TOURS DE CARTES AVEC MÉLANGES RÉGULIERS

Dominique DUMONT

Deuxième partie : théorie et démonstrations

Dans une première partie de cet article, parue en mars dernier dans le numéro 90 de l'Ouvert, des tours de cartes ont été présentés aux lecteurs. Nous revenons à présent sur les démonstrations de ces tours, en citant en italiques des extraits de la première partie de l'article.

Rappel.— On se munit d'un jeu de 52 cartes et on en retire les rois. On répartit le jeu en ses quatre *couleurs*, qui comportent donc chacune 12 cartes, celles-ci ayant pour *valeurs* y les nombres entiers de 1 à 12, en convenant que le valet vaut 11 et la dame 12.
Dans un paquet de 12 cartes les cartes sont toujours faces contre table, et la *position* x d'une carte est alors son rang dans le paquet en comptant à partir du dessus.
Soit P un paquet de 12 cartes, k un diviseur de 12, h le diviseur complémentaire ($hk = 12$). Le *$k-$mélange régulier* de P en k piles de hauteur h s'opère de la manière suivante :
- étape 1 : on pose sur la table, de gauche à droite, les k premières cartes, de positions $1, 2, \ldots, k$ dans P;
- étape 2 : on pose sur elles les k suivantes, de positions $k+1, k+2, \ldots, 2k$ dans P;
- et ainsi de suite, en respectant, à chaque étape, la règle suivante : on pose la carte de position $k+i$ sur la carte de position i (il s'agit des positions dans P);
- après h étapes, on obtient k piles de hauteur h, qu'on ramasse dans l'ordre, de gauche à droite : la pile 1 au-dessus, puis la pile 2, etc. jusqu'à la pile k.
On obtient ainsi un paquet P', transformé de P à l'issue du $k-$mélange.

L'explication des tours de cartes sera basée sur un résultat essentiel, qui est le suivant :

Théorème fondamental.— *La carte de position x dans le paquet P occupera, après mélange en k piles de hauteur h, une position x' dans le paquet P' donnée par la formule suivante :*

$$x' = hx \pmod{13}.$$

Démonstration.— Considérons, pour toute carte de position x dans P, le nombre x défini par $x' = hx \pmod{13}$, et montrons que x' est bien la position de cette carte dans P'.

Les k premières cartes de P, de positions $x = 1, 2, \ldots, k$ se retrouvent à l'issue du mélange en bas des piles, et occuperont donc les positions respectives $h, 2h, \ldots kh$ dans P', positions qui sont données par $x' = hx$.
A chacune des étapes suivantes, on pose sur la carte de position $x_1 = i$ la carte de position $x_2 = k + i$. Il suffit de vérifier que $x'_2 = x'_1 - 1$ car cela implique, par récurrence sur le numéro de l'étape, que les x' sont bien les positions des cartes dans P'.
Or on a $x'_1 = hi \pmod{13}$, d'où

$$x'_2 = hx_2 = h(k+i) = hk + hi = 12 + x'_1 = x'_1 - 1 \pmod{13},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème nous conduit donc à faire les calculs dans le corps $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, plus précisément dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$.
C'est ce qui n'allait pas de soi : a priori, la plupart des spectateurs mathématiciens de ces tours de cartes ont tendance à croire que le présentateur calcule modulo 12 puisqu'il y a 12 cartes...

