Annales de Didactique et de Sciences Cognitives

Publication des travaux du séminaire de Didactique des Mathématiques de Strasbourg

Responsable de la publication : **F. PLUVINAGE**

I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
F. 67084 STRASBOURG Cedex

Volume 6 1998

EDITORIAL

Relais

Le directeur de la publication change avec ce numéro des *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. A propos de cette responsabilité éditoriale, il y a lieu de reconnaître que la qualité du travail accompli par Raymond DUVAL donnait beaucoup à désirer ; les numéros déjà parus des *Annales* étaient par exemple tellement désirés qu'il avait fallu procéder à des retirages. Des IUFM remontait également l'expression du désir d'une poursuite, au profit des élèves professeurs ; le souci, auquel Raymond Duval a réussi à donner une réalité tangible, que tous les articles des *Annales* soient à la fois d'application et d'explication est certainement pour quelque chose dans cet intérêt.

Bref, il y avait quantité de raisons pour que la publication perdure, sauf une : Lille est tout de même un peu loin de Strasbourg, malgré une liaison ferroviaire directe ; cette liaison est lente, et s'il y a bien quelqu'un à qui il est cruel de prendre son temps, c'est Raymond Duval, puisqu'il est notamment spécialiste du temps[1]. La solution retenue a donc été un changement de personne pour la direction des *Annales*. Que dire de plus à ce propos ? Peu de chose, sinon préciser que la nouvelle tête est, comme il se doit en de pareilles circonstances, pleine de bonnes résolutions. L'une d'elles mérite peut-être une mention spécifique : l'intention d'installer un comité de lecture en bonne et due forme, sans pour autant renoncer à l'examen soigneux que faisaient un certain nombre de personnes, dont Raymond Duval qui accepte de continuer à contribuer de cette façon à la revue. Merci à lui également pour cela.

A Papini, in memoriam

Ce numéro des *Annales* ne pourrait pas prétendre être complet s'il ne prenait acte de la disparition en 1997 de notre ami mexicain Jesús ALARCÓN BORTOLUSSI, surnommé Papini. Les lecteurs hispanisants pourront retrouver dans un numéro spécial, à paraître à l'occasion du XXXV^{e} anniversaire du CINVESTAV (équivalent du Centre National de la Recherche Scientifique français), avec d'autres hommages, ces quelques lignes qui n'ont certainement pas la prétention de couvrir la vaste activité de Papini en faveur de

---

[1] Raymond Duval, 1992, Temps et vigilance, librairie Vrin, Paris

l'enseignement des mathématiques au Mexique, mais seulement de donner un coup de projecteur sur quelques traits de personnalité dont l'auteur a eu l'occasion d'être témoin.

Difficile d'imaginer une personnalité aussi peu conformiste, mais en même temps aussi rigoureuse que Papini ; peut-être l'un et l'autre de ces deux traits de caractère ne sont ils d'ailleurs antinomiques qu'en première instance : tant que le fonctionnement de la société s'appuie sur des règles qui ne sont pas toutes rationnelles, et ce n'est pas demain la veille de l'installation d'un tel ennui, la rigueur implique un certain non-conformisme. Un exemple qui m'avait frappé tenait au fait que Papini, craignant les voyages aériens, se déplaçait à travers la république mexicaine en autobus ; il trouvait alors normal que l'économie ainsi réalisée sur ses déplacements soit réinvestie en achat de matériel pédagogique. Comment il réussissait à faire façon des règlements budgétaires pour arriver à ce résultat, je ne sais, mais j'ai bel et bien vu ici ou là des équipements informatiques dont on m'a assuré que la source de financement était le surplus en frais de déplacements de Papini. Sa thèse[2] traitait de l'enseignement des probabilités, mais lui-même n'avait jamais voulu admettre qu'il avait beaucoup avancé dans la compréhension d'apprentissages probabilistes, parce que, s'il avait par exemple très bien identifié où se produit le divorce entre proportionnalité et probabilités *à la Laplace* (les rapports des *cas favorables* aux *cas possibles*), il estimait avoir besoin de compléments sur les conceptions que le public interrogé peut avoir sur les fréquences et les notions qui s'y rattachent.

François PLUVINAGE

---

2 Jesus Alarcón Bortolussi, 1982, *Appréhension de situations probabilistes par des élèves*, thèse de 3e cycle, IREM, Université Louis Pasteur Strasbourg

TABLE DES MATIÈRES

F. HITT-ESPINOSA

Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction 7-26

M.P. ROMMEVAUX

Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. 27-65

C. DUPUIS ET S. ROUSSET-BERT

De l'influence des représentations disponibles sur la résolution de problèmes élémentaires de probabilité et sur l'acquisition du concept d'indépendance 67-87

I. BECK ET M. VAILLANT

Comprendre un texte argumentatif 89-115

F. PLUVINAGE ET A. MALLIER

Le repérage des difficultés de lecture à l'aide du français et des mathématiques 117-124

F. PLUVINAGE

La nature des objets mathématiques dans le raisonnement 125-138

R. DUVAL

Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet 139-163

R. DUVAL

Signe et objet (II) : Questions relatives à l'analyse de la connaissance 165-196

W. L. DAMM

Les problèmes de pourcentage: une application des problèmes de conversion proportion-quantité 197-212

SYSTÈMES SÉMIOTIQUES DE REPRÉSENTATION LIÉS AU CONCEPT DE FONCTION

Fernando HITT-ESPINOSA

Understand the concept of function implies coherent articulation of the different semiotic registers (Duval, 1993, p. 41) which come into play during the resolution of a problem related to the concept. Taking into account preliminary experimental studies, 14 questionnaires were designed to understand the difficulties on the learning process of the subjects. This experimental study was carried out with mathematics teachers (secondary school) in Mexico. The results show that according to the task, the teachers have difficulties of different nature than their students. For example, the teachers can identify without problem the graphic representations of some functions like absolute value, the polinomies, the trigonometric functions, but one part of them experience some difficulties because they think some curves are graphic representations of functions (circle, ellipse, ...). On the contrary, a majority of students think that every curve is a graphic representation of a function.

La compréhension du concept de fonction implique l'articulation cohérente des différents registres sémiotiques (Duval, 1993, p. 41) qui entrent en jeu dans la résolution d'un problème lié à ce concept. Prenant pour base quelques études préliminaires expérimentales, 14 questionnaires ont été élaborés pour mesurer les difficultés qu'on peut avoir avec ce concept. Cette étude expérimentale a été faite avec des maîtres de mathématiques (école secondaire) au Mexique. Les résultats montrent que selon la tâche demandée, les maîtres ont des difficultés de nature différente de celles des élèves. Par exemple, les maîtres peuvent reconnaître sans problème les représentations graphiques de fonctions comme la valeur absolue, les fonctions polynômes et les fonctions trigonométriques, mais certains éprouvent des difficultés à voir que quelques-unes des courbes (cercle, ellipse, ...) ne correspondent pas à des graphes de fonctions. Par contre, pour la majorité des élèves, presque toutes les courbes sont des représentations graphiques de fonctions.

INTRODUCTION

L'importance qui a été accordée au concept de fonction dans le curriculum d'enseignement secondaire provient d'influences de documents datant de plusieurs siècles. Par exemple, Leonard Euler a organisé son oeuvre *"Introductio in analysis infinitorum"* (1748, traduction de 1976) autour du concept de fonction. Les mathématiques possèdent une structure où les fonctions jouent un rôle fondamental, raison pour laquelle leur étude soignée est indispensable. Eisenberg (1992, p. 174) signale que : *"Développer chez les étudiants une sensibilité vers les fonctions devrait être un objectif principal du curriculum de l'école secondaire et universitaire"*.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 6(1998) (p. 7-26) - IREM de Strasbourg

Les problèmes d'apprentissage autour du concept de fonction sont devenus manifestes depuis plusieurs décennies ; ainsi le démontrent par exemple les travaux de recherche Vinner (1983), Markovits (1986), Duval (1988), Vinner y Dreyfus (1989), Eisenberg (1992). Une implication générale de ces travaux est que l'appréhension du concept de fonction n'est pas une tâche facile, outre qu'une grande majorité d'élèves n'accède pas à cette connaissance, mettant en évidence que certains des obstacles d'apprentissage sont de type didactique (pour la manière dont ils sont enseignés) tandis que d'autres sont intrinsèques par la difficulté que montre l'étudiant à mobiliser différentes représentations du concept de fonction de manière cohérente.

La possibilité de connaître de plus près les problèmes d'apprentissage du concept de fonction nous a menés à réaliser une approche du problème depuis la perspective du professeur (Hitt, 1988). Dans cette première incursion, les résultats ont éclairé le fait que certains maîtres de mathématiques d'enseignement secondaire avaient des problèmes pour passer d'un système sémiotique de représentation des fonctions à un autre. Suite à cette étude, et en vue de trouver des réponses au comportement montré par les maîtres de mathématiques autour de ce concept, j'ai entrepris une recherche plus approfondie où, d'un côté, j'ai considéré important de réaliser une analyse historique sur l'émergence du concept de fonction, et de l'autre, une approche desdites difficultés d'apprentissage du concept de la part des maîtres de mathématiques d'enseignement secondaire. Nous présenterons ci-dessous un des moments critiques dans le développement du concept de fonction, nous reportant au XVIIIe Siècle, et, par la suite, nous nous centrerons sur l'étude expérimentale de ce travail.

La notion de fonction chez Euler

Je résumerai brièvement l'idée mathématique de fonction dans le travail de Léonard Euler, dans son **Introduction à l'Analyse Infinitésimale** (traduction du latin au français, 1796) . Cette analyse sera reprise ultérieurement au moment de discuter des stratégies utilisées par des maîtres de mathématiques du secondaire (12 à 17 ans), dans la résolution de problèmes liés au concept de fonction.

Nous remarquerons que la première définition explicite de fonction se trouve dans les travaux de Bernoulli (1718, p. 241).

Définition: On appelle fonction d'une variable une quantité composée de n'importe quelle forme par cette variable et par constantes.(Citée par Youschkevitch, 1976, p. 60).

Un progrès important dans le concept de fonction a été réalisé par Euler (1796, p. 1-2); il a changé le mot *quantité* **dans la définition de Bernoulli par** *expression analytique*, et il a essayé d'éclaircir l'idée de quantité constante et de quantité variable.

Nous avons analysé ces idées. Dans presque toutes les références à la notion de fonction d'Euler, on se borne à citer sa définition de fonction et non pas ce qui concerne son idée de variable. Or dans les travaux d'Euler (1796, p. 1-2), nous pouvons trouver les définitions suivantes (1 à 4) ainsi que la remarque 5 :

1. *Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.*
2. *Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*
3. *Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*
4. *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.*
5. *Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable.*

Dans la première définition d'Euler, il y a un élément qui peut nous aider à comprendre ses idées sur le sujet : l'idée du temps « physique » est au moins implicite dans la définition *(« qui conserve toujours »)*. La présence du temps chez Euler va jouer un rôle important parce que derrière cette notion, on va trouver la continuité. Le continu restera dans un domaine physique puisque la droite réelle n'existe pas sous forme numérique dans ces travaux (la droite numérique achevée est du XIXe siècle).

D'un point de vue didactique, il est important d'analyser les exemples de définitions fournis par Euler, ainsi que ses exemples *de 'fonctions apparentes qui ne sont pas des fonctions'*. Euler écrit :

Ainsi, toute expression analytique, soit de la variable z et contenant des quantités constantes, est une fonction de z. Par exemple: $a+3z$; $az-4zz$; $az+b\sqrt{aa-zz}$; cz ; & c, *sont des fonctions de z.*

Au reste, il n'est pas rare de rencontrer des expressions qui ne sont que des fonctions apparentes; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conservent toujours la

même valeur, comme z^0; 1^z; $\frac{aa-az}{a-z}$. *Ces expressions, sous la forme apparente de fonctions de variables, sont réellement des quantités constantes.* (p. 3)

Les exemples de fonctions fournis par Euler font partie de notre spectre actuel de fonctions, lequel contient également les exemples signalés par Euler comme les trois expressions qui ne sont pas des fonctions. Mais la remarque 5 d'Euler avait pour conséquence l'exclusion des fonctions constantes.

L'élimination des fonctions constantes est une nécessité pour Euler, puisque, dans le chapitre suivant, il va travailler sur la composition des fonctions. C'est véritablement pour cette composition qu'il est nécessaire que les valeurs prises par une fonction f soient quelconques. Cette condition n'est réalisée que si l'on se place à priori dans les complexes pour résoudre en z l'équation y = f(z). Les fonctions considérées par Euler sont donc des fonctions de variable complexe, dont on peut évidemment restreindre l'étude aux réels.

En résumé, on peut dire qu'une fonction au sens d'Euler est **une fonction de variable complexe, non constante, définie par une expression analytique (donc continue dans son ensemble de définition).**

Description de l'expérimentation

Les registres de représentation ont une très grande importance dans l'acquisition des concepts mathématiques. Les concepts mathématiques se construisent à partir de l'articulation des différents registres et des images mentales associées à leurs représentations.

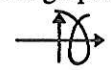
Ainsi, les activités proposées aux élèves déterminent d'une certaine façon leur acquisition du concept mathématique qui est en jeu. Duval (1993) a écrit: *les différentes représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires. En effet, les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles pour la perception, ou pour une expérience intuitive inmédiate comme le sont les objets communément appelés 'réels' ou 'physiques'.*

Dans ce contexte sur l'importance des différentes représentations sémiotiques par rapport au concept de fonction, nous analysons le concept de fonction, plus précisément les difficultés d'articulation entre les différents registres; ceci sur une population de maîtres de mathématiques de l'enseignement secondaire au Mexique.

SYSTEMES SEMIOTIQUES DE REPRESENTATION LIES AU CONCEPT DE FONCTION

La population testée était constituée de 30 maîtres de mathématiques de l'enseignement secondaire. Nous avons élaboré 14 questionnaires dans cet objectif avec les caractéristiques suivantes:

(Q1) L'identification de représentations graphiques de fonctions (26 questions)

Exemple: Le graphe de la courbe  est-il la représentation graphique d'une fonction? Justifiez votre réponse.

(Q2) Sous-concepts du concept de fonction (identification du domaine de définition, de l'ensemble image et de couples de points sur la courbe, 9 questions)

Exemple: Vu le graphe d'une fonction et de points sur le Domaine, Contre-domaine et sur la courbe, identifier les points appartenant au Domaine, Contre-domaine et sur la courbe.

(Q3) La tabulation et la représentation graphique (6 questions)

Exemple: Vu un tableau, dessiner un graphe.

(Q4) Définition de fonction et énoncés de fonctions en langage verbal (10 questions)

Exemple: Quelle est la définition de fonction ?

(Q5) Fonctions à évaluer sur certaines valeurs numériques ou symboliques (10 questions)

Exemple: Vu $f(x) = x + 7$, pour tout x réel, calculer f(-7), f(0), $f(a + b)$.

(Q6) Représentations algébriques de fonctions (passage algébrique/graphique, 13 questions)

Exemple: Dessiner le graphe de la fonction f: {nombres naturels} $\rightarrow$ {nombres naturels}, de telle sorte que $f(x) = 3$.

(Q7) Représentations graphiques de fonctions (passage graphique/algé-brique, 11 questions)

Exemple: Vu le graphe

Quelle est la représentation algébrique de cette fonction?

Q8) Construction de fonctions avec certaines propriétés (21 questions)
Exemple: Construire trois fonctions f_1, f_2, f_3 d'une variable réelle, telle que $|f_1(x)| = |f_2(x)| = |f_3(x)| = 2$.

(Q9) Identification de fonctions égales (5 questions)
Exemple: Soit $f(x) = x^2$ pour tout x réel, et $g(x) = u^2$ pour tout u réel, la fonction f est-elle égale à la fonction g?

(Q10) Représentations graphiques de fonctions (passage d'un graphique au dessin d'une bouteille montrant la variation entre hauteur et volume, 5 questions)

Exemple: Vu le graphe , dessiner un récipient contenant un liquide, où h serait la hauteur du liquide et $v(h)$ son volume.

(Q11) Dessin d'une bouteille (passage d'un dessin à un graphique, 6 questions)

Exemple: Vu le dessin d'un récipient, , dessiner le graphique hauteur contre volume.

(Q12) Opérations avec les fonctions exprimées de façon algébrique (+, -, *, °, 9 questions)
Exemple: Vu $f(x) = 1 + \frac{2}{x+1}$ et $g(x) = 2 + \frac{3}{x+1}$ .Calculer $(f \circ g)(x) =$

(Q13) Enoncés mathématiques (démonstration ou recherche de contre-exemples, 3 questions).

Exemple: Soit f une fonction réelle de variable réelle, si $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 0$ pour tout x réel, ceci implique-t-il que $f(x) = 0$ pour tout x réel ?

(Q14) Définitions de fonction (identification des 4 définitions usuelles dans les manuels scolaires, 4 questions)

Exemple d'un item : Une fonction est un ensemble de couples ordonnés pour lesquels il n'en existe pas deux possédant le même premier élément.

Analyse des résultats

Commentaires sur les réponses au questionnaire Q1

La tâche demandée aux maîtres était de reconnaître si la représentation graphique d'une courbe correspondait au graphe d'une fonction.

La justification la plus fréquente, donnée par les maîtres, pour les courbes qui n'étaient pas des représentations graphiques de fonctions, était un argument géométrique : la parallèle à l'axe vertical doit couper la courbe en un seul point.

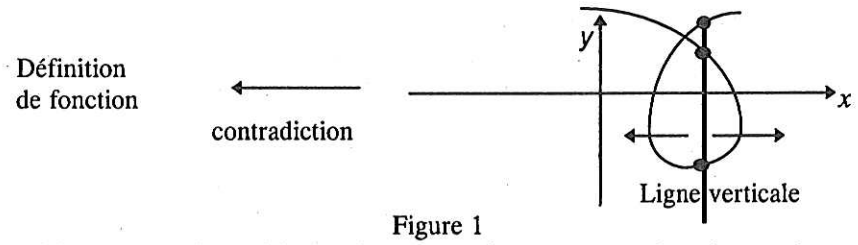


Figure 1

Parmi les 26 courbes qui ont été soumises aux maîtres, se trouvaient des courbes telles que (voir Fig. 2).

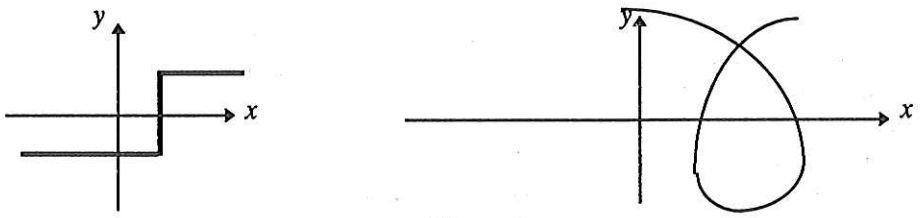


Figure 2

Les maîtres, en général, ont bien réussi ces questions (par exemple, pour la dernière courbe il y a eu 29 réussites sur 30).

On pouvait croire que leur argument géométrique était bien assimilé, mais parmi les 26 courbes, nous avions mis 5 coniques et il y a eu environ un tiers de la population qui a échoué (voir figure 3).

