusion et sur les questions que cela soulève.

Nous avons pris le parti de nous limiter, dans les séances communes aux deux matières, à travailler un pas de raisonnement. Pour cela, nous avons choisi comme outils un certain nombre de syllogismes. Ce travail sur les syllogismes permettra de sensibiliser les élèves à l'existence de tâches parallèles mais fondamentalement différentes dans une activité de raisonnement en mathématiques et en français.

Pour le raisonnement en mathématiques, nous avons pris le parti de ne présenter que le pas élémentaire de déduction, constitué des données, de l'énoncé-tiers — définition ou théorème ayant un statut théorique — et de la conclusion, qui résulte de l'application de l'énoncé-tiers aux données. Il permet aussi d'insister sur le statut théorique de l'énoncé-tiers en mathématiques qui donne à la conclusion son caractère de conclusion **obligatoire**.
Notre objectif premier a été de faire percevoir aux élèves ce qu'était un pas de raisonnement déductif et d'insister sur la différence entre « valide » et « vrai ».

En français en revanche, le but de l'argumentation est de convaincre l'interlocuteur ou le lecteur, c'est-à-dire de parvenir à ce que l'interlocuteur attache un degré de conviction suffisant à la conclusion. Mais la seule valeur de l'énoncé-tiers est la valeur de conviction que lui attachent les interlocuteurs et il peut à tout moment être réfuté et ne pas être accepté par l'interlocuteur ou le lecteur. La conclusion du pas d'argumentation n'a donc plus de caractère obligatoire. Le raisonnement repose essentiellement sur des contraintes de **pertinence**.

Les constituants d'un pas de déduction :

Un premier exemple est proposé :

> Dans un triangle ABC (dont je ne connais pas la taille) je sais que :
> $\hat{A} = 60°$ et $\hat{B} = 50°$
> Que puis-je affirmer ?
> Qu'est-ce qui me permet de l'affirmer ?

Il a été choisi comme illustration du pas de raisonnement déductif à cause de sa simplicité de formulation de la situation proposée, de son aspect de familiarité pour les élèves, dès la cinquième, en raison du caractère obligatoire de la conclusion qui s'impose très clairement aux élèves, et enfin de la règle utilisée (ou énoncé-tiers) qui a un statut théorique bien marqué et non susceptible d'être discuté. L'attention des élèves est attirée sur le statut différent de ces trois "constituants de base" d'un pas de raisonnement déductif :

—Les hypothèses : $\hat{A} = 60°$ et $\hat{B} = 50°$
—La règle générale : « Dans un triangle, la somme des trois angles vaut 180°».
—La conclusion obligatoire : $\hat{C} = 70°$

Validité et réciproque

On travaille sur l'exemple suivant :

> Règle : Si un élève est en 4^e C, alors il a M. Ixe en français.
> Donnée : Pierre a M. Ixe en français
> Conclusion : ?

Ici la règle générale n'a pas le statut de théorème : elle ne s'inscrit pas dans une théorie générale, c'est une règle d'expérience ; on pourrait tout aussi bien lui conférer le statut de donnée. En revanche, là encore, l'exemple proposé a été choisi parce qu'il est bien compris des élèves. Ceux-ci réfutent immédiatement la conclusion hâtive : « Pierre est en 4^e C » par un contre-exemple.

Les élèves ont spontanément créé les conditions permettant d'obtenir un raisonnement valide, soit en modifiant les données (« Pierre est en 4^e C »), soit en modifiant la règle générale (« M. Ixe n'a que les 4^e C en français ») ce qui revient à énoncer une règle générale réciproque de celle qui était proposée : « Si un élève a M. Ixe en français, alors il est en 4^e C »
La notion de validité d'un raisonnement a été particulièrement bien comprise : le passage des données à la conclusion ne peut se faire que si les conditions d'application de la règle générale sont remplies ; les élèves ont également bien saisi le caractère obligatoire de la conclusion.

Validité et vérité

Afin de permettre de distinguer les notions de validité et de vérité, on propose le troisième exemple suivant :

1. Strasbourg est en Lorraine.
2. Alain habite Strasbourg.
   Conclusion : ?

Celui-ci n'a pas posé de problème pour les élèves même si la conclusion unique qui s'est imposée était contraire à leur vécu. La situation d'inclusion était perçue par les élèves comme évidente. La conclusion qui s'impose : « Alain habite en Lorraine » est peut-être fausse, mais le raisonnement n'en est pas moins valide.