1) Paquets linéaires : calculer la position ou la valeur d'une carte

Voici un tour décrit dans notre précédent article :

Le présentateur part d'un paquet de piques rangé dans l'ordre normal $1, 2, 3, ..., 11, 12$, *et il opère sur ce paquet un certain nombre de* $k-$*mélanges, pour des valeurs de* k *choisies arbitrairement par les spectateurs.*
A l'issue d'une étape quelconque, le présentateur est toujours en mesure de répondre aux questions des spectateurs :

- *"Quelle est la valeur de la carte située en position* x *?"*
- *"Quelle est la position de la carte de valeur* y *?"*

Exemple.— Ci-dessous, on considère à gauche un paquet P d'équation $x = y$ (dans lequel positions et valeurs coincident), on lui fait subir un $3-$mélange en 3 piles de hauteur 4. La carte de position x dans P occupe alors dans P' une position x' donnée par $x' = 4x \pmod{13}$. Par conséquent l'équation du paquet transformé P' est $x' = 4y' \pmod{13}$, ou, ce qui revient au même, $y' = 10x' \pmod{13}$ puisque 4 et 10 sont inverses dans le corps $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

1				10
2				7
3				4
4				1
5				11
6				8
7				5
8				2
9	10	11	12	12
10	7	8	9	9
11	4	5	6	6
12	1	2	3	3

Supposons que l'on fasse ensuite subir à P' un 6−mélange en piles de hauteur 2. On obtient :

10							5
7							10
4							2
1							7
11							12
8							4
5							9
2							1
12							6
9							11
6	5	2	12	9	6	3	3
3	10	7	4	1	11	8	8

On a $x'' = 2x' \pmod{13}$ d'où l'équation du paquet P'' : $x" = 8y" \pmod{13}$, ou $y" = 5x" \pmod{13}$.

En itérant des mélanges réguliers à partir du paquet dans l'ordre initial ($x = y$), on reste à l'intérieur de l'ensemble des 12 paquets linéaires, si l'on entend par "paquet linéaire" un paquet qui a pour équations $y = ax \pmod{13}$ et $x = by \pmod{13}$, a et b désignant deux éléments inverses du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$: $ab = 1 \pmod{13}$.

Un k−mélange en k piles de hauteur h fait passer du paquet d'équation $x = by \pmod{13}$ au paquet $x = hby \pmod{13}$.

Par conséquent, si l'on part du paquet d'équation $x = y$ et qu'on fait des mélanges réguliers en piles de hauteurs respectives h_1, h_2, $\cdots$ h_n, on aboutit au paquet d'équation $x = by \pmod{13}$ où $b = h_1 h_2 \cdots h_n \pmod{13}$. Le présentateur doit simplement multiplier mentalement modulo 13 les hauteurs des piles des mélanges successifs pour calculer b. Il sera ainsi en mesure de répondre à la question de déterminer la position x d'une carte de valeur y donnée par les spectateurs.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9	11
3	6	9	12	2	5	8	11	1	4	7	10
4	8	12	3	7	11	2	6	10	1	5	9
5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8
6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	1	7
7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5
9	5	1	10	6	2	11	7	3	12	8	4
10	7	4	1	11	8	5	2	12	9	6	3
11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Table de multiplication modulo 13

Puis en calculant l'inverse a de b (le présentateur doit donc avoir préalablement mémorisé la table des inverses), il déduit l'équation équivalente $y = ax \pmod{13}$ et peut répondre à la question inverse, celle de déterminer la valeur d'une carte de position désignée par les spectateurs.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x^{-1}	1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12

Table des inverses modulo 13

2) Paquets exponentiels : un mélange par ici, une coupe par là

Voici un autre tour proposé dans la première partie :

Le présentateur présente un paquet de piques rangé dans l'ordre normal $1, 2, 3, ..., 11, 12$, *qu'il garde en main, et un paquet de coeurs rangé dans l'ordre inverse* $12, 11, ...3, 2, 1$, *qu'il pose sur la table.*
Puis il procède comme suit :
- étape 1 : il pose la première carte du paquet de piques (l'as) face contre table, puis il prend la première carte du paquet de coeur (la dame) et la pose sur le paquet de piques, puis il fait un 2−mélange du paquet obtenu et le reprend en main.
- étape 2 : il pose la première carte du paquet en main (le valet de pique) sur l'as de pique (sur la table), puis il prend la carte suivante du paquet de coeur (le valet de coeur) et la pose sur le paquet qu'il a en main, il fait à nouveau un 2−mélange et reprend le paquet en main.
Et ainsi de suite. Le présentateur fait observer à l'assistance qu'au début de chaque étape c'est toujours un pique qu'il dépose sur le paquet en formation sur la table (en dépit du fait qu'il a en main un paquet comportant des cartes des deux couleurs).