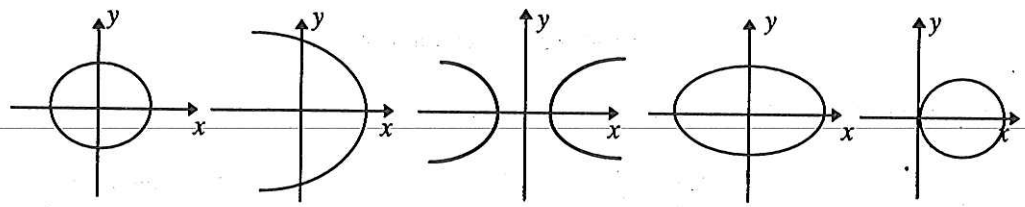


Figure 3

Comment peut-on expliquer le phénomène suivant: **Pour un tiers de la population, l'existence d'une expression algébrique associée à une courbe remplace la vérification géométrique (ligne verticale) et la définition de fonction.**

Le problème épistémologique sous-jacent est le suivant : dans la pratique, souvent, nous utilisons les fonctions exprimées de façon algébrique (une expression analytique) et on étudie des fonctions continues ; intuitivement, on suit l'idée d'Euler sur le sujet ; Euler (1796, p. 2) a écrit: *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.*

Alors, on commence à avoir l'idée intuitive, comme chez Euler du fait que les fonctions sont des expressions analytiques exprimées par une seule formule et sont continues dans leur domaine de définition.

Un autre problème s'ajoute au précédent; lorsqu'on étudie les fonctions, on passe régulièrement d'une fonction à son équation. On peut, inconsciemment, arriver à croire qu'**il n'y a pas de différence entre une fonction et l'équation qu'on lui associe.**

Nous allons analyser le schéma proposé par Duval (1993, p. 51-53) à propos du fonctionnement cognitif de la pensée. Il écrit : « *La coordination de plusieurs registres (Hypothèse 2 et Fig. 5) est donc une condition absolument nécessaire pour que le schéma dyadique de la représentation habituellement admis (fig. 4 et hypothèse 1) corresponde à un fonctionnement cognitif effectif chez un sujet, et pour que, en surface, le recours à un seul registre de représentation apparaisse suffisant. Or, de nombreuses observations, aux différents niveaux de la scolarité, montrent qu'elle ne s'effectue pas spontanément chez la plupart des sujets et qu'on ne peut espérer en favoriser la mise en place par un enseignement qui méconnaît la liaison forte existant entre noésis et sémiosis.* »

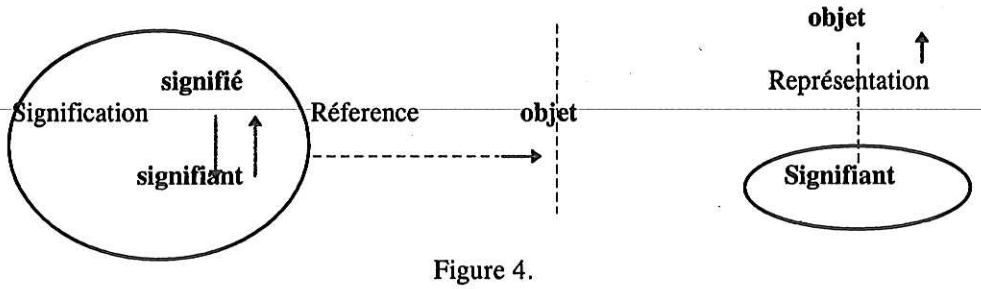


Figure 4.

Hypothèse 1: si le registre de représentation est bien choisi, les représentations de ce registre sont suffisantes pour permettre la compréhension du contenu conceptuel représenté.
Duval est ainsi amené à considérer comme insuffisante l'hypothèse 1 (illustrée par le schéma de la figure 4), implicitement mise en oeuvre dans beaucoup de séquences d'enseignement. Il lui préfère, pour des sujets en cours d'apprentissage, une deuxième hypothèse illustrée par le schéma de la figure 5.

Hypothèse 2: La compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de répresentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion.

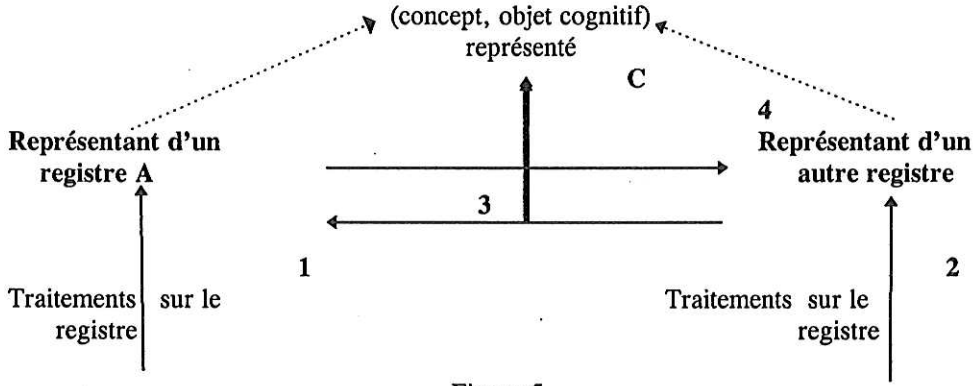


Figure 5

Le schéma de la figure 5 ne rend pas compte de certaines difficultés, comme nous le montre l'analyse de cas particuliers. Par exemple, dans le registre algébrique, si on a une expression du type $y = f(x)$, la condition de fonctionnalité est d'emblée prise en compte.

Elle n'a donc pas à être vérifiée (on est alors placé dans une situation où il n'y. a aucune vérification de conditions à tester). Au contraire, dans le registre graphique devant une courbe on fait un balayage visuel, qui n'est pas véritablement un traitement dans ce registre (voir, par exemple, figure 1) puisqu'on ne change en rien la courbe envisagée. Par opposition, en revenant aux écritures algébriques, le cas des fonctions implicites ($h(x,y)=0$), conduit pour sa part à des traitements sur le registre (*peut-on expliciter y `en fonction' de x, c'est-à-dire isoler y* ?).

En examinant les erreurs des maîtres, on peut être dans une situation différente. Il faut bien choisir les registres adaptés au concept de fonction, c'est-à-dire qu'il faut prendre un sous-registre du registre symbolique, celui des expressions algébriques des fonctions. Sinon, la conversion entre registre et autre peut fonctionner correctement, mais en conduisant à un obstacle cognitif si on ne pense pas à la vérification de certaines conditions. Le schéma suivant est un essai pour montrer globalement le problème que nous avons voulu expliciter.

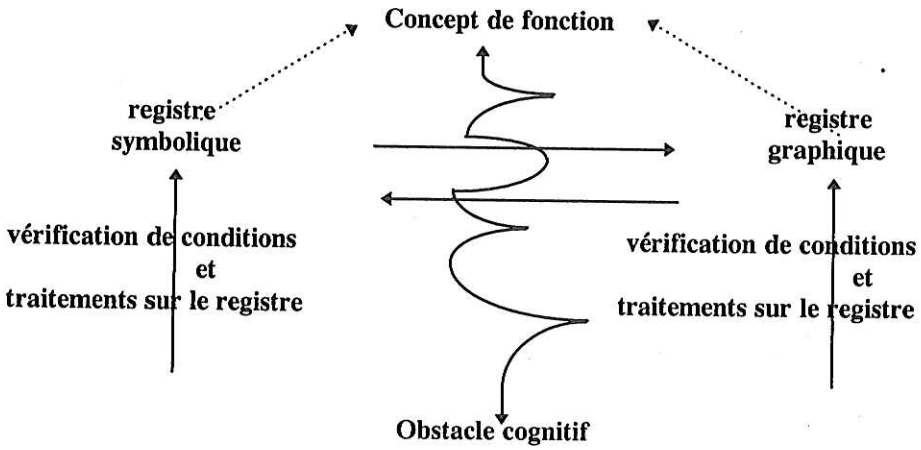


Figure 6. Problèmes mathématiques et épistémologiques

Commentaires sur les réponses au questionnaire 2 (Q2)

Le questionnaire Q2 comportait des questions sur les sous-concepts du concept de fonction. On demandait aux maîtres d'identifier les éléments du domaine de définition d'une fonction, les images et couples de points ordonnés sur la courbe. Dans le Tableau 1, nous montrons une question du questionnaire 2. De même que les élèves de l'école

secondaire (Markovits et al, 1986, p. 21), les maîtres ont confondu le sous-concept du concept de fonction.

(Question dans le questionnaire 2)

Etant donnée une fonction, f:{nombres réels}⟶ {nombres réels}, définie par $f(x) = 4$.

a) Lesquels, des nombres suivants: 2; -5,5; 9,07; 0 sont des éléments du domaine de définition de la fonction f?

b) Lesquels, des nombres suivants: 12; 0; 4; 3,3 sont des images par f?

c) Lesquels, des couples de points ordonnés suivants: (2;8), (0;4), (0;0) et (19,4) sont des éléments du graphe de f?

a)		b)	c)
Corrects 20	Corrects 18	Corrects 18	Trois items corrects 15
Incorrects 6	Incorrects 6	Incorrects 6	Au moins un item incorrect 13
Abstention 4	Abstention 6	Abstention 6	Abstentions aux 3 items 2

Tableau 1

Commentaires sur les réponses au questionnaire Q3

Les maîtres ont montré un comportement de réussite aux questions de ce questionnaire, le passage d'un tableau à son correspondant graphique n'a représenté aucun problème. Il s'agit-là d'une des activités d'enseignement qui est fréquemment réalisée.

Commentaires sur les réponses aux questionnaires Q4 et Q14

La question 1 du questionnaire 4, demandait aux maîtres d'écrire la définition de fonction, et en Q14, prenant en compte la classification donnée par Nicholas (1966), on présentait aux maîtres quatre définitions de la notion de fonction (extraites de manuels scolaires usuels) en termes de règle de correspondance, ensemble de couples ordonnés, relation entre variables, entrée-sortie. Les maîtres devaient décider si la définition était vraie ou fausse; ensuite, pour celles qui étaient considérées comme correctes, ils devaient les classifier par ordre de préférence pour l'enseignement.

Dans le questionnaire Q4 les définitions en termes de relation entre variables et en termes d'entrée-sortie ne furent jamais données par les maîtres. Quant aux choix, pour l'enseignement, dans le questionnaire 14, nous avons les résultats suivants: règle de

correspondance (14 maîtres sur 30), ensemble de couples ordonnés (13 maîtres), définition en termes de relation entre variables (3 maîtres).

Nicholas (1966, p. 767) a suggéré que la définition la plus appropriée pour l'enseignement pré-universitaire, était celle qui se trouvait en termes de relation entre variables. Cependant, les résultats de notre étude montrent qu'une telle définition n'est pas la préférée des maîtres.

Définition de fonction	C4	Changement de Définition.	C14
Règle de correspondance	14	5	9 + 2
Régle de correspondance et 1-1	3	0	3
Régle de correspondance et 1-1 et sur	1	1	
Règle de correspondance (erronée)	1	1	
Ensemble de paires ordonnées	10	2	8 + 5
Abstention	1	1	
Relation entre variables	0	0	0 + 3
Entrée - sortie	0	0	0

Commentaires sur les réponses au questionnaire Q5

Les questions du questionnaire Q5 sur l'évaluation de fonctions n'ont présenté aucun problème majeur pour les maîtres. De nouveau comme pour le questionnaire 3, ils ont fait preuve d'un comportement efficace. Ils n'ont rencontré des difficultés que pour une question du questionnaire, il s'est agi de la question 5b.

Pour la fonction g :{nombres réels} → {nombres réels}, tel que g(x) = -7

a) Calculer ce qui suit :

g(-4) = g(A) = g(-7) =

g(-1) = g(0) = g(3.5) =

Réponses correctes 25 Abstention au sujet g(A) 5

b) Existe-t-il un quelconque nombre x, tel que g(x) = 3? Combien en existe-t-il?

Réponses correctes 14 Réponses incorrectes 14 Abstentions 2

c) Existe-t-il un quelconque nombre x, tel que g(x) = -7? Combien en existe-t-il ?

Réponses correctes 23 Réponses incorrectes 4 Abstentions 3

Commentaires sur les réponses au questionnaire Q6

Le comportement des maîtres, pour ce questionnaire, a été positif en ce qui concerne les fonctions continues. Cette capacité du passage de la représentation algébrique d'une fonction vers sa représentation graphique est présente également chez les élèves d'enseignement secondaire. Il est notoire que, dans l'enseignement, on insiste à développer cette habilité chez les élèves.

Les problèmes auxquels ont dû faire face les maîtres se sont présentés quand les fonctions étaient définies dans un ensemble discret, par exemple dans les nombres naturels.

Voici ci-dessous, comme exemple, la question qui leur a été posée :

> Dessiner la représentation graphique de la fonction f : {nombres naturels} → {nombres naturels}; définie par f(x) = 3.
>
> correctes 7 incorrectes 22 abstention 1

Les réponses incorrectes sont dues au fait que les maîtres ont déssiné une droite continue au lieu d'un graphe de points discrets. Nous avons utilisé la notation {nombres naturels} au lieu de N afin d'éviter toute confusion ou que soit passé inaperçu l'ensemble de départ et celui d'arrivée de la fonction. Ceci est un des cas où l'on remarque une grande tendance à dessiner des courbes continues, c'est-à-dire qu'il existe une idée intuitive très enracinée chez les maîtres, leur concept de fonction est similaire au concept de fonction-continuité à la manière d'Euler.

Commentaires sur les réponses au questionnaire Q7

Les maîtres n'ont pas eu de difficultés à répondre à ce questionnaire. Par contre, on sait que les élèves d'enseignement secondaire ne bénéficient pas de cette capacité (Duval, 1988, Ruthven, 1990). Nous pouvons en déduire que les maîtres ont développé une habilité sur la reconnaissance des formes, à condition que la relation soit celle d'un graphe associé à une expression algébrique. Quand le graphe de la fonction est associé à deux expressions algébriques ou plus, des problèmes surgissent pour les maîtres.

Commentaires sur les réponses aux questionnaires Q8 et Q9

Le questionnaire Q9 devait permettre d'observer si les maîtres savaient identifier différentes écritures algébriques d'une même fonction. En général, les réponses des maîtres furent satisfaisantes. Ainsi, par exemple, à la question 2, on demandait si $f(x) = 2$ était égal à $g(x) = \sqrt{4}$, x étant réel. Il y eut 26 réponses correctes.

Analysons la question 12 du questionnaire 8 sur la construction de fonctions; la question demandait la construction de trois fonctions f_1, f_2, f_3 d'une variable réelle, telle que $|f_1(x)| = |f_2(x)| = |f_3(x)| = 2$.

Seulement 6 maîtres ont construit correctement trois fonctions, 10 maîtres ont construit les deux premières ($f_1(x) = 2$ et $f_2(x) = -2$) et ils ont donné une forme algébrique équivalente pour la troisième ($f_3(x) = \sqrt{4}$ ou $f_3(x) = \sqrt[3]{8}$ ...).

Il est important de signaler, d'un côté, que le comportement du succès des maîtres face au questionnaire 9 (identification de fonctions égales), se transforme au moment de mettre à l'épreuve une telle capacité, c'est-à-dire, comme on l'a signalé auparavant dans les commentaires au questionnaire Q6 et dans une autre étude (Hitt, 1994), **les idées intuitives émergeant durant le processus de résolution se convertissent en obstacles, dans ce cas en un obstacle épistémologique. Les maîtres ont tendance à construire des fonctions continues, définies au moyen d'une seule expression algébrique comme ce fut le cas d'Euler.**

Commentaires sur les réponses aux questionnaires Q10 et Q11

Les questions du questionnaire 10 traitent du passage entre une représentation graphique et le dessin d'une bouteille (pour montrer la variation hauteur-volume). On montrait aux maîtres des graphiques dont la variable (indépendante) représentait la hauteur d'un liquide durant le remplissage d'un récipient inconnu, pour certaines questions la surface du liquide était en fonction de la variable hauteur, pour d'autres, le volume du liquide était fonction de la variable.

On analysera deux graphiques. Dans le cas du graphique d'une fonction linéaire hauteur-volume ; les maîtres ont dessiné 24 récipients corrects. Mais quand le graphique était composé de deux segments on a seulement obtenu 11 réponses correctes. Les maîtres savaient qu'il y avait un changement de forme du récipient, mais ils n'ont pas isolé l'étude de la variable (independante) pour la transformer dans le contexte du dessin.

Le questionnaire 11 portait sur le processus inverse. Etant donné le dessin d'un récipient, il fallait esquisser un graphique où la hauteur d'un liquide serait la variable, et où la surface du liquide et le volume devaient être fonction de la hauteur.

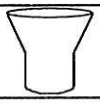
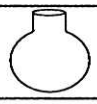
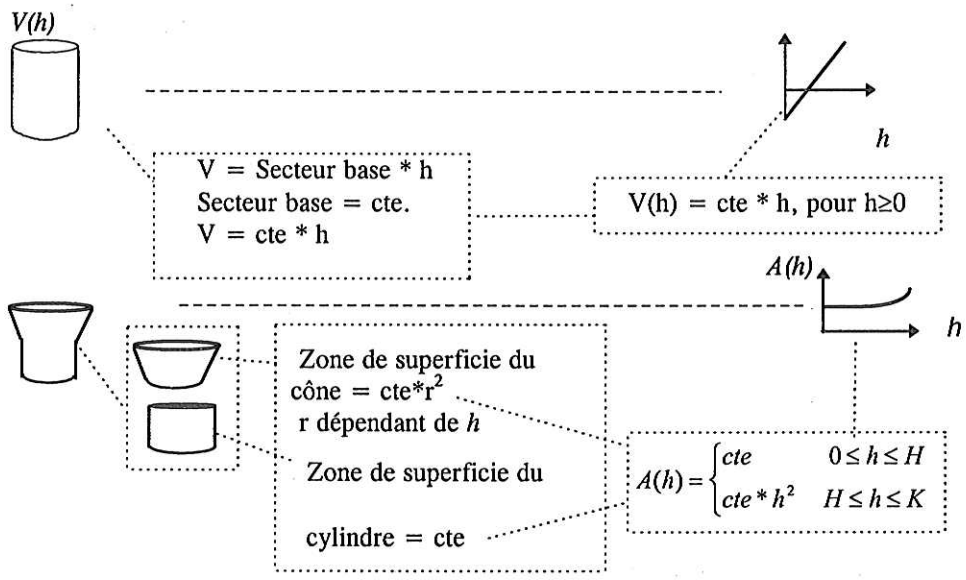
Dessin ↓ graphique			
Correctes	28	5	2
Incorrectes	2	25	28
abstentions	0	0	0

Tableau 2

Analysons trois questions. Dans le cas où on avait montré un cylindre il y avait eu 28 graphiques corrects (hauteur-volume). Mais, lorsqu'on avait changé la forme (voir Tableau 2) il y avait eu 5 et 2 graphiques corrects. Dans la Figure 7 nous pouvons voir la décomposition de la tâche.



Les erreurs les plus fréquentes se sont présentées en associant le récipient avec le graphique : correspondant à la fonction :

$$A(h) = \begin{cases} cte & 0 \le h \le H \\ cte * h & H \le h \le K \end{cases}$$

Fig. 7 La difficulté des maîtres se rencontre dans le passage de la représentation analogique en deux dimensions (dessin) à une représentation non analogique intermédiaire (algébrique) qui lui sert pour dessiner le graphique correspondant.

En résumé, nous pouvons classifier les erreurs comme suit :

- **La forme du graphique et non l'étude analytique de l'information donnée par le graphique, a determiné, chez certains maîtres, le type de récipient.**
- **La forme du récipient et non l'étude du phénomène dans un contexte analytique, a determiné les erreurs de la majorité des maîtres.**

Commentaires sur les réponses au questionnaire Q12

Les maîtres peuvent résoudre correctement les questions qui ont à voir avec l'opération de fonctions en relation avec une seule expression algébrique. Cependant, pour des questions comme celle qui suit :

Vu les fonctions $f(x) = \begin{cases} x+1 & pour\ x \ge 2 \\ -x^3+3 & pour\ x < 2 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} x^3 - x & pour\ x > 2 \\ 5x & pour\ x \le 2 \end{cases}$

Calculer $f(x) + g(x) =$

La plupart donnait comme réponse $f(x) + g(x) = \begin{cases} x^3+1 & pour\ x \ge 2 \\ -x^3+5x+3 & pour\ x < 2 \end{cases}$

sans porter plus d'attention (sauf un professeur) au point pour lequel x = 2.