Le raisonnement déductif, tel qu'il apparaît dans cet exemple, est sensiblement le même que celui qui apparaît en mathématiques. Mais alors qu'en mathématiques on fait référence à une règle générale théorique (axiome, définition, théorème...), dans notre exemple on utilise la donnée « Strasbourg est en Lorraine »comme un postulat qui jouera le rôle d'énoncé-tiers.

Validité et inclusion

Exemple :

1. Donnée ou règle d'expérience : Tous les chats ont des griffes...
2. Donnée : Hamilcar a des griffes.
   Conclusion : Donc Hamilcar est un chat.

Pour cet exemple, les élèves, en majorité, n'ont pas rencontré de difficultés. Beaucoup ont donné un contre-exemple pour montrer la non-validité du raisonnement. Comme pour l'exemple précédent, la situation d'inclusion de l'ensemble des chats dans l'ensemble des animaux à griffes était parfaitement perçue.

Cas particulier du pas de déduction mathématique

1. Règle générale : Dans tout losange les diagonales sont perpendiculaires
2. Donnée : Le quadrilatère ABCD a ses diagonales perpendiculaires.
   Conclusion : Donc ABCD est un losange.

Dans cet exemple, les élèves étaient à nouveau confrontés à un pas de raisonnement en mathématiques.
On peut constater que cet exemple est très voisin du précédent (« Hamilcar ») et qu'il fonctionne comme ce dernier. Mais en mathématiques, la règle générale n'est pas une règle d'expérience.

Il faut remarquer que le niveau de difficulté était plus élevé que dans les exemples précédents où les données d'expérience permettaient de trouver immédiatement des contre-exemples, et de s'apercevoir ainsi de la non-validité du raisonnement. Or, ici, donner un contre-exemple nécessitait la mobilisation de connaissances sur le losange et ses propriétés, sur les notions de diagonales et de perpendiculaires.
La difficulté majeure pour les élèves a été de pouvoir transcrire la formulation de la règle générale en un formulation de type « si...alors ».
Pour beaucoup, ce n'est qu'après avoir réussi ce passage que la non-validité du raisonnement s'est imposée à eux et qu'ils ont compris que la donnée « le quadrilatère ABCD a ses diagonales perpendiculaires » ne permet pas de rendre la règle générale opératoire puisque ses conditions d'application n'étaient pas remplies.

Prolongements

Pour la séance suivante une fiche de travail du même type a été distribuée aux élèves.
Le but des exercices était de permettre un réinvestissement des acquisitions précédentes puis d'introduire de nouvelles raisons de non-validité.

Dire si les raisonnements suivants sont valides ou non en justifiant la réponse.

1. Deux nombres égaux ont des carrés égaux.
   Deux nombres x et y sont tels que $x^2 = y^2$.
   Donc $x = y$.

2. Tous les souverains régnants de l'ancienne Egypte portaient une barbe postiche.
   Or Hatchepsout fut reine d'Egypte.
   Donc Hatchepsout portait une barbe postiche.

3. Les cétacés sont des mammifères marins.
   L'orque s'attaque aux baleines.
   Donc l'orque est un cétacé.

4. L'auxiliaire « être » est toujours employé lorsque on met un verbe au passif.
   Or « il était venu » comporte l'auxiliaire « être ».
   Donc « il était venu » est un passif.

5. La mésange a des ailes.
   Un oiseau a des ailes.
   Donc la mésange est un oiseau.

6. Le yaourt est un médicament dangereux.
   Les médicaments dangereux sont en vente dans tous les supermarchés.
   Donc le yaourt est en vente dans tous les supermarchés.