La douzième étape s'achève elle aussi sur un $2-$mélange. Le paquet de coeurs est alors le suivant :

$$12, 5, 8, 10, 9, 1, 7, 3, 4, 2, 11, 6,$$

tandis que sur la table, le paquet de piques est

$$6, 10, 8, 9, 2, 12, 7, 3, 5, 4, 11, 1.$$

Le présentateur fait constater la réciprocité des deux paquets.

Nous allons démontrer que l'équation du paquet de coeurs ainsi construit est $x = 6^y \pmod{13}$ et celle du paquet de piques $y = 6^x \pmod{13}$.
Quand nous écrirons dans ce qui suit une égalité du type $x = 6^y$, nous supposerons toujours implicitement qu'elle est vraie *modulo 13* tandis que l'exposant (dans le cas présent, y) est défini *modulo 12.*
Au début de l'étape 1 on pose le 1 de pique sur la table, en position 12 du paquet de piques en construction. A l'issue de l'étape 1, le 12 de coeur (la dame) se trouve en position 6 dans le paquet mixte, les piques occupent les autres positions selon les équations $x = 6y$, $y = 11x$.
Au début de l'étape 2 on pose le 11 de pique sur la table, en position 11 du paquet de piques en construction. A l'issue de l'étape 2, dans le paquet mixte le 12 de coeur occupe la position 6^2 et le 11 de coeur la position 6. Les piques occupent les autres positions selon les équations $x = 6^2y = 10y$, $y = 11^2x = 4x$.
Et ainsi de suite : à la fin de l'étape $(k-1)$, dans le paquet mixte les piques sont d'équation $y = 11^{k-1}x$. Donc au début de l'étape k c'est le pique de valeur 11^{k-1} qu'on pose en position $(12 - k + 1)$ du paquet de piques en construction. A l'issue de l'étape k, dans le paquet mixte le 12 de coeur occupe la position 6^k, le 11 la position 6^{k-1}, etc. et le coeur de valeur $(12-k+1)$ occupe la position 6. Les piques occupent les positions restantes, selon l'équation $y = 11^k x$.
Enfin, au début de l'étape 12 c'est le pique de valeur $11^{11} = 6$ qu'on pose en position 1 du paquet de piques ainsi achevé. A l'issue de l'étape 12, le paquet en main ne comporte plus que des coeurs, le 12 de coeurs occupe la position $6^{12} = 1$, le 11 de coeur la position 6^{11}, et plus généralement le coeur de valeur y occupe la position 6^y. L'équation de ce paquet est donc $x = 6^y$.
Dans le paquet de piques, la carte de position x a pour valeur $y = 11^{12-x} = 6^{x-12} = 6^x$, ce qu'il fallait démontrer.
Remarque.— Cette remarquable construction du paquet "exponentiel" et de son paquet réciproque est due au philosophe et logicien américain Charles Peirce. Il faut choisir un générateur du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, ici nous avons choisi la base 6. En itérant des $6-$mélanges on aurait abouti au paquet exponentiel de base 2. On ne peut pas prendre 3 ou 4, car ce ne sont pas des générateurs.
La suite du tour consiste simplement à utiliser l'isomorphisme entre d'une part les mélanges, qui correspondent aux homothéties sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, et d'autre part les coupes, correspondant aux translations sur le groupe additif $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

- à un 2−mélange des coeurs correspond une coupe d'une carte des piques (la première carte passe en dernière position) ;
- à un 3−mélange des coeurs correspond une coupe de 10 cartes des piques (les deux dernières cartes passent au-dessus du paquet) ;
- à un 4−mélange des coeurs correspond une coupe de 8 cartes des piques ;
- à un 6−mélange des coeurs correspond une coupe de 5 cartes des piques.