Commentaires sur les réponses au questionnaireQ13

Le questionnaire 13 fut l'un des plus difficiles. Il a été conçu sur trois questions (ce questionnaire a été présenté à une autre population de maîtres de mathématiques et se

trouve enregistré depuis un autre point de vue dans Hitt, 1989). La première question demandait la démonstration d'un énoncé mathématique et pour les deux autres, il était nécessaire de construire un contre-exemple. Nous avons perçu, en général, que l'enseignement des mathématiques se limitait à enseigner des algorythmes et à un niveau moindre, à faire des démonstrations. L'histoire des mathématiques nous a montré que l'activité mathématique se réalisait au travers de la construction de démonstrations et de contre-exemples. Les mathématiciens, quand ils se trouvent en face d'un énoncé sans savoir s'il est vrai ou non, hésitent entre la recherche d'une démonstration ou d'un contre-exemple.

Les questions posées aux maîtres furent les suivantes : il leur a été demandé de réaliser une démonstration s'ils considéraient que le résultat était correct ou qu'il construisent un contre-exemple.

1) Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En supposant que $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 0$, pour tout x en $\mathbb{R}$. Ceci implique-t-il que $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ pour tout x en $\mathbb{R}$?
Réponses correctes 15 Arguments incorrects 11 Abstentions 4

2) Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$. En supposant que $(f(x))(g(x)) = 0$ pour chaque x en $\mathbb{R}$. Ceci implique-t-il qu'une des deux fonctions est la fonction zéro? C'est-à-dire, ceci implique-t-il que $f(x) = 0$ pour tout x en $\mathbb{R}$, ou que $g(x) = 0$ pour tout x en $\mathbb{R}$?
Réponses Correctes 3 Arguments incorrects 20 Abstentions 7

3) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 0$ pour tout x en $\mathbb{R}$. Ceci implique-t-il que $f(x) = 0$ pour tout x en $\mathbb{R}$?
Réponses correctes 0
Argumentation sans arriver à la construction d'un contre-exemple 3
Argumentations incorrectes 13
Abstentions 14

Ces résultats nous démontrent que les maîtres ne sont pas habitués à construire des contre-exemples. Une analyse des exercices des manuels usuels au Mexique, confirme que les capacités de construction de contre-exemples ne sont pas développées. En général, tout énoncé apparaissant dans ces manuels est présenté comme vrai et il est établi que doit être réalisé, soit un algorythme soit une démonstration. La difficulté dans la construction des deux contre-exemples pour les énoncés 2) et 3), avait rapport direct avec la "rupture de l'expression algébrique associée à la fonction", c'est-à-dire se détachant de l'idée intuitive de fonction à la manière d'Euler et, proposant comme

exemple, pour l'énoncé 2), le contre-exemple, $f(x) = 0$ si $x \in \mathbf{Q}$ et $f(x) = 1$ si $x \notin \mathbf{Q}$ y $g(x) = 1$ si $x \in \mathbf{Q}$ et $g(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$. Le troisième énoncé est également faux, et il peut être donné un contre-exemple comme suit : $f(x) = -x + 1$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$.

Discussion

L'activité des maîtres est en général efficace pour le passage d'un registre à un autre pour lequel il est demandé un devoir de caractère algorythmique, elle ne l'est plus quand le devoir à réaliser n'est pas du même style, où est recherchée l'articulation de plusieurs registres. Ceci entre certainement en rapport avec les activités que propose régulièrement le professeur dans la classe, lesquelles sont principalement de caractère algorythmique, sans prendre en compte la promotion de l'articulation de différents registres. Ainsi, on peut articuler des registres ou réaliser des procédures à l'intérieur d'un registre dans des cas comme ceux décrits ci-après : expressions algébriques à graphes et vice-versa (questionnaires Q6 y Q7), tables de graphes (Q3), évaluation de fonctions (Q5); ils peuvent réaliser des opérations avec des fonctions exprimées par une seule expression algébrique (Q12), identifier des fonctions (Q9), et fournir une définition de fonction usuelle d'un manuel scolaire (Q4 y Q14). Le pourcentage élevé de réponses justes des maîtres aux questionnaires mentionnés, nous permet de connaître le niveau de leurs connaissances, en opposition avec celui de leurs élèves. Par exemple, les maîtres au questions de Q12 ont bien réussi dans la reconnaissance des représentations graphiques de fonctions (passage de la représentation graphique à l'algébrique) ce qui n'a pas été le cas avec des élèves du secondaire (résultats obtenus par Ruthven, 1990).

Les maîtres de mathématiques ont une définition de fonction isolée des différentes représentations. Ils n'ont pas utilisé la définition en termes de relation entre variables comme celle qu'a fournie Euler. Les définitions de fonction les plus fréquentes chez les maîtres ont été celles reliées à la "règle de correspondance" et à "l'ensemble de couples ordonnés". La tâche d'identification des fonctions ne représente pas un problème pour les maîtres; cependant, dans une activité plus complexe de construction de fonctions, le blocage (obstacle épistémologique) que forment les fonctions continues définies par une seule expression algébrique, ne leur permet pas (pour une grande majorité d'entre eux) de construire des fonctions différentes.

Chez un tiers de la population, en regardant le graphique de quelques coniques, l'existence d'une expression algébrique (équation) a été plus forte que l'argument géométrique (ligne verticale) pour vérifier si une courbe était ou non le graphe d'une fonction. Aussi, la lecture des graphiques pour identifier le domaine de définition d'une

fonction et les images (sous-concepts du concept de fonction) a été difficile pour les maîtres.

Comme une conséquence de cette étude, nous croyons que l'enseignement de la définition de fonction en termes de relation entre variable, paraît adapté à effet d'enseignement de niveau pré-universitaire. Il est important d'y inclure les sous-concepts du concept de fonction (Domaine, Image, Contre-Domaine, Graphe), avec différents registres.

Le niveau de connaissance des maîtres est évidemment plus élevé que celui des élèves. Cependant, le fait qu'ils commettent des erreurs et qu'ils ne se rendent pas compte qu'ils sont quelquefois face à des situations contradictoires, représente un problème important. Le professeur dispose des éléments pour résoudre un problème, par exemple dans l'exercice de passer du dessin d'une bouteille à un graphique et vice-versa. Le problème n'est pas que le maîtres ne puisse effectuer un développement algébrique lui permettant d'arriver au résultat, sinon qu'en s'appuyant sur une intuition, il s'estime satisfait sans considérer nécessaire de réaliser un développement algébrique lui permettant de comparer son appréciation globale avec son résultat algébrique. Pour cela, les maîtres n'ont pas identifié et isolé la variable en jeu dans le but de la contextualiser dans une représentation soit d'un dessin soit d'un graphique (Fig. 7).

L'erreur commise par les maîtres, ainsi que nous l'avons mentionné, est qu'ils ont eu une vision rapide et globale de la situation ; ils ont développé un processus mental en décomposant la figure en deux parties, et cependant, avec la dernière figure, ils sont restés sur une vision synthétique opposée à une pensée analytique (en suivant l'idée de Fischbein, 1987, p. 53). Leur idée intuitive de la situation a été plus forte qu'une pensée analytique qui aurait pu les mener au résultat correct.

Si une connaissance liée à un concept est stable chez un individu, il devrait articuler les différentes représentations du concept sans contradiction. Les maîtres ont montré que leur connaissance sur les fonctions était faible.

Références

Duval R. (1988) Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, p. 57-74.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, pp. 37-65.

Eisenberg T. (1992) On the development of a Sense for Functions. *In the Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy,* Edited by Guershon Harel & De Dubinsky. MAA, Series, USA.

Euler L. (1796) *Introduction à l'Analyse Infinitésimale par Leonard Euler*. Traduction de J. B. Laby. Editorial Chez Bachelier, 1987, Paris, France.

Fischbein E. (1987) *Intuition in Science and Mathematics : An Educational Approach*. Editorial : D. Reidel Publishing Company.

Hitt F. (1989) Obstacles Related to the Concept of Function. *British Society for Research into Learning Mathematics*. England.

Hitt F. (1989) Construction of function contradiction and proof. *Proceedings International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Paris, Vol. 2, p. 107-114.

Hitt F. (1994) Teachers' difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Vol. 16, Number 4, pag. 10-20.

Markovits Z. , Eylon B., Bruckheimer M. (1986) Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematiques*, 6, 2, june, pp. 18-28.

Nicholas, C. P. (1966) A dilemma in definition. *The American Mathematical Montly*,Vol. 73, pp. 762-768.

Ruthven K. (1990) The influence of graphic calculator use on traslation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 21, pp. 431-450.

Vinner S. (1983) Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, pp. 293-305.

Vinner S. et Dreyfus T. (1989) Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (4), pp. 356-366.

Youschkevitch A. (1976) The concept of function up to the middle of 19th century. *Archive of Exact Sciences*, 16, pp. 36-85

LE DISCERNEMENT DES PLANS DANS UNE SITUATION TRIDIMENSIONNELLE.

Marie-Paule ROMMEVAUX

Can pupils learn to see in 3D-space ? One aim of the present paper is to answer this question.
Interactions between representations used to resolve a 3D-problem, are put forward and analysed according to historical and didactical studies. In this resolution, importance of recognition of various planes is assessed through mathematical complexity and heuristic complexity. Variations in this double complexity allowed us to construct a learning sequence. Its three phases and the different representations used in interaction during these are described below.

Peut-on apprendre aux élèves à voir dans l'espace ? C'est à cette question que nous essayons d'apporter une réponse.
Il apparaît que les principales difficultés rencontrées dans la résolution d'un problème de géométrie tridimensionnelle se situent dans le discernement des différents plans entrant dans les situations étudiées et représentées. La complexité mathématique, due aux diverses définitions d'un plan, et la complexité heuristique, due aux représentations en perspective des situations tridimensionnelles, ont été évaluées. Leurs interactions sont schématisées par un double indice dont les variations permettent d'analyser les difficultés d'un problème de géométrie tridimensionnelle. Elles nous ont permis de construire une séquence d'apprentissage. La séquence, dont nous détaillerons les trois phases, a été expérimentée et évaluée. Nous donnerons enfin quelques-uns des résultats obtenus.

Le travail présenté a pour objet l'étude - du point de vue cognitif - des interactions entre représentations utilisées en géométrie tridimensionnelle.

L'importance de cette partie des mathématiques - que ni les élèves ni les professeurs n'apprécient -, en plus des applications directes qu'elle peut avoir, se situe pour nous dans les interactions entre perception et savoir discursif. Les fréquents changements de registre que cet apprentissage met en œuvre sont pour le développement des connaissances mathématiques *pour tous* un atout certain. Si les figures de la géométrie bidimensionnelle paraissent livrer du *premier coup d'œil* toutes leurs propriétés - ce qui nous le savons n'est pas exact -, tout le monde s'accorde pour reconnaître aux figures de géométrie tridimensionnelle une certaine complexité. Après l'échec fréquent de cet apprentissage le découragement amène généralement la constatation suivante : *il y a ceux qui voient et ceux qui ne voient pas.*

Qu'est ce que cela signifie pour les élèves résolvant un problème de géométrie tridimensionnelle ? Il ne s'agit pas de *voir dans un espace de dimension trois* mais de voir trois dimensions sur une figure géométrique qui n'en a que deux. L'examen des étapes nécessaires à la résolution d'un problème de géométrie tridimensionnelle montre une succession de sélection de plans, résolution de problèmes plans et coordination de ces résultats. *Voir dans l'espace* peut donc se manifester par cette aptitude à discerner les plans sur une représentation non tridimensionnelle.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
6 (1998) (p. 27- 65) - IREM de Strasbourg

Comment en est-on arrivé des objets du monde sensible à la géométrie tridimensionnelle et aux représentations de situations spatiales ? Une rapide incursion dans l'histoire des mathématiques nous a donné peu de renseignements sur les supports matériels ou visuels utilisés par les mathématiciens créateurs des règles de la géométrie tridimensionnelle. Il faut attendre le XVII^{e} siècle pour trouver un exposé théorique de la perspective parallèle et les véritables théories de la représentation sont dues à G.Monge (1746-1818) dont il ne faut pas oublier qu'il a débuté sa carrière dans un atelier de dessin et de fabrication de maquettes. L'importance des objets matériels, que cette dernière remarque souligne, n'a pas échappé aux chercheurs qui se sont penchés sur cet apprentissage. Nous analyserons le rôle de ces objets dans leurs expérimentations avant de donner les éléments de notre analyse et les détails de la séquence d'apprentissage que nous avons expérimentée.

Les élèves auxquels nous nous sommes adressée sont des élèves de seconde (15-16 ans), sans tenir compte de l'âge ou de la classe, cet apprentissage s'adresse à des personnes qui peuvent *identifier* sur une représentation en perspective parallèle un solide connu, qui connaissent certaines des propriétés de ces représentations - conservation du parallélisme, du milieu etc. -, mais ne peuvent se servir de ces figures pour *traiter* un problème sur la configuration représentée.

I - Introduction.

Pour tenter de comprendre les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle nous commencerons par nous interroger sur les processus mis en œuvre dans la résolution d'un problème relevant de cette partie.

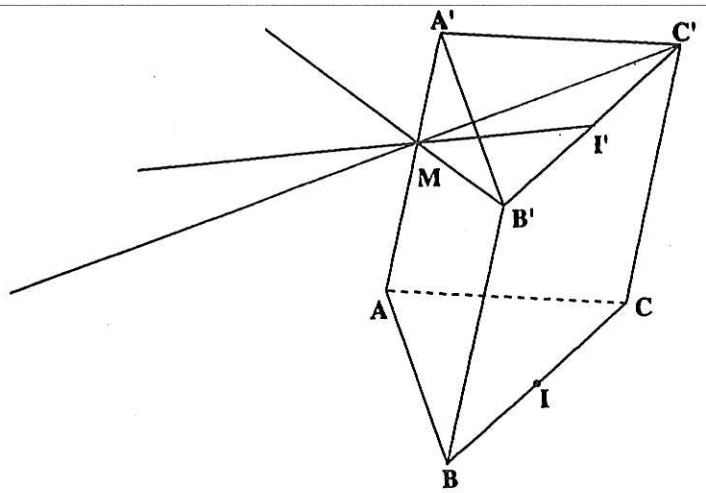
Prenons un exemple :

> *ABCA'B'C'* est un prisme de base *ABC* triangulaire, les arêtes *[AA']*, *[BB']* *et* *[CC']* sont parallèles.
> *I* est le milieu de *[BC]*, *I'* est le milieu de *[B'C']* et *M* est un point de l'arête *[AA']*.
> a) Déterminer l'intersection de la droite *(MC')* et du plan *(ABC)*.
> b) Déterminer l'intersection de la droite *(MB')* et du plan *(ABC)*.
> c) Déterminer l'intersection de la droite *(MI')* et du plan *(ABC)*.
> d) Montrer que les trois points ainsi trouvés sont alignés sur une droite parallèle à une arête du prisme.

L'intersection d'une droite et d'un plan est un point, figure géométrique de **dimension zéro.** Déterminer cette figure va demander la construction d'éléments de dimension supérieure, au moins un segment - de **dimension un** -, dont il peut être un point. Le plus souvent les points sont définis comme intersection de droites, mais, nous sommes dans un espace de **dimension trois** dont les éléments structurants sont **les plans**, de **dimension deux.**

Une première difficulté rencontrée par les apprenants déjà familiarisés avec la géométrie «plane» est le changement de dimension des éléments structurants. Les droites deviennent des éléments «incontrôlés» de cet espace dont l'ossature est faite de plans qui ne peuvent être représentés que par des couples de droites ou, des figures fermées particulières rencontrées dans les polyèdres.

Abordons le problème proposé et représentons la situation en perspective parallèle. La figure-source[1] n'est formée que d'un prisme triangulaire dont les sommets et les milieux de certaines arêtes sont nommés. Le texte s'intéresse aux droites *(MC')*, *(MB')* et *(MI')*, cette figure et les données sont représentées ci-dessous :



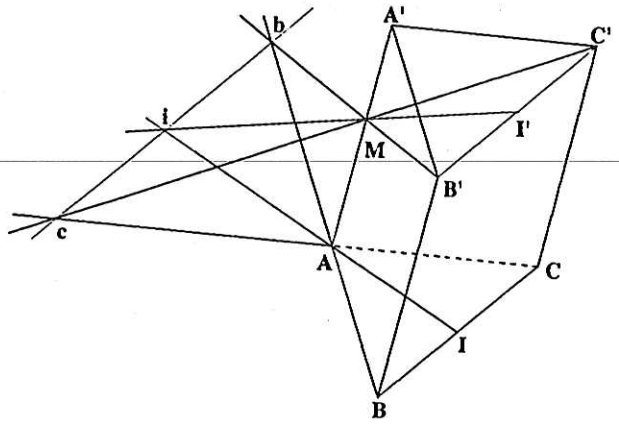
Projection parallèle sur un plan parallèle à $(ACC'A')$.

Cette représentation illustre ce que nous disions précédemment, ce ne sont pas les droites qui permettent de structurer la figure mais les plans, représentés ici par deux triangles et trois parallélogrammes. Répondre aux questions posées va demander une **montée en dimension**, il va falloir plonger chacune des droites tracées dans un plan qui la contient et qui coupe le plan *ABC*. Si les plans des faces s'imposent pour deux d'entre elles, une section est à déterminer pour la troisième. Le parallélogramme section est facile à déterminer, ses quatre sommets sont donnés dans le texte. Nous avons représenté ci-dessous la figure livrant la solution.

---

[1] Nous appelons figure-source la figure obtenue en représentant les figures élémentaires - points, droites, etc. - données dans la question. Cette figure peut être effectivement représentée sur un support matériel ou être imaginée. Elle devra peut-être être complétée pour devenir une figure facilitant l'appréhension opératoire de la situation. Toutes les
figures que nous donnons sont des **figures géométriques : complexes de traits et d'hypothèses**, les ambiguïtés susceptibles d'apparaître dans les représentations en perspective parallèle sont levées par les textes qui les accompagnent. Si certaines hypothèses, dans ce texte, ne sont pas explicitement rappelées, c'est que nous voulons insister sur un aspect **perceptif** des figures.

LE DISCERNEMENT DES PLANS.



Dans ce cas la figure-source a des qualités heuristiques que les élèves peuvent apprendre à exploiter pour résoudre les problèmes de géométrie tridimensionnelle. Les plans des faces y sont **immédiatement perceptibles** - pour qui cherche à les voir -, le plan *AA'I'I* de section est lui **directement discernable** [2]. Déterminer les points *b, c, i* n'est pas immédiat, il faut en effet **choisir** la droite à prolonger et pour cela avoir présent à l'esprit que la droite d'intersection de deux plans contient **tous** leurs points communs. Les points *b, c, i* déterminés il s'agit de constater sur la figure qu'ils sont alignés, que la droite qui les porte est parallèle à *(BC)* ou *(B'C')* et, de le démontrer. C'est encore une **montée en dimension** qui va permettre de résoudre ce problème. Plonger les points *MB'C'I'bci* dans un même plan est immédiat, la réponse est donnée par l'intersection par un même plan de deux plans parallèles.

Nous avons essayé de situer dans cet exemple les difficultés rencontrées par les élèves lorsqu'ils résolvent un problème simple de géométrie tridimensionnelle. Ceci va nous permettre de mieux expliquer les choix qui ont présidé à la séquence d'apprentissage que nous avons conçue et à l'analyse théorique qui l'accompagne.