Les élèves rencontrent des exercices où l'on joue sur la validité ou la non-validité du raisonnement, indépendamment du caractère “vrai ou faux ” de la règle générale, des données et de la conclusion.
Ainsi les raisonnements dans les exercices 2 et 6 sont valides. Mais dans le premier cas, où les trois propositions du pas de raisonnement sont vraies, les élèves montrent par leurs questions que s'ils perçoivent bien le caractère « obligatoire » de la conclusion (Hatchepsout portait une barbe postiche), ils restent interloqués par la nature de cette conclusion. Aussi s'interrogent-ils sur la donnée « une reine est-elle un souverain ? » et d'autre part « était-elle bien reine de l'ancienne Egypte ? », prouvant qu'ils testent l'ensemble des conditions d'application de la règle pour s'assurer qu'elles sont bien remplies.
En revanche dans l'exercice 6, le raisonnement est valide mais avec une règle générale et des données pour le moins “ farfelues” et défiant le vécu des élèves !
Les autres raisonnements ne sont pas valides, mais les situations sont très diverses :
– Les exercices 1 et 4 sont du même type : les deux données sont vraies mais on ne peut tirer aucune conclusion. Nous sommes dans les deux cas dans une situation où la règle logique est mal appliquée : dire que A est inclus dans B (deux nombres égaux ont des carrés égaux dans un cas et les verbes au passif sont conjugués avec *être* dans l'autre) ne veut pas dire que B est inclus dans A (“carrés égaux” n'implique pas forcément “nombres égaux”, et la présence de l'auxiliaire *être* n'implique pas nécessairement le passif). Nous avons la même erreur de raisonnement, l'une en grammaire et l'autre en mathématiques. Notons toutefois que la conclusion dans l'exercice 4 est fausse alors que celle de l'exercice 1 est indécidable.
– Pour l'exercice 5 nous avons une situation de deux ensembles A et B inclus dans un troisième (l'ensemble des oiseaux et l'ensemble des mésanges sont inclus dans l'ensemble des animaux à ailes), mais cela ne permet pas de d'affirmer que B est inclus dans A.
Dans cet exercice la règle générale, les données et la conclusion sont vraies, mais à l'aide d'un contre-exemple les élèves montrent que le caractère obligatoire de la conclusion n'est pas respecté (il existe d'autres animaux à ailes que les oiseaux). Là encore en l'absence de connaissances “extérieures” la conclusion est indécidable.
– Dans l'exercice 3 en revanche, la raison de non-validité est radicalement différente puisque la non-validité ne repose plus sur des relations entre des ensembles. La règle générale et les données sont encore vraies, mais les trois propositions n'ont aucun lien logique entre elles. Pour convaincre ses camarades une élève s'est contentée de déclarer : « je peux bien m'attaquer aux baleines et je ne suis pourtant pas un cétacé ! ». C'est donc de prime abord pour une question de non-pertinence des différentes propositions que le raisonnement ne peut pas être valide.

Ce travail a permis de consolider chez les élèves le sens de validité d'un raisonnement, indépendamment de leurs connaissances concernant la situation évoquée. Ils distinguent alors validité de vérité et comprennent que la validité ne dépend pas de la vérité. Par ailleurs ce travail a permis d'introduire de nouvelles raisons de non-validité, en particulier celle de la contrainte de pertinence des données.

Approfondissement

Une troisième séance a été consacrée de façon plus spécifique à un travail sur le pas de raisonnement déductif. En l'absence de l'un des trois éléments constituant un pas de raisonnement, les élèves doivent déterminer la proposition manquante qui permet, lorsque cela est possible, de rendre le raisonnement valide.
Ce travail s'est révélé particulièrement motivant pour les élèves, a donné lieu à des discussions animées dans la classe et est allé jusqu'à troubler la quiétude des familles qui se sont prises au jeu...
Par ailleurs en raison de son caractère plus ouvert (non-unicité de la réponse), il permet d'avantage à l'élève de s'impliquer dans cette tâche.
Enfin les exemples proposés permettent de faire prendre conscience aux élèves de l'importance de la quantification qui reste une difficulté importante dans l'apprentissage du raisonnement mathématique.

Compléter, lorsque cela est possible, les raisonnements suivants en les rendant valides ou bien expliquer pourquoi on ne peut pas les rendre valides.

1. a. ....
b. Or ce champignon est une amanite.
c. Donc il est mortel.

2. a. Parmi les champignons mortels se trouvent les amanites.
b. Or..
c. Donc c'est une amanite.

3. a. ....
b. Or Pierre a 17 ans et demi.
c. Donc Pierre a l'autorisation de conduire une automobile.

4. a. ....
b. Or ce champignon n'est pas mortel.
c. donc ce n'est pas un cortinaire orellanus

5. a. Tout quadrilatère....................................
b. Or (AC) et (BD) sont perpendiculaires, et le milieu de [AC] est aussi le milieu de [BD].
c. Donc le quadrilatère ABCD est un losange.

L'attention des élèves est attirée sur le fait qu'il n'est pas nécessaire de posséder des connaissances particulières sur les champignons pour pouvoir compléter les exercices 1 et 4. Une fois encore le raisonnement ne dépend pas du vécu de l'élève.
La règle générale « les amanites sont des champignons mortels » rend valide le raisonnement de l'exercice 1. En effet la donnée « ce champignon est une amanite » aboutissant à la conclusion obligatoire « ce champignon est mortel » ne pourra être réalisée que si l'amanite est caractérisée comme étant mortelle, même si ce n'est pas vrai dans la réalité, car les amanites comportent aussi des espèces comestibles voire savoureuses.