Montrons le premier et le dernier cas : un 2−mélange des coeurs fait passer à un paquet d'équation $x = 6.6^y = 6^{y+1}$. Or ce paquet est réciproque de $y = 6^{x+1}$, qui se déduit du paquet de piques $y = 6^x$ par une coupe de une carte;
le dernier cas : un 6−mélange des coeurs fait passer le paquet $x = 6^y$ à un paquet d'équation $x = 2.6^y = 6^5.6^y = 6^{y+5}$, qui est réciproque du paquet d'équation $y = 6^{x+5}$, lequel se déduit du paquet de piques $y = 6^x$ par une coupe de cinq cartes.

3) Paquets puissances : auto- et anti-réciprocité

Nous avions inauguré la première partie comme suit :

Le présentateur a rangé préalablement les piques dans un paquet de la manière suivante (de haut en bas, donc, faces non visibles) :

$$1, 7, 9, 10, 8, 11, 2, 5, 3, 4, 6, 12.$$

Il a rangé les coeurs comme suit :

$$1, 6, 9, 10, 5, 2, 11, 8, 3, 4, 7, 12.$$

Il a rangé enfin les carreaux comme suit (et de même, les trèfles) :

$$1, 11, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 2, 12.$$

Rappelons que, x étant un élément du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, on a toujours $x^{12} = 1$. Par suite, $x^{11} = x^{-1}$.
L'équation des piques est $y = x^{11}$, ou $y = x^{-1}$, celle des coeurs $y = x^5$, celle des carreaux et des trèfles $y = x^7$.
Les seules fonctions puissances $x \mapsto y = x^\alpha$ de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ qui sont des bijections sont celles pour lesquelles α est premier avec 12, ce sont donc $y = x$, $y = x^5$, $y = x^7$ et $y = x^{11}$. Les valeurs de α sont, dans l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, le groupe des éléments inversibles formé des éléments $\{1, 5, 7, 11\}$.
C'est un groupe de Klein : on a $5^2 = 7^2 = 11^2 = 1 \pmod{12}$, et $5.7 = 11 \pmod{12}$, $7.11 = 5 \pmod{12}$, $5.11 = 7 \pmod{12}$. Ceci a deux conséquences :
a) les fonctions bijectives $x \mapsto y = x^\alpha$ sont aussi involutives, on a par exemple $y = x^5 \Leftrightarrow x = y^5$. Par conséquent les paquets sont ici autoréciproques.
b) On a la propriété de composition suivante :

on peut trouver la valeur d'une carte dans un paquet quelconque par consultation des deux autres paquets, en "composant" dans l'ordre qu'on veut.
Exemple.— Quelle est la valeur de la carte en deuxième position dans les piques? Cherchons la deuxième carte chez les coeurs : c'est le 6; cherchons alors la sixième carte chez les carreaux, c'est le 7. Par conséquent, c'est le 7 qui se trouve en deuxième position dans les piques.

Avant d'étudier l'effet des mélanges sur ces paquets, rappelons qu'on appelle *résidus (quadratiques)* les éléments du groupe $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ qui sont des carrés. Il y a six résidus : $1, 3, 4, 9, 10, 12$, et six non-résidus : $2, 5, 6, 7, 8, 11$. On a les caractérisations suivantes :
- si a est résidu, $a^6 = 1$, d'où $a^5 = a^{-1}$ et $a^7 = a$;
- si a est non-résidu, $a^6 = -1$, d'où $a^5 = -a^{-1}$ et $a^7 = -a$.
D'autre part, rappelons qu'on a toujours $a^{12} = 1$ et $a^{11} = a^{-1}$.