Les différentes phases de résolution du problème précédent montrent la succession de *sélection de plans* - face du prisme ou section -, *résolution de problèmes plans* - ici intersection de deux droites - et enfin *coordination des résultats plans* - les trois points trouvés sont alignés. Les problèmes plans rencontrés au début de l'apprentissage sont en général très simples, la difficulté principale est donc la sélection des plans pertinents pour la résolution de ces questions planes. **Quels registres de représentation utiliser, en plus du registre discursif** - indispensable en géométrie - **pour faciliter ces opérations ?**

Les représentations tridimensionnelles sont souvent évoquées et utilisées au tout début de l'apprentissage. Mais, elles ne peuvent remplir que des fonctions de simulation et de communication et non la **fonction de traitement** [*Duval,* 1995.b]. Cette dernière fonction, essentielle dans la résolution de problèmes ne peut être remplie que par les représentations sémiotiques et

[2] Voir le § III-2

trois nous savons qu'il y a perte d'informations, de plus la production de ces représentations doit obéir à des règles dont on veut favoriser l'apprentissage.

Résumons ce «cercle vicieux» : les représentations en perspective parallèle paraissent les plus aptes à remplir une fonction de traitement, comment faire pour que les élèves puissent les utiliser dans ce sens ? Ceci ne paraît pas spontané et cette constatation donne lieu aux appréciations rituelles : *il y ceux qui ne voient pas dans l'espace et ceux qui voient* ... C'est-à-dire ceux qui sont capables de distinguer représentant -bidimensionnel- et représenté - tridimensionnel-, qui conçoivent le feuilletage de l'espace tridimensionnel en plans de différentes directions et sont capables de les discerner sur une représentation bidimensionnelle. La question qui se pose alors est :

Peut-on apprendre aux élèves à voir dans l'espace ?

Nous avons essayé de trouver dans l'histoire des mathématiques les source d'inspiration des mathématiciens créateurs des concepts de la géométrie tridimensionnelle, centrant notre recherche sur les types de représentation utilisés. La pauvreté des renseignements recueillis nous a conduite vers les utilisateurs des mathématiques, nous avons trouvé là quelques renseignements intéressants. Nous rendrons compte ensuite rapidement de quelques travaux didactiques sur ce sujet en mettant en évidence l'articulation des différents types de représentation en présence. Nous aborderons alors nos propres travaux.

II - État des recherches.

1 - Dans l'histoire.

Le premier fait qui ressort de notre «survol historique» [*Rommevaux,* 1997. p 45-80] est la distance temporelle qui sépare le corpus mathématique nécessaire aux théories de la représentation, déjà en place dans les *Éléments* d'Euclide, de leur émergence en tant que telles. Le second fait frappant est que cette théorisation a été préparée et mise en place par des praticiens : peintres, tailleurs de pierres...

Les traités mathématiques ne nous donnant pas beaucoup d'indications sur les fonctions heuristiques des éventuelles représentations nous avons regardé ce que les utilisateurs de géométrie tridimensionnelle que sont les constructeurs ou architectes pouvaient nous apprendre. Notre quête a été plus riche dans ce domaine, même si, nous le savons, les artisans, surtout les compagnons, conservaient secrets leurs savoir-faire. Certains écrits comme le *Carnet de Villard de Honnecourt* (XIII^{e} siècle), nous permettent d'entrevoir ce que pouvaient représenter pour les bâtisseurs de cathédrales certaines constructions et représentations géométriques. Si certaines figures ont, d'après R.Bechmann [*Bechmann,* 1991], un caractère ésotérique d'autres sont proprement géométriques. Nous y trouvons par exemple le moyen de déterminer le centre d'une colonne «que l'on ne voit pas tout entière», celui de «tailler des pendants réglés» etc. Nous avons essentiellement retenu dans ce *Carnet* la présence de **gabarits** dont l'usage était fréquent à cette époque :

> On appelait *moles* d'une part les modèles des différentes faces des pierres et, d'autre part, également, ce qu'on appelle aujourd'hui *gabarits*, indiquant la section et qui servaient pour les profils de moulures, de nervures, de bandeaux, de corniches, de pilastres, etc. [Bechmann, 1991 p.52]

Ces modèles, encore utilisés de nos jours, servent à conserver, ou vérifier, la forme d'une section perpendiculaire aux génératrices d'une colonne ou autre élément de forme cylindrique, ou servent aussi comme des pochoirs pour reproduire des formes dessinées sur un support plan. L'usage que nous en avons fait avec les élèves est plus «symbolique» : les gabarits nous permettent de **plonger l'espace 2D dans l'espace 3D.**

Nous trouvons dans le *Carnet* de Villard de Honnecourt les traces d'une géométrie pratique et appliquée qui va évoluer vers un savoir plus élaboré et discursif avec A.Dürer et Philibert de l'Orme et être finalement théorisé par G.Monge. Esquissons rapidement cette évolution.

La géométrie était une science importante pour les peintres de *Quattrocento* et de la Renaissance, on retient généralement de leurs travaux l'invention de la perspective linéaire, ce n'est pas pour cet aspect que nous en évoquerons deux d'entre eux, mais pour des remarques moins «purement mathématiques».

E.Panofsky [*Panofsky,* 1987 p. 373] souligne le fait que malgré ses connaissances mathématiques et ses qualités de géomètre, A.Dürer (1471-1528) retient pour la construction des coniques la méthode des projections parallèles. D'ailleurs, comme J.Peiffer le rappelle, il considère comme prérequis à l'étude de sa géométrie d' :

> Avoir bien compris comment toute chose doit être tracée dans son plan et dans son élévation, selon la méthode que les tailleurs de pierre pratiquent tous les jours. [*Peiffer,* 1993 p. 11]

A.Dürer dans *Les instructions pour la mesure, à la règle et au compas, des lignes, plans et corps solides*, a le souci de **transmettre** des connaissances géométriques : pour se faire «bien comprendre» il donne *la procédure et le procédé* :

> Afin que «les jeunes aient sous les yeux et intériorisent ces images», Dürer cherche à représenter graphiquement toutes les figures décrites dans le livre. [*Peiffer,* 1993 p. 10]

La nécessité de représenter un même objet dans deux **registres sémiotiques** différents est ici manifeste.

Le souci de prendre en compte les méthodes utilisées par les praticiens et de leur faciliter la tâche en retour est aussi manifeste dans certains ouvrages de Piero della Francesca (1415-1492). Le *Libellus de quinque corporibus regularis* (1482) doit son originalité au :

> lien qu'il établit entre la géométrie euclidienne et les mathématiques de l'abaque, c'est-à-dire entre les mathématiques des savants et celles des techniciens. Piero est conscient d'être parmi les premiers à s'y essayer : dans sa dédicace à Guidobaldo de Montefeldre, le seigneur d'Urbino où il vivait, il affirme que la nouveauté de son travail réside dans la transposition des «choses» d'Euclide et des géomètres vers les arithméticiens. [*Gamba & Montebelli,* 1996 p.68]

Mais, le *Libellus* ne contient pas que des calculs [3] :

> Si Piero transpose Euclide dans le domaine de l'abaque, il utilise aussi ses talents artistiques en géométrie. L'inclusion de l'icosaèdre dans le cube est «vue» et «tracée», avant d'être démontrée, à partir de propriétés géométriques. Piero dessine une **perspective à lignes de fuite parallèles** plutôt qu'une perspective à lignes de fuite convergentes, selon le procédé inventé par Brunelleschi et Alberti, et théorisé par Piero dans son propre traité de perspective, parce que **le raisonnement**

[3] Nous soulignons..

> **mathématique est ainsi plus clair** : c'est une innovation remarquable. Piero est l'un des fondateurs du dessin technique et géométrique moderne : si l'on compare ses dessins avec les figures géométriques qui illustrent les éditions d'Euclide de l'époque, on constate des différences abyssales. Son œuvre, comme celles d'autres auteurs, reflète la demande d'un nombre croissant de techniciens qui souhaitaient disposer de constructions graphiques non équivoques et fiables. [*Gamba & Montebelli,* 1996 p. 70]

Cette longue citation montre la nécessité des représentations dans la transmission des connaissances, et met l'accent sur l'intérêt des représentations en perspective parallèle. Cet intérêt est celui que nous lui accordons encore aujourd'hui : ces représentations **ne reconstituent pas ce que nous voyons** mais facilitent les traitements mathématiques ou pratiques. Notons que les représentations en perspective parallèle furent explicitement théorisées, mais «à contre-cœur» par le jésuite Jean Dubreuil en 1651 [*Rommevaux,* 1997 p. 45 et 75]

Autre figure marquante pour notre propos : «le premier architecte français» , Philibert de l'Orme (env. 1510 ? - 1570). Fils d'un maître maçon il perpétue les traditions du passé et les adapte en leur donnant des bases rationnelles et non plus empiriques. Il utilise les mêmes *instruments* que Villard de Honnecourt mais leur donne des fonctions différentes. Les maquettes et les gabarits sont utilisés dans les chantiers pour **anticiper, prescrire et transmettre** [4]. P.Potié souligne ces fonctions dans son ouvrage [*Potié,* 1996 p. 68 et 69], nous retiendrons ici que Philibert de l'Orme en révélant dans un ouvrage l'art du tracé des gabarits choisit d'exposer la :

> *méthode* propre à faire de son *trait de géométrie* l'outil apte à ***conjoindre théorie et pratique*** en la figure unique de son art stéréotomique. [*Potié,* 1996 p. 91]

La stéréotomie et le tracé des gabarits nécessitent une virtuosité très grande dans l'art du discernement des plans et du changement de plans. Virtuosité dont fait preuve Philibert de l'Orme, particulièrement dans la construction de la trompe d'Anet. Il a exposé cette construction dans l'un de ses traités.

> Afin de valoriser cette leçon, il offre ensuite au lecteur la seule vue en perspective présente dans le traité. On remarquera au passage l'étonnant manque d'intérêt de Philibert de l'Orme pour une discipline géométrique voisine de l'art du trait. Il est possible qu'il ne maîtrisât pas suffisamment la perspective pour l'employer couramment. Il est possible également qu'il n'en ait pas eu l'usage, **préférant ses maquettes au savoir-faire des peintres.** [*Potié,* 1996 p. 91]

Théorie et pratique ont à partir de cette époque de plus étroites relations, comme nous allons rapidement le montrer en évoquant l'œuvre de G.Desargues (1591-1661) et de G.Monge (1746-1818). Nous retiendrons de Girard Desargues, dont le nom est attaché à la géométrie projective, qu'étudiant les techniques graphiques utilisées dans différents domaines pratiques : perspective, taille des pierres, gnomonique, il :

> avait réussi à discerner clairement les principes géométriques qui servaient de base à ces différentes techniques. Et, tandis que les épures de la coupe des pierres l'amenaient à pressentir, après Dürer et avant Monge, les procédés de la géométrie descriptive, la perspective pratique et la gnomonique le conduisaient à étudier, d'une façon rigoureuse et approfondie, les propriétés théoriques de la perspective géométrique. [*Taton* , 1951 p. 95]

---

[4] La géométrie des constructions, la confection des maquettes que l'on retrouve dans de nombreuses *Maisons de l'œuvre* de cathédrales, renvoient à une situation pratique : les unités n'étaient pas universelles et les chantiers duraient plusieurs décennies. Il était nécessaire de laisser aux successeurs des représentations utilisables.

Terminons cette partie historique en évoquant la carrière de Gaspard Monge, créateur de presque toutes les méthodes utilisées en géométrie tridimensionnelle, qu'elles soient graphique - géométrie descriptive - ou symboliques - géométries différentielle et analytique. B.Belhoste et J.Sakarovitch insistent dans leurs articles [*Belhoste,* 1989 ou 1997], [*Sakarovitch,* 1995] sur la formation technique et pratique de ce futur mathématicien.

> À l'école de Mézières, il a commencé comme «artiste»: **il dessine, coupe des pierres et des bois et prépare des modèles en plâtre à la gâcherie** ; son habileté est remarquable. **Toute sa vie il conservera ce sens du concret** qui le rattache au monde de l'échoppe et de l'atelier dont il est issu. [*Belhoste,* 1989 p.67]

G.Monge saura théoriser ces pratiques et essentiellement celles de la taille des pierres :

> La géométrie descriptive, comme la géométrie différentielle de Monge, emprunte à la taille des pierres sa définition des surfaces, ou plus exactement donne une définition théorique de la notion de surface qui dérive directement de la manière dont celles-ci sont obtenues par le tailleur de pierres. [*Sakarovitch,* 1995 p.86]

Nous avons essayé de donner ici quelques éléments à l'appui de ce que nous affirmions au début :nous trouvons dans les chapitres XI et XIII des *Éléments* les théorèmes essentiels en géométrie tridimensionnelle, les théories de la représentation s'appuyant sur ces théorèmes ne sont apparues que par l'intervention de praticiens : peintres épris de géométrie, constructeurs, architectes, tailleurs de pierres, dessinateurs.

L'apprentissage de cette partie des mathématiques ne devrait-il pas lui aussi prendre en compte l'interaction entre théorie et pratique ?

Ce sont ces interactions que nous avons essayé de mettre en évidence dans les études didactiques consacrées à l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle que nous allons évoquer maintenant.

2 - Dans la didactique.

Le projet des différents auteurs est toujours le même : trouver un chemin facilitant le franchissement des étapes d'un parcours allant de l'espace sensible qui nous entoure -tridimensionnel - à l'espace du dessin - bidimensionnel - qui seul autorise les traitements, ceux-ci permettant, en retour, d'appréhender l'espace géométrique tridimensionnel et ses propriétés. Le cheminement historique que nous avons esquissé à grands traits montre que le chemin est long. Il va se construire, pour un individu, tout au long de la découverte de l'espace sensible et de la géométrie. Nous avons retenu dans les travaux sur ce sujet certaines études marquant les différentes étapes de cette initiation. Notre choix a été guidé par les fonctions que les auteurs attribuaient aux types de représentations en présence et à l'étude de leurs interactions.

Donnons des exemples de ces travaux en prenant comme fil conducteur l'âge des apprenants.

Lorsque les enfants sont à l'école maternelle ou primaire, les expérimentations utilisent des objets matériels qui seront dessinés - modèle à représenter - mais aussi **manipulés** pour résoudre de petits problèmes. La **vue** et le **toucher** sont sollicités, ces deux sens vont permettre la «naissance de la fonction symbolique des représentations». Les représentations, analogiques

dans certains cas, non analogiques dans d'autres, varient suivant les tâches et les moyens graphiques dont disposent les enfants.

Si J.Caron-Pargue s'intéresse aux différents modes de codage mis en œuvre par les enfants, étudie leurs évolutions suivant l'âge et la tâche - avec ou sans manipulation de l'objet représenté - [*Caron-Pargue,* 1981 et 1987], d'autres expérimentations comme celles de A.Bessot et M.Eberhard [*Bessot & Eberhard,* 1987a et 1987b] vont jouer sur les tâches et les objets pour faciliter l'émergence d'un certain type de codage, en l'occurrence le repérage orthogonal de la géométrie analytique.

Nous retiendrons de ces études les apports positifs et les obstacles dus à ces manipulations. La citation suivante a accompagné tous nos travaux :

> Manipuler, c'est d'après le dictionnaire, «remuer, déplacer, faire fonctionner un objet» ; et par là même, l'explorer, le transformer. Mais on peut concevoir une manipulation qui ait lieu de façon médiate, sur des substituts de l'objet. Nous qualifierons la première de «matérielle» et la seconde de «symbolique». La **manipulation matérielle** entraîne un certain afflux d'informations vers le sujet ; mais ces informations seront-elles toujours adéquates à la tâche ? Cet afflux va-t-il entraîner des conséquences au niveau de la sélection, de l'organisation et de la réorganisation des informations ? Dans la **manipulation symbolique,** le substitut filtre les informations de telle ou telle façon suivant sa nature ; ce filtrage, s'il est approprié, peut constituer un apport économique intéressant pour le sujet. Mais d'autre part, le substitut de l'objet véhicule lui-même des informations qui lui sont propres, et dont l'articulation avec celles qui proviennent de l'objet peut être souhaitable ou non suivant la nature ou le but de la tâche à accomplir. [*Caron-Pargue,* 1981 p. 7-8]

Trois tâches sont primordiales dans cet apprentissage : prendre toutes les informations, les organiser et surtout **en abandonner.** Il y a là une question de choix qui ne peut être résolue de façon unique. Nous voyons d'ailleurs que l'âge[5] n'est pas dans ces cas là déterminant et que l'adéquation du traitement de la représentation à la tâche doit s'apprendre.

S'adressant à de très jeunes enfants les expérimentateurs essaient d'étudier les différents codages qu'ils mettent «spontanément» en œuvre pour traiter les problèmes proposés. Dans les expérimentations que nous allons évoquer maintenant il y a une **intention d'enseignement** qui ne figurait pas dans les expérimentations précédentes. Les **tâches de communication** d'assemblages de cubes proposées vont obliger les élèves à transmettre une information complète, ces tâches vont faire apparaître des représentations non analogiques - prise en compte d'un plan de référence et codage numérique -. Jouant sur les variables cubes accrochables ou non-accrochables et sur le nombre de cubes à la disposition des élèves, A.Bessot et M.Eberhard vont essayer de les conduire de la manipulation des cubes, à des représentations graphiques non normalisées[6] et à un repérage symbolique. Elles constatent, au

---

[5] Voir dans [*Rommevaux,* 1997 p. 122-123] les résultats que nous avons retenus des travaux de R.Baldy avec des adultes en formation.

[6] Une représentation normalisée très présente dans notre environnement : la perspective est quelquefois utilisée par les enfants, mais aussi bien J.Caron-Pargue que A.Bessot et M.Eberhard soulignent sa non-maîtrise et son peu de spontanéité dans les productions des enfants.

cours du déroulement de ces expérimentations[7] que le référentiel évolue et tend à **se détacher du sujet** dans la succession des situations-problèmes. Ce qui leur permet,

> en jouant sur la situation de communication (et sur des familles de polycubes), d'envisager une suite de situations-problèmes où l'élève construise, comme solutions, des représentations graphiques non normalisées pour aboutir à un repérage dans l'espace faisant intervenir trois coordonnées : ce repérage nécessite un détachement du référentiel par rapport à l'objet lui-même, dernier passage du graphique au symbolique. [*Bessot & Eberhard* 1987a p. 70]

Nous retiendrons de ces expérimentations l'usage fait des objets matériels qui gardent le statut central qu'ils peuvent avoir dans la vie industrielle ou artisanale. Leur manipulation est motivée par les enjeux de la situation et nous ne trouvons pas dans ces articles certaines des considérations qui en font des objets d'étude mathématique peu prisés. Nous retiendrons également l'importance qui est donnée à deux de nos sens : la vision et le toucher[8].

Il faut néanmoins qu'en tant qu'«êtres infiniment plats» [9] nous apprenions à représenter sur un plan les solides tridimensionnels. C'est en général au collège - entre 11 et 15 ans - que se place cet apprentissage. C'est aussi à ce moment là que la contradiction qui le sous-tend apparaît de façon plus aiguë. Comment initier les élèves à ces représentations sans donner les règles qui les justifient et permettent de les interpréter ?

Deux activités essentielles sont expérimentées : l'exécution de représentations en perspective parallèle - de l'objet au dessin - et la «lecture» de représentations de même type - du dessin à l'objet. L'objectif est de pouvoir aller d'un dessin de l'objet à un autre dessin de l'objet sans le passage par l'objet matériel lui-même.