De même dans l'exercice 4 il est inutile de procéder à des recherches concernant le cortinaire orellanus, la question n'étant pas de connaître sa dangerosité réelle, mais uniquement de se rendre compte que la donnée « ce champignon n'est pas mortel » associée à la conclusion obligatoire « ce n'est pas un cortinaire orellanus » implique nécessairement d'associer le caractère « mortel » au cortinaire orellanus.
Pour l'exercice 5 on se retrouve dans le domaine des mathématiques et le théorème qu'il s'agit de retrouver est celui qui permet de caractériser un losange par ses diagonales.
Notons que là encore il n'est pas indispensable d'en avoir une connaissance préalable pour être en mesure de rendre le raisonnement valide.
Pour l'exercice 2 enfin il n'est pas possible de rendre valide le raisonnement. On peut ainsi vérifier que la notion de validité a été comprise.

Ouverture

Pour clore ce travail, et au cours d'une dernière séance, les quatre raisonnements suivants ont été proposés aux élèves :

Pour chaque raisonnement dire s'il est valide ou non en expliquant la réponse.

1e raisonnement:
a. s'il pleut alors je prends un parapluie
b. or il pleut
c. donc je prends un parapluie

2e raisonnement:
a. s'il pleut alors je prends un parapluie
b. or il ne pleut pas
c. donc je ne prends pas de parapluie

3e raisonnement:
a. s'il pleut alors je prends un parapluie
b. or je prends un parapluie
c. donc il pleut

4e raisonnement:
a. s'il pleut alors je prends un parapluie
b. or je ne prends pas de parapluie
c. donc il ne pleut pas

Plusieurs élèves ont remarqué que l'ordre des propositions n'était pas celui rencontré habituellement et que l'énoncé-tiers apparaissait en premier sous la forme "classique" en mathématiques : **si... alors...** Cette propriété générale peut encore se traduire par des expressions utilisant les mots **tout, tous les, toujours, chaque fois que.** La donnée était introduite par l'indicateur **or**, qui aurait pu être remplacé par **comme, puisque** *etc.*.

Les élèves ont eu peu de difficultés concernant les deux premiers raisonnements, et la référence au schéma de base du pas de déduction s'est assez facilement imposée pour apporter une justification concernant la validité ou la non-validité d'un raisonnement.

En revanche pour le troisième raisonnement, et surtout pour le quatrième, les discussions ont été animées ! Il faut dire que se cachait là un raisonnement par l'absurde et notre objectif n'était évidemment pas d'en faire une étude rigoureuse d'autant plus que ce type de raisonnement a été totalement banni de l'enseignement en collège. Pour autant, certains, probablement plus mûrs, ont pu par eux-mêmes arriver à être convaincus de la validité de ce raisonnement très particulier En effet la conclusion unique (il ne pleut pas) s'imposait puisque, s'il pleuvait...

CONCLUSION

Il nous semble que le travail proposé conjointement par un enseignant de français et un enseignant de mathématiques s'inscrit parfaitement dans une démarche commune visant à l'apprentissage du raisonnement au collège.

La complémentarité dans la façon d'aborder ce type de raisonnement par les enseignants des deux matières, dans des situations qui ne reposant pas, pour la plupart des exercices proposés, sur des théorèmes mathématiques, nous a paru particulièrement enrichissante et profitable pour les élèves. A l'issue de ce travail, les élèves paraissent prêts à aborder le raisonnement déductif en mathématiques et l'argumentation en français, et le travail spécifique à chacune des deux matières peut alors commencer.

En particulier en mathématiques il est important de souligner que la plupart des pas de déduction se distinguent du fonctionnement des syllogismes non seulement parce que la règle de passage a un statut théorique, ce qui a déjà été abordé, mais parce que le théorème a souvent plusieurs conditions d'entrée, ce qui n'est pas le cas pour les syllogismes.

Exemple : Données : (1) ABCD est un quadrilatère de centre O.
(2) O est le milieu de [AC]
(3) O est le milieu de [BD]
(4) (AC) est perpendiculaire à (BD)

Théorème : Dans un quadrilatère, si les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un losange.

Conclusion : ABCD est un losange

En français il conviendra de réfléchir plus avant sur les relations de pertinence entre argument et conclusion et sur la place de l'implicite.

Bien entendu on ne saurait oublier qu'argumentation et démonstration ne peuvent être réduites à un seul pas de raisonnement. Les façons (radicalement différentes) dont s'enchaînent et s'organisent les pas de raisonnement dans les deux disciplines doivent aussi être l'objet d'un apprentissage, ce qui dépasse les limites de cet article.

Mais notre expérience nous a prouvé que ce travail de départ permet de s'appuyer sur des bases plus claires et évite bien des erreurs et des confusions qui perturbent les apprentissages ultérieurs.