Le présentateur fait faire un mélange régulier quelconque (avec $k = 2, 3, 4$ *ou* 6*) sur les piques. On constate alors que le paquet de piques reste auto-réciproque. On fait encore plusieurs mélanges : le paquet reste toujours auto-réciproque.*

En effet, mélanger une ou plusieurs fois le paquet de piques, c'est passer de l'équation $x = y^{-1}$ à une équation $x = ay^{-1}$ équivalente à $xy = a$, qui est clairement symétrique en x et y.

Le présentateur fait faire un $3-$*mélange sur les coeurs, ce qui conduit au paquet*

$$4, 11, 10, 1, 7, 8, 5, 6, 12, 3, 2, 9$$

qui est, comme on s'y attend, auto-réciproque. Puis il fait faire un 2-mélange, et on obtient :

$$2, 12, 5, 7, 10, 4, 9, 3, 6, 8, 1, 11$$

qui est un paquet, ô surprise, antiréciproque, car l'as n'est pas en deuxième position à partir du haut du paquet, mais à partir du bas du paquet et, de même, le 3 est en cinquième position à partir du bas du paquet!
On s'aperçoit alors que si un $3-$*mélange ou un* $4-$*mélange n'affecte pas l'auto ou l'antiréciprocité, en revanche un* $2-$*mélange ou un* $6-$*mélange fait passer de l'auto à l'anti et réciproquement.*

En effet, on part du paquet de coeurs d'équation $x = y^5$ et on passe après mélange(s) à un paquet d'équation $x = ay^5$, ce qui est équivalent à $x^5 = a^5y$, d'où aussi à $y = a^7x^5$. Si a est résidu quadratique, comme 3 ou 4, on a $a^7 = a$, le paquet est autoréciproque. Mais si a n'est pas résidu, comme 2 ou 6, on a $a^7 = -a$ et le paquet est antiréciproque.

Rappelons qu'au départ les paquets de carreaux et de trèfles sont identiques, et réciproques l'un de l'autre (puisqu'auto-réciproques). Le présentateur demande au spectateur de faire un mélange régulier sur les carreaux. Supposons que celui-ci choisisse un $2-$*mélange, ce qui conduit à*

$$2, 9, 6, 8, 3, 1, 12, 10, 5, 7, 4, 11.$$

Le présentateur fait alors un 6−mélange sur les trèfles, ce qui donne

$$6, 1, 5, 11, 9, 3, 10, 4, 2, 8, 12, 7,$$

qui est bien le paquet réciproque des carreaux.

Après mélange(s), le paquet de carreaux a pour équation $x = ay^7$, ce qui est équivalent à $y = a^5x^7$. Or si $a = 6$, on a $a^5 = 2$, d'où le résultat.
Nous laisserons en exercice le rétablissement de la réciprocité après des 3− ou des 4−mélanges.

Remarques finales.— Les rares exposés dont j'ai eu connaissance sur cette question (cf. bibliographie) présentent essentiellement l'algorithme de Peirce pour construire un paquet exponentiel et son réciproque, puis exposent le tour de cartes qui en découle (mélange rétabli par coupe). Seul l'article de K. Eisemann donne une démonstration.
La présentation donnée ici diffère essentiellement sur trois points, et cela par souci de simplicité :
- introduction des paquets linéaires, qui constituent la manière la plus naturelle de se familiariser avec l'action des mélanges réguliers;
- introduction des paquets puissances, qui montrent d'autres liens avec l'arithmétique élémentaire des congruences, et notamment avec les résidus quadratiques.
- restriction au cas particulier de 12 (qui est de la forme $p - 1$, avec p premier, ce qui n'est évidemment pas sans conséquences) et au cas particulier des k−mélanges réguliers où k est diviseur de 12. Mais on peut évidemment généraliser à d'autres valeurs.

Bibliographie

K. Eisemann, "The most fantastical card trick ever invented", *Amer. Math. Monthly* 91 (1978), 284 − 289.
Martin Gardner, *Scientific American,* July 1978, 20 − 21.
Charles Peirce, "Collected Works", vol. IV