L'équipe dirigée par G.Audibert a beaucoup travaillé dans ce domaine. Partant d'observations faites au travers des problèmes «FIL» et «SEC» les auteurs ont constaté que la perspective cavalière paraissait la mieux adaptée aux élèves pour traiter les problèmes de géométrie euclidienne et l'objectif de leur travail a été de mettre en place une séquence d'apprentissage de cette technique de représentation.

Dans le paragraphe précédent nous avons noté qu'historiquement cette remarque avait été faite. Les auteurs s'attachant à cette question qu'elle soit scolaire ou technique reconnaissent aux perspectives parallèles des qualités qui facilitent les traitements géométriques [*Comar*, 1994 p. 59]. Mais, il ne faudrait pas suggérer que cette représentation reproduit notre «vision» de l'objet représenté, elle n'en est qu'une *image* :

---

[7] Celles-ci ont été faites avec des élèves différents, de l'école primaire au collège de 1982 à 1987.

[8] Nous insistons dans [*Rommevaux*, 1997 p. 74-75 et 91-94] sur l'importance du toucher dans l'appréhension des formes tridimensionnelles.

[9] Gaston Julia évoquant l'œuvre de Louis Antoine, géomètre qui venait de disparaître, déclarait en 1971 : «*Tout ce que l'on peut prévoir comme relevant du bon sens est exact dans le plan, et Antoine en donne le premier, une démonstration rigoureuse, mais est toujours faux dans l'espace à plus de deux dimensions. Notre intuition géométrique est surtout celle d'êtres infiniment plats.*» [*Nordon*, 1992. p.7.]

S'il n'existe aucune solution «exacte» pour fixer l'espace sur un plan, c'est que toute image - même fondée géométriquement - transforme les choses ; elle en privilégie certains aspects. [*Comar,* 1994. p.82]

Le fait que la perspective parallèle est une projection sur un plan et non une reproduction de l'image visuelle que l'on a de l'objet ne nous paraît pas suffisamment prise en compte dans l'apprentissage de ces représentations. L'évocation de la vision crée des confusions entre représentant et représenté qui sont très résistantes : nous avons eu quelques difficultés à faire admettre à des professeurs que l'on pouvait représenter un cube avec un *coefficient de réduction* de 2 [10], et qu'un parallélépipède quelconque pouvait avoir la même représentation en perspective parallèle qu'un cube [*Rommevaux,* 1997 p. 33].

Les élèves de cinquième qui, à Montpellier, ont suivi la séquence PC [*Bonafe,* 1991] n'ont pas réussi à surmonter ces obstacles : il nous semble que l'introduction de l'objet *à dessiner,* le fait de représenter des lignes *cachées,* créent des différences de traitement entre objet mathématique et objet matériel que les élèves ont des difficultés à analyser. Un autre facteur intervient aussi, que nous avons souligné dans nos expérimentations et que souligne également F.Bonafe : **le temps.**

L.C.Pais [*Pais,* 1991] s'est, sous les mêmes hypothèses de départ, intéressé à la représentation des corps ronds. La lecture de ces travaux, et tout particulièrement de l'analyse *Problème SEC,* fait e par A.Chevalier [*Chevalier,* 1989] nous paraît mettre en évidence deux faits importants : malgré la présence d'un objet matériel les élèves les plus jeunes[11] ont des difficultés à distinguer représentant et représenté et, nous le constatons dans toutes les expérimentations précédentes : représenter ou déterminer la forme d'une section est un problème très difficile à résoudre car on ne peut que rarement découvrir sa forme en manipulant l'objet matériel.

En conclusion, il semble que les élèves de collège peuvent apprendre à représenter de façon «conventionnelle» les solides en appliquant ce que F.Bonafe appelle «l'algorithme de la construction», ils peuvent aussi **reconnaître** sur une représentation un solide simple. Mais, résoudre des problèmes et tout particulièrement utiliser des sections demande plus de maturité et un apprentissage spécifique faisant peut-être intervenir des maquettes. La fonction donnée aux maquettes dans les expérimentations concernant les élèves de collège ne nous paraît pas clairement définie : ni simulation, ni illustration, ni source d'informations puisque certaines sont «grossièrement» construites, d'autres opaques alors que les objets que l'on étudie sont transparents. Les auteurs semblent craindre que les élèves ne puissent s'en détacher et en font volontairement des objets à négliger.

Les études historiques et certaines études techniques montrent cependant que ces objets peuvent avoir, pour la compréhension de l'espace réel ou virtuel, des fonctions importantes : fonction heuristique par les simulations qu'elle autorise, fonction de vérification - utile -, mais qui ne peut intervenir que lorsque le problème est résolu. Les deux expérimentations dont nous allons rendre compte maintenant leur donnent un rôle beaucoup plus important.

---

[10] Évidemment le terme est mal choisi !

[11] Voir les études de R.Baldy signalées précédemment qui montrent pour les adultes les mêmes différences.

LE DISCERNEMENT DES PLANS.

B.Parzysz dans ses travaux [*Parzysz,* 1989 et 1991] se préoccupe tout d'abord de *l'encodage et du décodage* des dessins. Il analyse les représentations des manuels, les dessins d'objets - cubes ou pyramides squelettes [12] - faits par des élèves au cours d'enquêtes. Une seconde phase de ses enquêtes consiste à proposer aux élèves des représentations et à leur demander de les interpréter. L'auteur constate, et ceci se retrouve dans les études d'autres chercheurs, que les élèves réussissent mieux en *décodage* qu'en *encodage.* L'analyse précise de ses enquêtes basée sur la mise en évidence du conflit *voir/savoir,* a permis à B.Parzysz d'élaborer une ingénierie didactique qu'il a expérimentée dans une classe de Seconde et de Première scientifique. Nous retiendrons de ses expérimentations l'usage d'une maquette adaptable aux tâches proposées : les études d'ombres. Ombre au flambeau qui matérialise une projection conique et ombre au soleil qui elle, matérialise une projection parallèle. La maquette utilisée est posée sur le bureau du professeur : elle a une *fonction de simulation* - l'ampoule de poche placée en haut du « flambeau» n'est pas allumée - elle sert au professeur ou à un élève à trouver, expliquer ou vérifier une solution. Il s'agit dans cette phase de l'apprentissage de déterminer l'ombre d'un cube squelette dans différentes positions de l'objet ou de la source lumineuse. Les règles de la projection sont alors découvertes puis institutionnalisées. Cette compétence acquise les élèves vont pouvoir poursuivre l'étude de l'espace. Pour les élèves de seconde, des difficultés persistent au niveau du passage de la représentation à l'objet de l'espace et la différenciation entre représentant et représenté n'est pas encore stable.

Le rôle, dans toutes ces expérimentations, des objets tridimensionnels ne nous paraissait pas suffisant. Pourquoi ne pas leur donner dans la construction du savoir mathématique l'importance qu'ils peuvent avoir pour certaines autres activités pour lesquelles :

> Le substitut représentant contrôle les actions et celles-ci par leurs effets modifient la connaissance que l'on a de l'objet représenté. [*Bresson,* 1989 p. 936]

Il nous fallait tout d'abord savoir si, comme le craignait la plupart des expérimentateurs, les élèves «lisait tout sur la maquette» : c'est à cette question que l'observation faite en 1989 [*Rommevaux,* 1991 p. 85-123] nous a permis de répondre. Nous avons pour cette première expérimentation étudié en détails les «capacités heuristiques» données à un objet-maquette par la matière dont il est fait. Les objets tridimensionnels ne pouvant constituer un registre sémiotique, nous voulions que les maquettes proposées aux élèves possèdent presque toutes les possibilités qu'offre une représentation d'un tel registre : permettre la fonction de traitement.

Un objet creux - une surface - en acétate transparent permettant le dessin, les vérifications par transparence, et autorisant les changements de points de vue, nous a paru la forme la plus apte à remplir les contraintes imposées. Regarder un tel objet peut même suggérer une représentation en perspective parallèle : toutes les arêtes du polyèdre représenté sont visuellement accessibles et les «arêtes cachées» sont plus *pâles* que les arêtes visibles. Nous n'avons pas utilisé cette possibilité qui, comme nous l'avons vu précédemment, ne constitue pas une approche efficace de la représentation en perspective parallèle.

L'objet que nous avons présenté aux élèves pour cette première observation avait toutes les qualités possibles : bien construit, conforme aux données du texte, permettant les mesures, le

[12] Réduits à leurs arêtes.

dessin, la vérification par transparence. L'énoncé demandait d'étudier l'évolution du périmètre des sections *horizontales* d'un cube suspendu par une diagonale *verticale*.

Nous avons été obligée de constater que, si la maquette jouait un rôle très important dans la phase heuristique du problème, les élèves n'utilisaient pas toutes les possibilités que donnait l'objet et, que les difficultés qu'ils rencontraient se situaient dans l'impossibilité dans laquelle ils étaient de concevoir la variabilité des directions de plans et celle des sections d'un cube. La ,remarque de P.Cartier est toujours d'actualité pour les débutants en géométrie tridimensionnelle :

> La vision fine de l'espace est délicate : qui d'entre nous n'a pas été surpris la première fois qu'on lui a montré que l'intersection d'un cube et d'un plan pouvait être un hexagone régulier ? [*Cartier*, 1991 p. 12]

Dans cette phrase, que nous citons souvent, le mot montré illustre tout à fait les intentions qui sont à l'origine de l'apprentissage dont nous allons décrire les objectifs et le déroulement dans les paragraphes suivants.

Après avoir mis en évidence les différences importantes existant entre les figures illustrant des situations bidimensionnelles et celles illustrant des situations tridimensionnelles, nous donnerons les principaux éléments de l'analyse qui nous a permis de mieux comprendre la spécificité de la géométrie tridimensionnelle. Plus encore qu'en géométrie plane, les interactions entre représentation figurale et texte doivent être maîtrisées et nous mettrons en évidence deux indices de complexité qui, pour les questions premières de la géométrie tridimensionnelle nous ont guidée dans la conduite de l'apprentissage et dans la progression des questions de l'évaluation finale.

III - Le discernement des plans : une entrée en géométrie tridimensionnelle.

1 - Éléments d'analyse heuristique des figures géométriques.

Considérons ci-dessous deux figures géométriques [13] : celle de droite représente un rectangle, ses diagonales et le segment joignant les milieux de deux côtés ; celle de gauche représente la projection parallèle du cube *ABCDEFGH* sur un plan parallèle au plan *BDHF* , et certaines figures liées à un problème.

[13] Nous appelons figure géométrique toute représentation figurale d'une situation mathématique donnée : c'est un complexe de lignes et d'hypothèses. [*Duval*, 1995b]

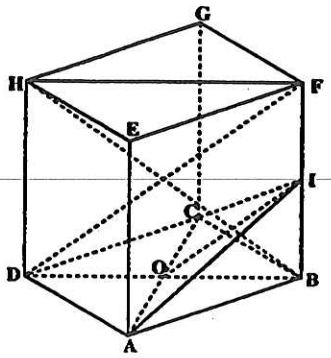


Figure de géométrie 3D

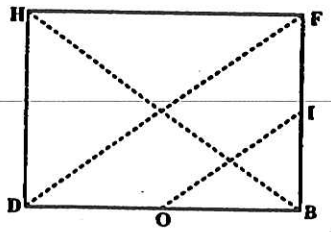


Figure de géométrie 2D

Quoique dans le même registre de représentation sémiotique, il existe des différences importantes entre ces figures. Pour bien comprendre ces différences il faut distinguer : le support de la représentation (feuille de papier, écran d'ordinateur, tableau), le ou les plan(s) de référence, le ou les plan(s) propre(s) de la situation géométrique représentée. À partir de ces distinctions, deux différences apparaissent entre ces représentations.

La première différence est dans les éléments de référence représentés :
-- en géométrie bidimensionnelle, le support de la représentation, le plan de référence, le plan de la situation coïncident.
-- en géométrie tridimensionnelle, l'un des plans de référence peut coïncider ou ne pas coïncider avec le support de la représentation, peut également coïncider ou ne pas coïncider avec un plan de la situation géométrie étudiée.

La seconde différence est dans la nature du lien entre l'objet et sa représentation :
-- en géométrie bidimensionnelle on représente les **objets mathématiques** que l'on veut étudier et toute modification sur la représentation peut immédiatement être interprétée comme une modification sur l'objet lui-même ;
-- en géométrie tridimensionnelle, ce sont les **plans de référence** qui sont essentiellement représentés et éventuellement certains plans de la situation. Discerner ces différents plans : support de la représentation, plans de référence, plans pertinents pour la situation est une opération qui doit précéder l'identification des objets mathématiques dans ces plans.

La représentation du cube ci-dessus illustre cette complexité : le plan de la représentation «coïncide» avec un plan du solide : le plan du rectangle diagonal qui, dans le problème proposé est aussi un plan pertinent pour la situation étudiée. Les plans de référence sont les faces du cube[14].

---

[14] Nous voudrions faire remarquer à ce propos que si toutes les situations étudiées au cours de cet apprentissage se situent dans des solides, ce ne sont pas les cubes, parallélépipèdes, prismes, pyramides qui ont constitué l'objet de l'étude mais les plans - faces ou sections - qu'ils permettent de représenter. Les polyèdres ne servent qu'à mettre en évidence des droites et plans de l'espace qui se trouvent ainsi matérialisés, ils ne sont que des outils.

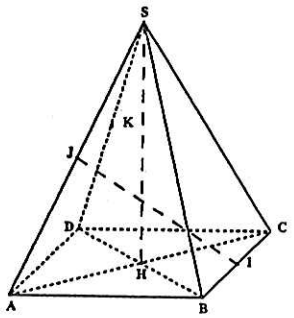
Discerner les plans sur une représentation en perspective d'une situation spatiale est, nous le voyons, difficile. Une telle figure ne livre pas immédiatement les pistes pour procéder visuellement à un certain travail de discrimination. Il faut donc savoir *a priori* ce que l'on cherche, ce que l'on *devrait voir.*

Comment sont définis les plans que l'on cherche ? Nous trouvons plusieurs définitions contrairement aux droites, qui elles, sont définies par deux points distincts. Trois points distincts non alignés ne sont pas la seule façon de reconnaître un plan qui peut aussi être défini par une paire de droites sécantes ou parallèles. Dès lors, si *voir* en géométrie plane que trois points sont alignés est simple - il suffit d'avoir une règle -, *voir* - tout simplement - sur une représentation en perspective que quatre points sont coplanaires est beaucoup plus difficile. Nous allons maintenant examiner ce problème à travers des questions que nous avons proposées à l'évaluation finale. Cette épreuve nous a permis de mesurer, par rapport à un groupe témoin, l'efficacité ou la neutralité, de l'apprentissage expérimenté.

2 - Critères de discernabilité des plans.

Premier exemple :

La figure ci-contre représente une pyramide à base carrée *SABCD* de sommet *S*, en perspective parallèle sur un plan parallèle à *SHI. I, J* et *K* sont respectivement les milieux des arêtes *[BC], [SA]* et *[SD].*



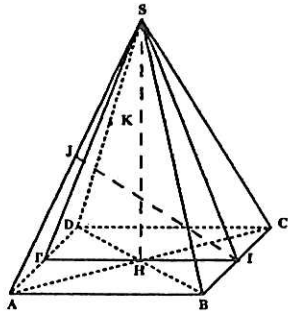
Les droites (SH) et (JI) sont-elles sécantes ?

La figure proposée aux élèves est ici la figure-source [15]. Répondre directement sur celle-ci est à éviter : deux droites sécantes sur la représentation ne le sont pas nécessairement sur l'objet, les élèves, après apprentissage connaissent généralement cette restriction. La question doit être reformulée - c'est pour nous la marque d'une certaine **complexité mathématique** -, les quatre points *S, H, J* et *I* regroupés différemment. Un rapide calcul montre qu'avec quatre points six situations nouvelles peuvent être envisagées, la figure va ici venir au secours du raisonnement combinatoire : trois des quatre points sont dans un plan immédiatement perceptible sur la figure : le plan *SAC* déjà dessiné qui contient *S, J* et *H*. La réponse à la question est alors elle aussi immédiate. La figure peut donc, après raisonnement ou formulation explicite d'une nouvelle question livrer la solution.

Les plans qui «sautent aux yeux» dès que leur recherche est clairement formulée ont été qualifiés de **plans immédiatement perceptibles**. De tels plans sont représentés par des figures fermées, faces des solides de référence ou sections de formes triangulaires ou trapézoïdales déjà présentes sur la figure-source. Ces figures suggèrent l'existence d'un plan, celle-ci doit ensuite être établie par une démonstration.

Cette même question pouvait être résolue avec d'autres plans, comme nous allons le voir ci-dessous.

On peut s'intéresser au plan *SHI* , plan de section de la pyramide non représenté dans la figure-source mais facile à déterminer en joignant des points déjà présents. Il s'agit alors de déterminer une sous- ou sur-figure dans laquelle sera *plongée* la figure étudiée.



Dans ce cas la sous- ou sur-figure utile pour déterminer le plan pertinent pour la résolution est directement *représentable* sur la figure-source : il suffit de joindre des points déjà présents pour la mettre en évidence sans résoudre de problème auxiliaire difficile. Nous dirons que le plan pertinent est un **plan directement discernable**. Texte et représentation figurale sont, comme toujours en géométrie, très dépendants mais ici, le langage, l'expression explicite de ce que l'on cherche guide de façon encore plus utile la perception de la figure : **on ne peut y voir que ce que l'on cherche.**

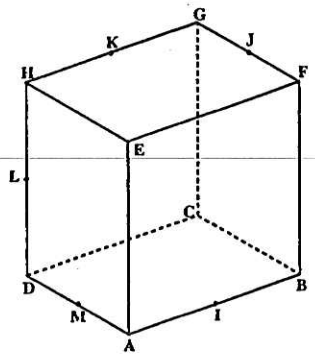
Le second exemple que nous avons choisi est encore plus représentatif de la remarque précédente. Les différentes solutions que nous donnons ici en exemple sont des solutions que nous avons effectivement trouvées dans les productions des élèves.

---

[15] Voir une note précédente.

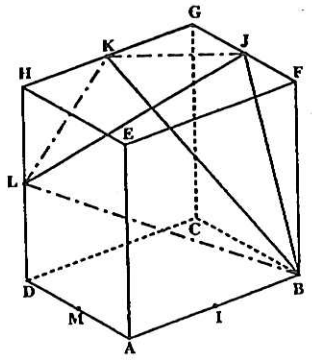
Deuxième exemple :

Un cube *ABCDEFGH* est représenté ci-contre en projection parallèle sur le plan *BDHF* . Les points I, *J, K, L* et *M* sont les milieux respectifs des arêtes *[AB], [GF], [GH], [HD]* et *[AD]* .



Les points L, J, B, K sont-ils dans un même plan ?

Les lois de la Gestalt, qui ont pu être renforcées par l'apprentissage, amènent à *regrouper les stimulis* [*Palmer & Rock,* 1991] : à joindre sur le papier ou mentalement les points donnés - ce qui est fait en trait gras sur la figure -, la forme obtenue constitue la figure-source.

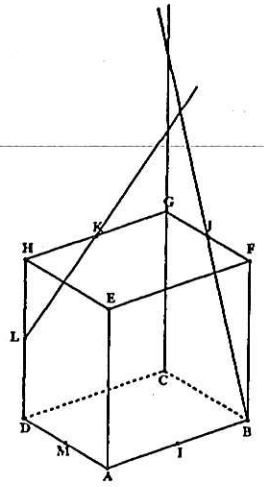


Celle-ci est une forme ouverte, elle ne permet pas comme l'indiquent les lois du regroupement ou de clôture de *détacher une forme du fond.* Tentant, toujours selon les mêmes lois, de *percevoir la forme la plus simple avec l'information disponible*, on cherche à joindre les points donnés pour obtenir une forme fermée qui, dans les meilleurs cas peut suggérer la réponse : la figure dessinée en trait pointillé. Nous voyons ici que les figures obtenues en traits plein ou pointillé ne suggèrent aucune piste. Il est alors nécessaire pour répondre à la question de **dissocier** les points et de les regrouper : les sept possibilités de regroupement sont ici ouvertes. Nous allons donner quatre solutions effectivement trouvées dans les productions d'élèves, chacune répond à une reformulation du problème proposé.

LE DISCERNEMENT DES PLANS.

a) Les droites *(LK)* et *(BJ)* sont-elles dans un même plan ?

Dans la figure-source associée à cette nouvelle question les droites seront tracées qu'il faudra *plonger* dans des plans permettant de répondre. Chacune d'elles est située dans une face du cube - **plans directement discernables** -, ces faces, adjacentes, se coupent suivant une arête. Il faut ensuite trouver l'intersection de deux droites dans un plan et, **interpréter en dimension trois** ce que permet de *lire* la figure : les points d'intersection des deux droites avec l'arête sont distincts.



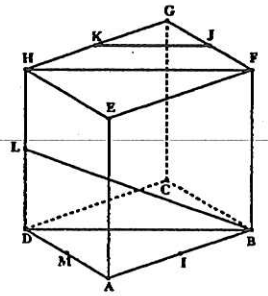
La démonstration, de géométrie bidimensionnelle, est calquée sur cette appréhension. L'obstacle ne réside pas ici dans l'action de «sortir» du plan, ce que les élèves apprennent sans trop de difficulté, mais dans les changements constants de dimension : montée en dimension : choix des plans, puis descente en dimension : arête commune etc., qui conditionnent la maîtrise de cette «sortie» hors du monde fermé des solides [16]. Ces différents changements lorsqu'ils deviennent conscients peuvent tout à fait être réussis par des élèves de seconde. La représentation figurale permet une interaction productive entre **appréhension perceptive** et **appréhension opératoire** [*Duval,* 1995b].

b) Les droites *(LB)* et *(JK)* sont-elles dans un même plan ?

La résolution de cette question reformulée va faire intervenir des éléments de dimension disparate, ce qui peut paraître simple pour des esprits exercés à la géométrie tridimensionnelle mais ne l'est pas pour les débutants. Comme précédemment, il est nécessaire de plonger chacune des droites dans un plan qui la contient : l'un est une face du cube, l'autre le plan diagonal *DBFH*, ils sont **directement discernables**.

[16] La maîtrise de ces changements se lit sur les dessins : les élèves prolongent l'arête.

Après avoir résolu un problème plan très simple dans *EFGH*, il faut, pour répondre, associer la droite *(JK)* et le plan *DBFH* et «oublier» la droite *(LB)*. Comme précédemment appréhension perceptive et appréhension opératoire sont étroitement associées et peuvent permettre une démonstration presque immédiate.

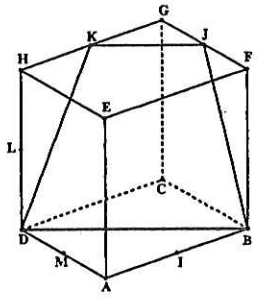


Nous allons maintenant étudier deux des regroupements déterminant un plan, ceux que nous avons rencontré dans les productions des élèves. Les deux autres donnent des pentagones difficiles à déterminer pour des élèves de ce niveau. Nous donnerons ensemble les deux formulations qui relèvent d'une même analyse.

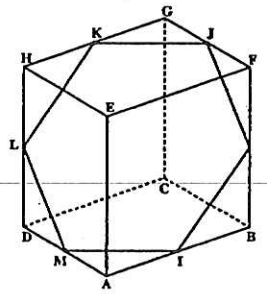
c) Le point *L* est-il dans le plan *(KJB)* ?

d) Le point *B* est-il dans le plan *(LKJ)* ?

Dessiner sur la représentation en perspective parallèle du cube les plans *(KJB)* ou *(LKJ)* demande la résolution d'un problème d'intersection de plans. La droite *(BD)* - ci-contre -, ou *(LM)*, *(MI)* etc. -ci-dessous - ne peuvent être créées qu'après un raisonnement.

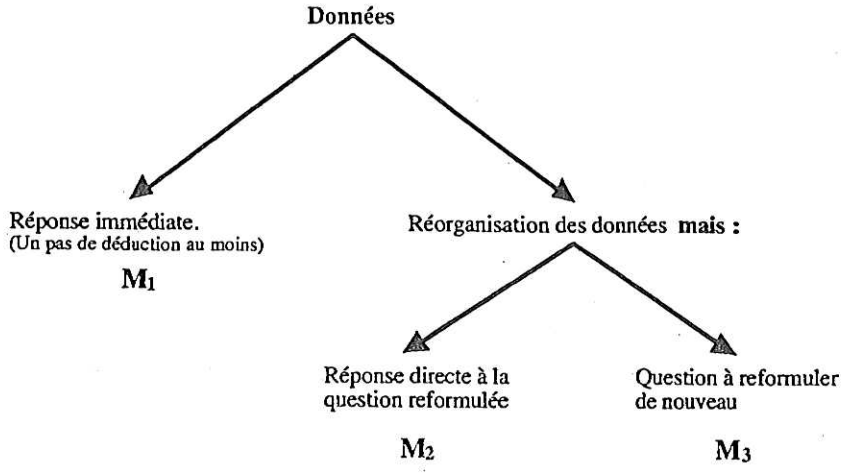


Nous dirons que dans ce cas la figure n'a pas, intrinsèquement, de qualités heuristiques, elle permet seulement une meilleure prise en compte des divers éléments entrant dans la démonstration. Le plan pertinent pour la résolution est, dans la figure-source, **non visuellement accessible**. Le problème d'intersection résolu la solution est immédiate.



Mais, toute la difficulté est dans ce problème non explicitement posé. Il semble clair que seuls les élèves ayant déjà rencontré ces sections du cube, donc en concevant *a priori* l'existence, peuvent produire ces solutions.

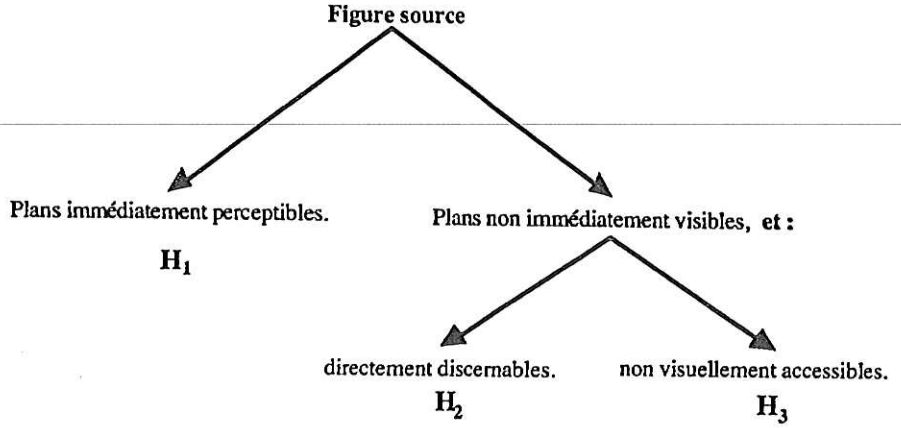
Les deux complexités que nous avons définies :
-- complexité mathématique liée aux différentes définitions d'un plan, donc impliquant un choix,
-- complexité heuristique liée aux formes qui peuvent sur la figure-source suggérer l'existence d'un plan pertinent pour la résolution,
ont été déclinées en trois degrés que nous allons donner séparément puis combiner en un tableau croisé. Ce tableau nous a permis de gérer les différentes étapes de l'apprentissage et de graduer les exercices de l'évaluation. Associés, à l'origine, à la détermination des plans dans les problèmes de géométrie tridimensionnelle, nous les avons adapté à d'autres types de problèmes pour lesquels ils peuvent aussi permettre d'analyser des démarches complexes.



Indice de «complexité mathématique»

LE DISCERNEMENT DES PLANS.

Lorsque les données de la question doivent être réorganisées, les éléments de la figure interviennent pour orienter le choix, c'est pour cette raison que les deux indices doivent être croisés.



Indice de «complexité heuristique»

Lorsque les plans ne sont pas immédiatement perceptibles - c'est-à-dire déjà représentés sur la figure : plans de référence ou plans ayant été définis dans des réponses précédentes -, les éléments de la figure-source représentés **et** la reformulation de la question vont intervenir conjointement dans la recherche de la solution.

Heuristique / Mathématique	Plans immédiatement perceptibles H_1	Plans directement discernables H_2	Plans non visuellement accessibles H_3
Réponse immédiate M_1			
Réponse immédiate à la question reformulée, M_2			
Question à reformuler au moins une seconde fois M_3			

Prise en compte simultanée des deux indices.

Ce tableau est destiné à recevoir les pourcentages de réussite aux questions d'un problème analysé en fonction des indices précédemment définis. Il nous permet, dans l'analyse préalable des questions, de mesurer la difficulté prévue et, dans l'analyse des productions effectives, de confirmer certains points. Ce tableau a été mis à l'épreuve pour un problème classique de géométrie tridimensionnelle, il a répondu à notre attente [*Rommevaux,* 1997 p. 256-264].

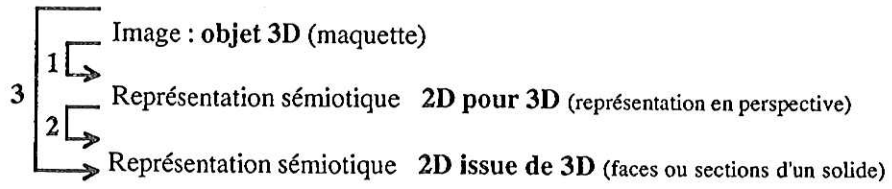
Après une synthèse des éléments issus de l'analyse précédente nous donnerons les étapes de la séquence d'apprentissage expérimentée.

IV - Comment développer chez les élèves l'aptitude à discerner les plans en liaison avec un apprentissage de la géométrie tridimensionnelle ?

Nous avons montré que complexité mathématique et complexité heuristique étaient liées dans la recherche aboutie des solutions. Il est donc nécessaire que l'apprentissage prenne en compte ces deux aspects et ne se satisfasse pas du seul contenu mathématique. Il faut alors tenir compte des représentations figurales ou matérielles aussi bien que du contenu des définitions ou des problèmes. **La coordination des représentations en présence est ici essentielle.**

L'objectif de l'apprentissage est le développement de la fonction de traitement des représentations en perspective parallèle. D'autres études ont montré que l'usage, souvent efficace, qu'en font les élèves se centre surtout sur la fonction de communication. La fonction de traitement est moins disponible car les élèves n'imaginent pas le feuilletage en plans de l'espace graphique. Il nous fallait donc trouver une représentation intermédiaire permettant de donner aux représentations planes cette possibilité virtuelle. Cette représentation ne pouvait être que matérielle, sa présence seule ne suffit pas. Il faut pour que la fonction de traitement se développe que les représentations en présence soient bien coordonnées. Ce qu'un mathématicien fait spontanément doit, pour la plupart des individus, être acquis par l'apprentissage : *voir dans l'espace* peut s'acquérir comme tout autre savoir.

Examinons les représentations en présence et les conditions de leur coordination.



Nous avons noté ci-dessus les deux types de représentations, autres que langagière, en présence en géométrie tridimensionnelle. Nous avons distingué les représentations sémiotiques de celles que nous appelons **image** [*Duval,* 1995a p. 15]. Les images sont des **reproductions** d'objets réels ou virtuels : le support physique ou psychique qui les reçoit agit comme un récepteur, il n'y pas comme pour une représentation sémiotique adaptation au registre dans lequel elles sont formées ni choix des traits représentés [*Rommevaux,* 1997 p. 23-27]. Des représentations figurales de deux types ont été distinguées pour cette coordination :

-- celles que nous appelons «2D pour 3D» pour montrer qu'elles représentent un objet d'un autre espace que celui dans lequel elles sont formées,

-- celles que nous appelons «2D issues de 3D» pour montrer qu'elles sont effectivement représentées dans leur registre d'origine mais, extraites de l'espace dans lequel elles étaient plongées.

Les flèches numérotées codent les interactions entre les représentations. La flèche **1** : passage d'un objet matériel à une représentation en perspective, dite : *dessin de l'objet* est le passage qui apparaît le plus fréquemment dans l'enseignement. Les flèches **2** et **3**, passages d'une représentation en perspective ou d'un objet, à une représentation plane de figures planes extraites, sont moins souvent utilisés. Le passage **2** apparaît en général au niveau des contrôles de connaissances, le passage **3** n'est pratiquement jamais envisagé au niveau des décisions d'enseignement. Contrairement à ce que l'on pourrait croire les figures dessinées sur une maquette ne livrent pas au *premier coup d'œil* leur formes planes, le passage **3** demande aussi à être travaillé. Malgré les sens choisis dans le schéma précédent, les interactions sont à double sens. Notre objectif étant de rendre aux représentations sémiotiques, ici les représentations figurales, leurs qualités heuristiques : **permettre la sélection des plans**, les flèches indiquent les interactions privilégiées. Les représentations étant simultanément présentes, les actions se situent aussi fréquemment dans les sens réciproques.

Deux expérimentations ont été nécessaires pour mettre au point la coordination des représentations en présence. Nous pensions, après les premières observations [*Rommevaux,* 1991 p. 119], que les élèves devaient d'abord savoir résoudre les problèmes sur la maquette et être en possession des règles de la représentation en perspective parallèle pour pouvoir les utiliser avec profit. Nous avions alors utilisé *successivement* les deux types de représentation. Les résultats de l'évaluation finale n'ont pas été probants. Lors de la seconde expérimentation, celle que nous allons présenter, les deux types de représentation étaient présents dès le début de l'apprentissage, avant que les élèves ne soient en possession des règles mathématiques qui les fondent. Les résultats d'études déjà faites montrent que la fonction de **communication** est disponible très tôt, il suffisait, par **différenciation fonctionnelle**, de développer la fonction de **traitement** de ces mêmes représentations sémiotiques[17]. La séquence d'apprentissage est fondée sur un travail d'observation de variations concomitantes sur deux types de représentations. Les variations sur une représentation «2D pour 3D» sont observées en coordination avec celles que l'on effectue systématiquement et non pas de manière illustrative ou indicative sur une représentation de type maquette. Pour conduire ce travail, la tâche mathématique choisie est la construction des **sections planes** d'un cube. Ce choix a été dicté par l'importance de ces sous-figure planes dans la résolution des problèmes de géométrie tridimensionnelle, et la difficulté qu'ont les élèves à les imaginer [*Rommevaux,* 1991 p. 119]. Le choix s'est porté sur le cube car il offre la plus grande variété de sections planes. Cet objet n'a pas été choisi comme modèle d'un objet mathématique précis mais comme outil permettant d'apprendre à **discerner les plans**, en **articulation** avec le fonctionnement des représentations en perspective parallèle.

---

17 Ces deux modes de présentation d'un concept ont été étudiés par P.Oléron :
L'erreur est sans doute de croire à une solution générale alors que le niveau des sujets, en particulier leur capacité à comparer les stimuli, joue un rôle important voire déterminant. Pour la formation des concepts on tiendra compte de la complexité des données ; la présentation successive est en un sens un moyen d'analyser celle-ci en amenant à les considérer l'une après l'autre et non en bloc. Mais l'élément de rétention mnémonique intervient alors en un sens défavorable. [*Oléron,* 1963 p. 23].

Nous allons étudier maintenant les différentes phases de la séquence expérimentée. Les maquettes que nous avons utilisées tout au long de l'apprentissage sont toutes en acétate transparent pour rétroprojecteur et possèdent toutes les qualités que nous avons détaillées à la fin du paragraphe **II.** La trame de la séquence d'apprentissage est donnée par la coordination des représentations en présence :

-- le langage naturel : registre sémiotique indispensable pour donner aux représentations «2D pour 3D» leur troisième dimension, pour donner les hypothèses - faire de la figure une figure géométrique -, mais aussi pour désigner les différents plans en présence - la désignation participe ici à la fonction d'objectivation - et participer à la coordination des résultats plans qui ne peut se faire que par l'intermédiaire d'un discours explicite ou intériorisé ;

-- une maquette en acétate transparent modèle du solide de référence - objet 3D ;

-- des représentations en perspective parallèle et des représentations de sections planes de solides - représentations sémiotiques du registre figural 2D.

Les trois phases de l'apprentissage vont jouer sur ces trois types de représentation et prendre en compte les analyses que nous avons développées précédemment ainsi que celles développées par R.Duval dans [*Duval,* 1994].

1 - Phase exploratoire.

La première phase a été précédée d'un prétest et d'un état des lieux, d'une harmonisation connaissances des élèves, essentiellement au niveau du vocabulaire et des définitions déjà données au collège.

Cette première phase met en *concurrence ou en synergie* les espaces bi- et tri-dimensionnels, l'objectif de cette phase est la prise de conscience par les élèves de la variabilité des directions de plans. Elle se déroule dans l'**espace sensible**. Une première feuille est proposée aux élèves[18] ainsi qu'une maquette de cube et le dessin de quatre formes planes. La tâche : répondre par OUI ou NON à la question :

-- Pouvez-vous obtenir, en «coupant» le cube, le polygone dessiné ?

Il était demandé aux élèves de donner les raisons de leur choix. Précisons également que les dimensions du cube étaient données et que les élèves pouvaient fournir tout type d'arguments. Ces premières réponses données, les feuilles sont ramassées et les élèves reçoivent une nouvelle feuille et des rectangles de carton dans lesquels des formes ont été **évidées**. La tâche est la même que précédemment avec la question :

-- Pouvez-vous obtenir, en «coupant» le cube, le polygone **évidé** ?

[18] Les élèves, en classe c'est-à-dire avec l'objet matériel, travaillent en binôme. Mais ensuite le travail de mise au point - la rédaction, si importante pour l'objectivation - se fait individuellement et est corrigé par le professeur.

La première question était accompagnée de quatre formes, la seconde est accompagnée de six formes évidées dont les quatre précédentes que les élèves peuvent reconnaître car elles portent les mêmes numéros.

Si dans la première tâche les deux espaces bi- et tri-dimensionnels coexistent, dans la seconde les plans peuvent être matériellement **plongés** dans l'espace du cube dont certaines formes sont issues. Cette action est la même que celle que faisaient les tailleurs de pierres autour du XIII^{e} siècle, les élèves ne la font pas spontanément. Ils montrent aussi, en «collant» les formes sur les faces que pour eux les seuls plans existants sont ceux déjà matérialisés. Mais, ce pas franchi certains, manifestent un grand intérêt pour les découvertes qu'il suscite. Des raisons données pour refuser certaines formes sont remises en cause et discutées. Certains binômes voudraient que toutes les formes s'enfilent autour du cube[19] : le pentagone régulier en particulier subit beaucoup d'outrages !

Dans la première tâche les feuilles portant les formes sont posées sur la table ou *mises à côté du cube*, pour identifier les sections il faut les **imaginer**. Les explications fournies pour refuser les formes sont très révélatrices des conceptions des élèves : les élèves transfèrent au solide les propriétés des formes planes qui le caractérisent, ici le **carré**. Les polygones ayant *plus de quatre côtés* sont en général **refusés**, tous les polygones ayant *un angle droit* généralement **acceptés** comme le triangle rectangle ou le trapèze rectangle.

Lorsque les polygones sont présentés sous forme de **gabarits** la maquette va permettre une **montée en dimension** : le plan «entoure» le cube, plusieurs gabarits enfilés autour du cube visualisent la variabilité des directions de plans et des formes des sections. Les élèves déduisent de la réussite ou de l'échec de ce plongement certaines des propriétés des sections : par exemple le parallélisme de côtés du polygone dès que leur nombre est supérieur à quatre. Les propriétés ne sont pas **constatées** mais leur **nécessité** est établie par la manipulation et l'observation des figures en présence.

Cette séance qui ne dure qu'une heure reviendra comme un point de repère tout au long des séances suivantes qui vont permettre aux élèves d'entrer dans la phase plus discursive de l'apprentissage. Ils apprendront au cours de la phase suivante comment ont été construits les polygones sections dont les formes leur ont paru bizarres.

2 - Phase de traitement figuratif.

Avant de détailler le déroulement de la recherche associée à la dernière feuille de cette phase - la plus longue -, nous voudrions faire le point sur les connaissances supposées des élèves à ce stade. Ils ont presque tous vu au collège des représentations en perspective parallèle, savent que deux droites parallèles dans l'espace sont représentées par des droites parallèles sur le dessin et que dans les directions parallèles les proportions sont conservées [20]. Ils connaissent également les différentes façons de définir un plan.

L'objectif de cette phase est de donner aux représentations en perspective parallèle, qui ont à ce stade une fonction de communication, la fonction de traitement qui en fera un outil indis-

[19] On trouvera en annexe les représentations réduites des quatorze formes proposées.

[20] Les calculs de proportionnalité seront repris à cette occasion.

pensable pour l'heuristique d'un problème. Cette nouvelle fonction sera acquise par l'étude des variations concomitantes des traitements sur la maquette et sur les représentations «2D pour 3D». La *nécessité* des propriétés d'incidence sera suggérée par les tracés sur la maquette, les règles seront ensuite institutionnalisées et réutilisées au fur à mesure de la complexification des tâches associées à la recherche des différentes sections.

On trouvera en annexe 2 le libellé de la dernière feuille de cette phase qui en comporte cinq. Après avoir découvert une section triangulaire, deux sections quadrilatères - un parallélogramme et un trapèze - une section pentagonale, la feuille que nous allons étudier fait découvrir une section hexagonale. Les textes sont toujours proposés sur le même modèle : trois points sont donnés sur trois arêtes du cube, les variations de leurs positions ou des situations relatives des arêtes qui les portent, vont nous permettre de gérer la complexité des tâches, qu'elles soient mathématiques ou heuristiques.

Trois tâches vont contribuer à la coordination des représentations en présence au travers des différentes appréhensions d'une figure :

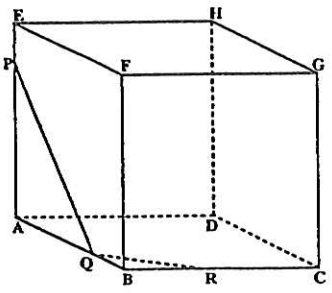
-- **le dessin sur la maquette de la section**, seule tâche faisant réellement intervenir l'axiomatique de la géométrie tridimensionnelle, - appréhension perceptive et manipulation demanderont, d'une feuille à l'autre à être appuyées par une appréhension discursive et opératoire : tout ne se voit pas sur la maquette - ;

-- **la représentation en vraie grandeur du polygone section** dont la nature a été découverte sur la maquette - il s'agit ici d'une tâche de construction **plane** qui va demander une appréhension séquentielle de la figure. Cette tâche, par les détours que nécessitent les constructions auxiliaires, va impliquer la sélection de plans - autres que les faces du solide -, ainsi que des descentes et montées en dimension, des coordinations de résultats. Toutes ces opérations sont facilitées par la mobilité et la transparence de la maquette ;

-- enfin, la troisième tâche est **la représentation de la section obtenue, sur l'une ou l'autre des deux représentations en perspective données**, - ce sont ici les variations concomitantes sur les deux types de représentation qui vont développer l'appréhension opératoire des représentations en perspective parallèle.

La première tâche permet de découvrir la nécessité des règles de la géométrie tridimensionnelle, celles-ci ne doivent pas être abstraites à partir du constat des résultats de leur application sur des représentations comme cela est fait dans la plupart des manuels mais leur pertinence doit s'imposer dans l'exploration des objets, maquette et figures, qui sont manipulés. Elles seront réinvesties dans la tâche de dessin des sections sur la maquette au fur et à mesure que celles-ci se compliquent. Les deux autres tâches tendent à développer ce que l'on peut appeler *la vision dans l'espace,* et plus spécialement le *discernement des plans.* La seconde tâche par les multiples directions de plans qu'elle nécessite permet l'appréhension opératoire de la variabilité des directions de plans. La troisième tâche prend, au fur et à mesure de l'évolution de l'apprentissage de plus en plus d'importance. Jouant sur les contraintes de l'organisation de la classe on demande aux élèves de terminer le travail à la maison, n'ayant plus de maquette mais seulement les représentations en perspective parallèle ils doivent transcrire sur celles-ci le plus possible de renseignements de façon à poursuivre leur travail. Ces représentations n'ont pas été construites par les élèves mais ils peuvent en identifier les éléments conservés en vraie grandeur et choisir le point de vue en nommant les sommets, elles vont peu à peu remplacer la maquette et acquérir par ce biais la *fonction de traitement.*

La première tâche proposée est le dessin sur la maquette de la section plane définie par les trois points donnés. Après avoir nommé les sommets du cube et placé les points *P*, *Q* et *R* conformément au texte donné [21] les élèves doivent dessiner sur les faces du cube les segments côtés du polygone section. Les qualités de la maquette : mobilité, transparence, vont permettre de découvrir certaines des propriétés d'incidence. Par exemple le parallélisme des droites d'intersection sur deux faces parallèles du cube.



Nous avons représenté ci-contre - en perspective obligatoirement - les tracés obtenus sur la maquette à partir des données. Ces tracés étant faits, les élèves ont eu la surprise de ne trouver aucun théorème, aucune action perceptivo-gestuelle susceptible de leur permettre de continuer immédiatement le tracé.

La situation demande alors à être analysée collectivement.
L'intersection de deux plans étant une droite, deux procédures mathématiques sont disponibles :
-- on peut en déterminer deux points : c'est le cas des points donnés qui sont sur des arêtes,
-- on en connaît un point et la direction : c'est une procédure que les élèves connaissent à ce stade de l'apprentissage.

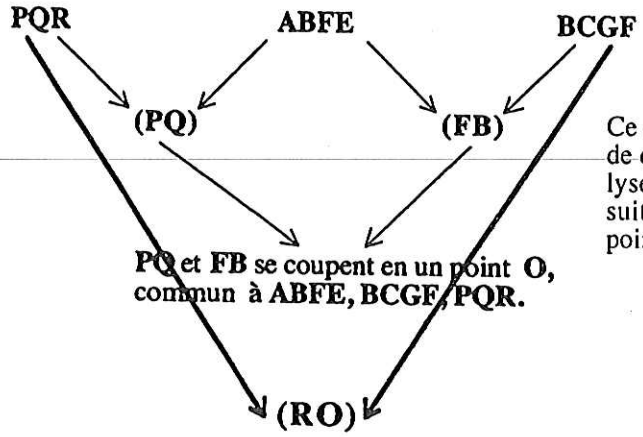
Examinons la situation pour faire un choix entre ces deux procédures.

Dans l'impossibilité de connaître la direction commune des deux droites intersections du plan *PQR* et des plans *ADHE* et *BCGF*, peut-on trouver un point, autre que *P* ou *R* commun à l'une des faces et à *PQR* ? Il faut rappeler que l'ensemble des points communs à deux plans est leur droite d'intersection et que lorsqu'on cherche un tel point on est guidé par cette propriété. Les élèves sont invités à faire un recensement des renseignements déjà en leur possession.

Le professeur doit alors reprendre la classe pour étudier avec les élèves les intersections des différents plans en présence. Cette recherche est schématisée ci-dessous.

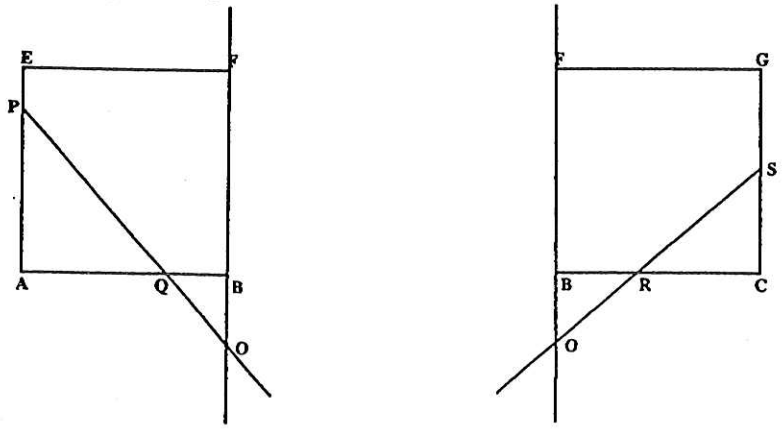
---

[21] Cette tâche a, au tout début de l'apprentissage posé quelque problème aux élèves : la mobilité de la maquette est ici un handicap. Notons également que la notion de section plane est à définir et rappeler très souvent. Seule l'expérience de la *pomme de terre* [*Bonafe*, 1985 p. III.1] permet aux élèves de comprendre la différence entre section plane et solide résultant de la coupe. Assimiler cette distinction demande un certain temps.



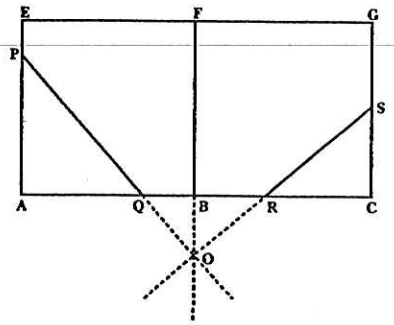
Ce schéma indique les intersections de plans et de droites. Fait avec les élèves il les aide à analyser formellement la situation, ils doivent ensuite déterminer sur leurs représentations le point *O*.

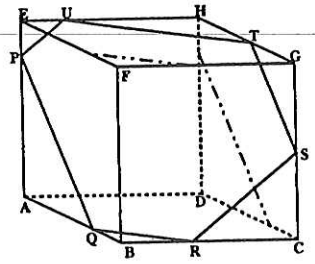
La procédure que nous proposons pour cette détermination utilise les interactions entre espaces bi- et tri-dimensionnel, **descente et montée en dimension.** Il faut «sortir» du cube pour déterminer le point *O* qui se trouve sur la droite *BF* et dans le plan de la face *ABFE* . Cette face n'étant qu'une figure du plan il faut donner une autre représentation de celui-ci. Sur une feuille de papier par exemple, reproduire le carré en prolongeant ses côtés, placer les points *P* et *Q*, déterminer *O* puis, recommencer avec le plan de la face *BCGF* pour déterminer le point *S* qui, enfin, peut être placé sur l'arête *CG*. Procédure illustrée ci-dessous.



Pour aider les élèves ayant des difficultés à imaginer ces interactions et l'infinitude des plans nous avons proposé de prendre une feuille de papier de la plier en deux, d'appliquer le pli sur l'arête *BF* de la maquette, de «décalquer» chacune des faces *BFEA* et *BFGC* puis de déplier cette feuille. On peut alors, en **dimension 2**, dessiner la droite *PQ*, son intersection avec le «pli» : *O*, puis la droite *RO* qui coupe l'arête *CG* en *S*. On replie ensuite la feuille et on peut placer le point *S* sur *CG*, toujours en «décalquant». **Sélection des plans utiles, traitement du problème bidimensionnel, coordination des résultats et plongement dans l'espace tridimensionnel sont ainsi mis en action.** La figure ci-dessous - à gauche - représente la feuille dépliée et les constructions effectuées. Elle peut aussi permettre aux élèves de mettre en place des procédures de calculs des segments en cause. À droite le dessin de la section sur la ma-

quette est terminé en utilisant les propriétés d'intersection de deux plans parallèles par un même plan. La transparence permet de comprendre cette construction et les élèves «reportent» *PQ* sur la face *CDHG* et tracent la parallèle à *PQ* passant par *S*. Ces constructions permettant de terminer la représentation ont déjà été effectuées pour les sections précédentes.





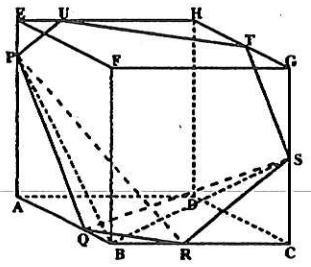
La première tâche terminée : la section est dessinée sur la maquette, la seconde tâche demande de la construire en vraie grandeur sur la feuille. L'appréhension séquentielle de la figure, nécessaire à toute construction, va amener les élèves à «entrer» dans le cube. Les traces du plan *PQR* sur les faces du cube ne suffisent pas à déterminer le polygone section. Dès qu'il a plus de trois côtés les mesures des angles[22] ou de certaines diagonales sont indispensables pour le *rigidifier*. Pour déterminer la longueur des segments *PQ* et *QS* par exemple - ce qui est suffisant car ensuite le parallélisme prend la relève -, certains triangles, si possible rectangles, doivent être imaginés. La mobilité de la maquette permet de poser le cube sur la table de façon à *voir* que les triangles *PBR* et *QBS* sont rectangles en *B*. L'orthogonalité de toute verticale et d'un plan horizontal, a quelquefois été vue au collège, le théorème d'orthogonalité droite-plan peut être donné à cette occasion. C'est, dans l'apprentissage proposé, le seul théorème sur l'orthogonalité que nous ayons institutionnalisé. Les détours de l'appréhension séquentielle ont, tout au long de la construction des sections, utilisés la mobilité de l'objet maquette pour **casser** la position privilégiée des faces. L'objectif de la construction, la formulation de la tâche ont, de plus, permis de sélectionner dans l'objet diverses directions de plans et de *filtrer* les informations qu'il fournit.

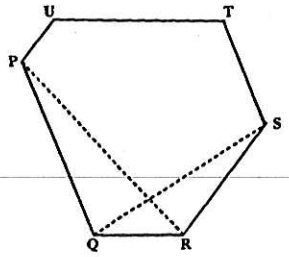
Les figures ci-dessous montrent les constructions effectives ou imaginées sur la maquette et la représentation de la section en vraie grandeur[23]. Les élèves devaient terminer la construction en l'absence de l'objet et l'une des représentations du cube avait pour mission de recueillir les informations utiles pour mener la tâche le plus loin possible. La représentation de gauche montre ce que les élèves relevaient à la fin de l'heure souvent à main levée et complété par des cotes ou informations chiffrées.

---

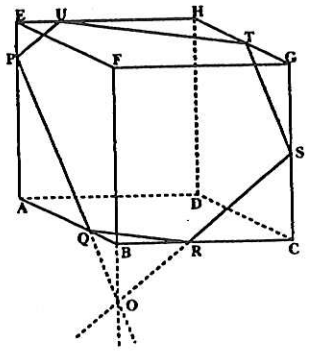
[22] Il n'est pas possible à ce niveau d'introduire ces notions. Pour la seconde section proposée - un parallélogramme - beaucoup d'élèves transférant à la section les propriétés de l'objet tridimensionnel ont dessiné un rectangle.

[23] Les dessins sont réduits.





Sur les représentations en perspective parallèle la détermination du point *O* est beaucoup moins coûteuse, comme le montre la figure ci-dessous. Mais elle nécessite de savoir avec précision dans quel plan se placent les traits que l'on dessine. Les efforts faits pour cet apprentissage sont ainsi *récompensés* !



La donnée de deux représentations *muettes* du solide permet aux élèves de travailler sur l'une d'elles et d'utiliser la seconde pour choisir le *meilleur point de vue*, c'est-à-dire celui qui permet de «voir» avec le moins de déformation possible les sous-figures planes utiles. Ils ont ainsi appris à changer de point de vue en modifiant la désignation des sommets, ce qui leur donnera ensuite quelque liberté lorsqu'eux-mêmes construiront les représentations.

Cette troisième tâche est essentielle : les variations concomitantes sur l'objet matériel et sur les représentations en perspective, développent leur fonction heuristique en transformant les actions sensibles en tracés et mettant en œuvre l'appréhension opératoire de cette représentation.

3 - Phase d'institutionnalisation.

Nous avons noté dans les phases précédentes que des *moments d'institutionnalisation* étaient intégrés au déroulement de l'apprentissage. Chacune des règles d'incidence dont la nécessité a été mise en évidence sur l'objet maquette a été donnée explicitement et les variables, «positions des points» sur les arêtes, sont choisies de façon à obliger les élèves à les réutiliser pour mener à bien la première tâche pour la section suivante.

Cette dernière partie de l'apprentissage a essentiellement consisté en exercices dans lesquels étaient donnés des solides de référence autres que des cubes. Les règles de la perspective parallèle ont été données mais, nous estimons qu'il est encore trop tôt pour que les élèves en aient la totale maîtrise. Les textes étaient toujours accompagnés d'une représentation pour laquelle le plan de projection est indiqué ce qui, dans les exercices non métriques, suffit à repérer dans la représentation les figures déformées ou non déformées par la projection.

Cette période de transfert a été un peu difficile pour certains élèves : pour ceux-ci, la période de travail sur l'objet aurait du se prolonger et ne pas se dérouler seulement sur le cube [*Rommevaux,* 1997 p. 344 note]. Ces mêmes élèves ont éprouvé une certaine satisfaction à faire - enfin! - une déduction correcte. Comment être sûrs que les plans discernés sur la représentation sont bien des plans dans l'espace tridimensionnel, sinon par l'application explicite de certaines règles d'incidence?

V - Évaluation.

Cette séquence d'apprentissage a été expérimentée dans une situation normale de classe dans deux classes de seconde d'un lycée de Montbéliard (Doubs). Celle dont j'avais la charge avait, de par les options choisies par les élèves, un profil plutôt littéraire - la plupart des élèves ont choisi une section L en première -, l'autre seconde avait, elle, un profil plutôt scientifique - confirmé par les orientations en première S -. Dans cette dernière classe, le professeur a pris la responsabilité de l'expérimentation. Nous faisions le point de la progression après chaque séance. Deux classes témoins, de deux lycées de Strasbourg, ont été associées à l'expérimentation.

Certaines remarques doivent être faites : j'étais à la fois professeur, chercheur et expérimentateur, je n'ai visité aucune des autres classes et toutes les classes étaient des classes courantes de lycées - certaines homogènes d'autres hétérogènes -. Les expérimentations dans ces conditions ne permettent pas une exploitation exhaustive des situations, beaucoup de faits échappent. Seules les traces écrites peuvent vraiment être étudiées.

Avant tout apprentissage les élèves de trois des classes ont été soumis à un prétest : «les triangles dans le cube» plusieurs fois étalonné, depuis qu'en 1984 l'équipe de G.Audibert l'a proposé à de nombreux élèves [*Rommevaux,* 1997 p. 201]. Il s'agit de savoir si les élèves *lisent* sur une représentation en perspective parallèle une figure de géométrie bidimensionnelle ou tridimensionnelle. Toutes les classes de seconde étant soumise à une évaluation nationale au début de l'année scolaire nous avons également une épreuve indépendante de tout enseignement nous permettant de classer les performances globales des élèves.

LE DISCERNEMENT DES PLANS.

Après apprentissage expérimental ou «classique» les élèves ont été soumis à une évaluation finale dont quelques questions ont été étudiées dans le paragraphe III. Les questions proposées comportaient deux volets : les élèves devaient répondre par OUI ou NON à des questions du type : *deux droites sont-elles dans un même plan ?* et les variantes sur le parallélisme ou l'intersection qui s'en déduisent, ou plus généralement : *quatre points donnés sont-ils coplanaires ?* Une justification était demandée dans laquelle nous souhaitions trouver mention des plans permettant de mettre en évidence les différents pas de la déduction nécessaire à la justification. Cette épreuve comportait quatre exercices. Nous laisserons de côté le dernier dans lequel nous voulions voir si les élèves concevaient qu'un même trapèze pouvait être section d'un cube et d'une pyramide à base carrée. Les non-réponses ont été nombreuses à cet exercice difficile. Les trois autres exercices comportaient en tout douze questions indépendantes, de difficulté croissante, dont les solides de référence étaient un cube et une pyramide à base carrée. Les taux de non-réponses sont peu élevés pour ces trois exercices. Pour les questions pour lesquelles un doute se fait sentir sur l'interprétation de la figure «2D pour 3D» les non-réponse peuvent traduire une prise de conscience de l'ambiguïté de ces représentations.

La prise en compte dans les tableaux croisés du double indice (M_i, H_j) [24] se trouve justifiée par les variations des pourcentages conjoints des réponses exactes et des réponses justifiées : réponses exactes se traduisant par OUI ou NON et justifications réussies mettant en avant les plans pertinents pour la démonstration [25]. Les variations observées dans les tableaux sont identiques dans chacune des classes : ce tableau mesure donc bien la difficulté des exercices. Il permet de déceler les questions dont la justification est nécessaire pour répondre correctement : on trouve alors pour un faible taux de réponses exactes un taux élevé de justification réussie.

Une dernière remarque avant la comparaison entre les classes témoins et les classes expérimentales. Les questionnaires ont été conçus sous deux modalités : deux points de vue différents ont été choisis pour les représentations des solides. Les tests ont montré que les taux de réussite sont indépendants de la représentation proposée.

Compte tenu de l'hétérogénéité des niveaux des classes, nous avons choisi d'apparier des élèves de l'une des classes témoins - celle ayant subi les deux tests - et ceux des classes expérimentales ayant les mêmes résultats aux deux prétests et de mesurer l'évolution des couples ainsi formés. Neuf élèves de chacune des classes expérimentales ont été appariés à dix huit élèves de la classe témoin. Nous avons pour chacun de ces couples calculé les différences algébriques -pour les deux élèves appariés-, entre les nombres de bonnes réponses et les nombres de ces réponses correctement justifiées. Il apparaît que la différence du nombre total de réponses exactes est seulement de **quatre** (Δ_i) en faveur des élèves des classes expérimentales et de **trente neuf** (Δ_j) toujours en leur faveur, pour les réponses justifiées. L'exemple ci-dessous permettra d'éclairer notre méthode de comparaison :

---

[24] Tableau présenté à la fin du § III.

[25] Les élèves avaient à leur disposition au début du questionnaire toutes les règles d'incidence utiles pour la justification des réponses.

Elè.	Eva2	T1		11	12	13	14	15	21	22	31	32	33	34	35		E4		>5	Δe	≥8	Δj
EA	82%	9		9	9	9	9	7	7	9	8	6	3	7	6		5'		11		6	
ET	82%	9		7	9	8	8	6	1	6	1	0	3	3	8		0		7	4	4	2
IA	69%	8		9	9	9	3	7	7	0	6	0	3	3	9		0		7		4	
IT	71%	8		7	6	6	1	1	2	6	6	2	2	6	6		4		7	0	0	4
LB	73%	6		7	7	9	9	8	9	0	6	6	2	0	0		0		8		4	
LT	73%	6		7	7	8	6	7	7	9	7	6	6	6	3		4		11	3	2	2

EA et ET codent respectivement des élèves d'une classe expérimentale et de la classe témoin. La colonne Eva2 donne les résultats à l'évaluation nationale à l'entrée en seconde et la colonne T1 les nombres de triangles reconnus au prétest. Les élèves ayant les mêmes résultats à ces épreuves préalables sont appariés, on note dans les colonnes 11 à 35 les codes de leurs réponses aux douze questions des trois premiers exercices de l'évaluation finale, dans E4 on trouve les codes des réponses à l'exercice 4. Les codes supérieurs à 5 codent les réponses exactes, les codes 8 et 9 des réponses exactes et justifiées de façon «satisfaisante» : les plans utiles sont mentionnés dans la justification donnée. Les totaux pour chaque élève sont donnés dans les colonnes nommées : > 5 et ≥ 8 et les différences positives ou négatives dans les colonnes codées Δ_e et Δ_j.

Les différences se font donc sentir sur l'*appréhension discursive des figures et non sur l'appréhension perceptive* ce qui confirme en quelque sorte que **voir dans l'espace est : discerner les plans en présence.**

VI - Conclusion.

La géométrie tridimensionnelle met, en général, en œuvre deux registres de représentations sémiotiques : le registre figural et le langage naturel indispensable à l'identification des représentations et aux traitements géométriques. La coordination de ces registres, difficile en géométrie plane est rendue encore plus problématique lorsqu'il faut, dans les représentations planes d'objets tridimensionnels, identifier certaines sous-figures déformées par les projections ou discerner des plans à partir de quelques uns de leurs éléments représentés.

Les recherches dont nous avons rendu compte montrent que les élèves de collège peuvent apprendre à représenter les solides simples et à les identifier, sans connaître les règles de la projection parallèle sur un plan. Mais, ces mêmes élèves[*Bonafe,* 1991] ont des difficultés à reconstruire un solide à partir de sa perspective parallèle, à représenter un solide sous un autre point de vue que celui donné. À ce niveau, les deux espaces bi- et tri-dimensionnels paraissent presque indépendants. Ces collégiens ne discernent pas sur une représentation en perspective

parallèle les faces utiles pour la construction d'une section et la présence de l'objet réel n'améliore pas en général les performances [*Chevalier*, 1989].

Le **discernement des plans** est, en effet, un seuil difficile mais essentiel pour l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle. **Difficile**, aussi bien sur un objet matériel que sur une représentation en perspective parallèle et **essentiel**, car sur les plans reposent toutes les étapes des démonstrations. «Voir dans l'espace» implique, pour l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle, le discernement des plans :

> Nous ne «voyons» des objets, sur de telles projections, que quand nous les connaissons déjà : un dessin dans le plan avec sa perspective, ses différents plans n'est assimilé par l'observateur que s'il a intégré préalablement cette structure dans son cerveau.[*Hubbard*, 1990 p. 7]

Peut-on apprendre à discerner les plans sur une représentation en perspective parallèle ? Si oui, comment ? Nous avons fait l'hypothèse, comme d'autres chercheurs, que la nécessité de structurer l'objet pour que son image résiste aux rotations [26], de discerner les plans pour analyser et coordonner les différents éléments bi- ou uni-dimensionnel imposait, pour un temps déterminé, l'introduction d'un objet matériel.

Nous avons pu constater que cette introduction facilitait, pour les élèves des classes expérimentales, l'utilisation des représentations en perspective parallèle à des fins de **traitement**. Cet objet n'a pas été choisi comme modèle mathématique d'un objet précis mais comme outil permettant d'apprendre à **discerner des plans**, en **articulation** avec le fonctionnement des représentations en perspective parallèle.

Les résultats montrent que cet apprentissage donne aux élèves la capacité de déceler, sur des représentations bidimensionnelles, des sections planes et de les utiliser dans leur déduction, d'utiliser l'appréhension perceptive support d'une appréhension opératoire. Si tous n'ont pas franchi ce seuil, le plus grand nombre a compris qu'il était essentiel de commencer par bien identifier les plans. Ce seuil franchi, les élèves peuvent être alors en mesure de créer eux-mêmes les représentations en perspective parallèle utiles à la résolution des problèmes tridimensionnels.

Ce travail éclaire certaines questions non complètement résolues. Le problème du temps très long d'appropriation de l'appréhension perceptivo-opératoire d'une représentation «2D pour 3D» ainsi que la non conception de la diversité des sections d'un solide, permet de penser que la fréquentation des maquettes devrait être plus précoce. Mais, comme nous l'avons vu, les moments d'introduction et les tâches demandées déterminent la réussite de cet apprentissage : ces moments et ces tâches sont à déterminer. Le rôle du langage naturel dans la réussite du discernement des plans : *la formulation de la question*, dont à plusieurs reprises nous avons signalé l'importance, devrait être étudié de façon spécifique. Il nous était difficile en tant qu'acteur et observateur de discriminer son influence.

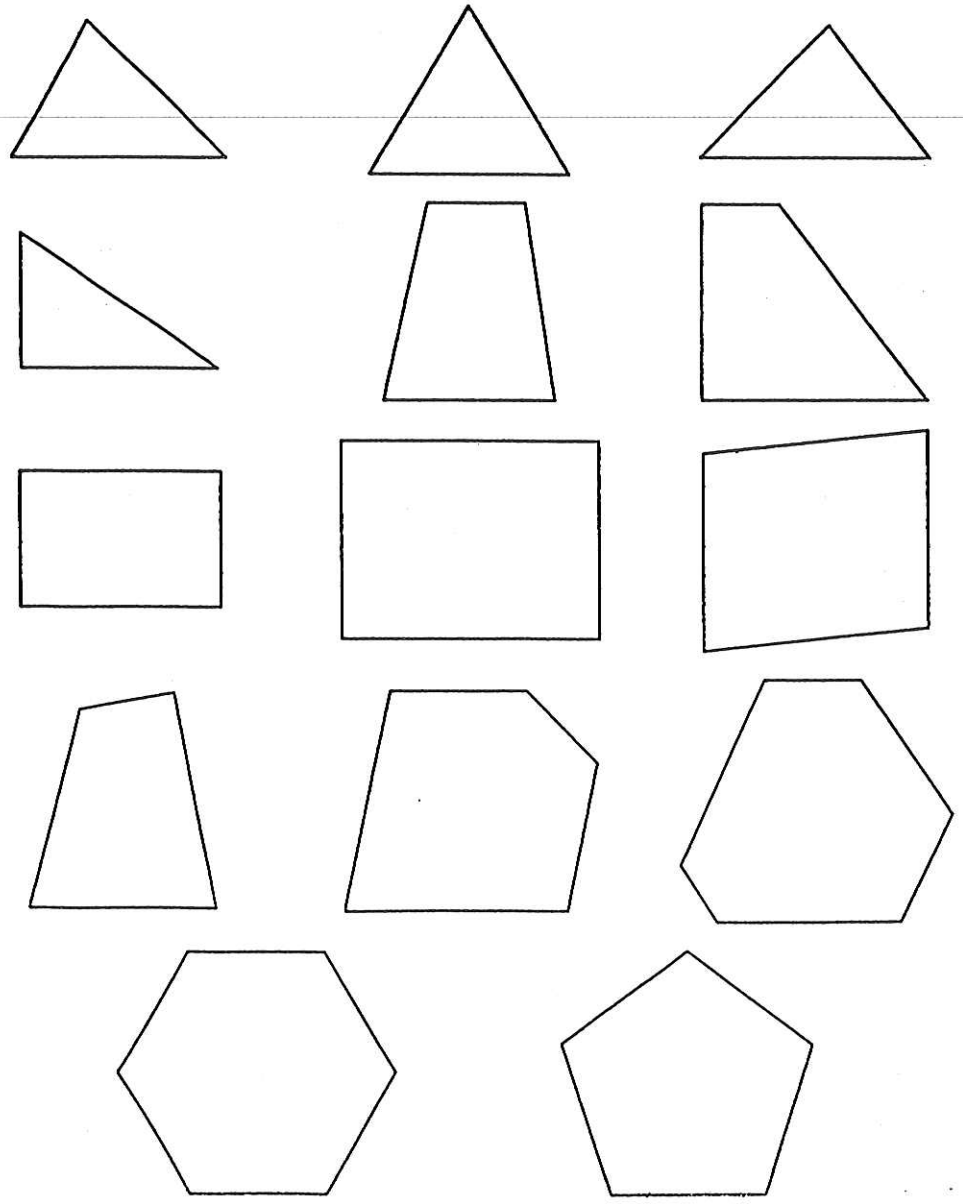
---

[26] Nous empruntons cette expression à R.Baldy [*Baldy*, 1989 p. 425] qui lui aussi constate que l'introduction de l'objet matériel doit se faire à un moment précis même pour les adultes en préformation.

Nous ne pouvons pas ne pas nous poser la question de la place de l'outil informatique dans cet apprentissage. Cet outil peut-il aider au développement de l'«intuition» de l'espace qui sollicite la vue, le toucher, le mouvement ? Voir bouger une représentation en perspective parallèle n'est pas perceptivement de même nature que voir - et faire - tourner un objet. Seul le regard participe à la première opération alors que le corps ajoute sa participation dans le second cas. Les travaux existants ne permettent pas encore de savoir quelles activités spécifiques à l'utilisation des ordinateurs pourront aider au franchissement de ce seuil du discernement des plans.

Cet apprentissage a été ressenti comme *difficile* par les «futurs scientifiques» qui situaient cette difficulté dans la *démonstration*. Par contre, les «futurs littéraires» peut être parce qu'ils savaient que cet apprentissage ne serait pas repris l'année suivante y ont trouvé un grand intérêt. Il nous semble que la *découverte* qu'une représentation peut s'analyser, qu'une démonstration peut être utile à la compréhension d'une figure leur sera profitable dans d'autres domaines que les mathématiques. Il suffit de lire certains textes de critiques ou d'historiens d'arts pour s'en convaincre. H.Damisch parle du feuilletage du plan pictural à propos de l'Autoportrait du Louvre de Nicolas Poussin (1650). E.Jollet, toujours à propos de Poussin, évoque la distinction que celui-ci faisait entre l'"«aspect» et le «prospect», le premier regard sur l'œuvre et son analyse plus profonde. Dans ces deux volets nous pouvons reconnaître l'appréhension perceptive et l'appréhension opératoire. La géométrie tridimensionnelle, par l'aspect **compréhension** des représentations planes et exécution de celle-ci, nous paraît devoir trouver une place dans l'enseignement des mathématiques pour tous les élèves.

Annexe 1 -



Formes contenues dans les enveloppes : échelle 60%.

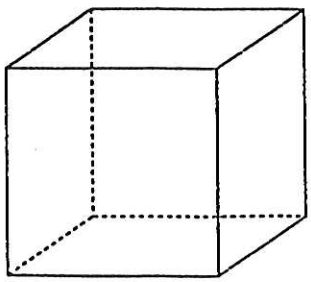
Annexe 2 -

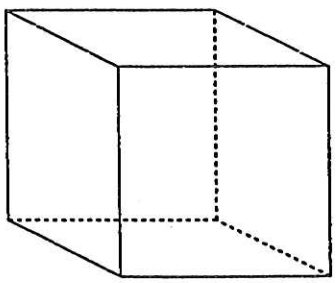
Feuille 7 -

Noms, Prénoms :

date : Classe

Soit *ABCDEFGH* un cube d'arête 5 cm. *ABCD* est une face, les arêtes *[AE]*, *[BF]*, *[CG]* et *[DH]* sont parallèles.
P est le point de l'arête *[AE]* tel que *AP = 4cm*,
Q est le point de l'arête *[AB]* tel que *AQ = 3,5cm*,
R est le point de l'arête *[BC]* tel que *BR = 2cm*.
On «coupe» le cube suivant le plan *(PQR)*, dessiner sur la maquette et en vraie grandeur sur la feuille la **section plan** du cube.
Indiquer sur la feuille la démarche suivie pour le dessin sur l'objet et le dessin en vraie grandeur.
Terminer en représentant, sur chaque dessin en perspective parallèle ci-dessous, la section obtenue.
Nommer avec soin les sommets du cube, ainsi que les sommets de la section.





Exemple d'une feuille d'apprentissage.[27]

[27] La figure de droite est une projection parallèle sur un plan parallèle à une face, l'angle des fuyantes est de 153° et le coefficient de réduction est de 3/5. La figure de gauche est une projection parallèle sur un plan parallèle à un face, l'angle des fuyantes est de 35° et le coefficient de réduction est de 1/2. Les figures sont réduites à l'échelle 70%.

Bibliographie.

BALDY R. , 1989, Comparaison de dessins d'objets en perspective cavalière avec un dessin modèle ou avec un objet réel. *European journal of psychology of education* vol.IV n°3. p. 419-428.

BECHMANN R., 1991, *Villard de Honnecourt. La pensée technique au XIII e siècle et sa communication*. Picard éditeur, Paris.

BELHOSTE B., 1989, Gaspard Monge. *Pour la Science* n°146 p. 66-73 .

BELHOSTE B., 1997, L'école du génie de Mézières, l'alliance entre théorie et pratique. *La Recherche* n°300 p. 40-45 .

BESSOT A., EBERHARD M., 1987a, Représentations graphiques d'assemblages de cubes et finalités des situations. *Le dessin technique*, (P.Rabardel, A.Weill-Fassina éditeurs) Hermès, Paris. p.61-71.

BESSOT A., EBERHARD M., 1987b, Représentations graphiques et théorisation de l'espace des polycubes. Un processus didactique. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (G.Vergnaud, G.Brousseau, M.Hulin éditeurs). Editions La Pensée Sauvage, Grenoble. p. 87-108 .

BONAFE F., 1985, *La genèse du problème SEC.* Edition Irem-USTL, Montpellier.

BONAFE F., 1991, *La séquence PC, suite pas à pas des travaux des élèves.* Edition Irem-USTL, Montpellier.

CARON-PARGUE J., 1981, Quelques aspects de la manipulation. Manipulation matérielle et manipulation symbolique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol.2.1, Editions la Pensée Sauvage, Grenoble. p. 5-35.

CARON-PARGUE J., 1985, *Le dessin du cube chez l'enfant : organisations et réorganisations de codes graphiques.* Editions Peter Lang, Berne.

CARON-PARGUE J., 1987, Une approche de la genèse de la production graphique. Le dessin du parallélépipède. *Le dessin technique*, (P.Rabardel, A.Weill-Fassina éds) Hermès, Paris. p. 35-42 .

CHEVALIER A., 1989, *Analyse du problème SEC. Dessin en perspective cavalière et vision de l'espace.* Edition Irem-USTL Montpellier.

COMAR P., 1994, *La perspective en jeu. Les dessous de l'image.* Ed. Découvertes Gallimard, Paris.

DUVAL R., 1994, Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères*, n°7. Topiques éditions, Pont-à-Mousson. p.121-138 .

DUVAL R., 1995a. *Signe et objet*}. À paraître.

DUVAL R., 1995b, *Sémiosis et pensée humaine.* Peter Lang, Berne.

GAMBA E. , MONTEBELLI V., 1996, Piero della Franscesca peintre mathématicien. Pour la Science, n°224. p.68-75.

MARTZLOFF J.C., 1988, *Histoire des mathématiques chinoises.* Editions Masson, Paris.

NORDON D., 1992, Bloc-notes. *Pour la Science,* n°71. p.7.

OLÉRON P., 1963, Les activités intellectuelles. *Traité de psychologie expérimentale* VII. *L'intelligence.* (J.Piaget, P.Fraisse éditeurs). P.U.F. Paris (1980). p. 1-62 .

PAIS L.C., 1991, *Représentation des corps ronds dans l'enseignement de la géométrie au collège : pratiques d'élèves, analyse de livres.* Thèse de doctorat, Montpellier II.

PALMER S., ROCK I., 1991, L'héritage du gestaltisme. *Pour la Science,* n°60, p. 64-70.

PARZYSZ B., 1989, *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir-savoir.* Thèse de doctorat de l'Université de Paris VII.

PARZYSZ B., 1991, Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol.11.2-3, Editions la Pensée Sauvage, Grenoble.p. 211-240 .

PANOFSKY E., 1987, *La vie et l'Art d'Albrecht Dürer* (Première édition 1943) Edition Hazan, Paris.

PEIFFER J., 1993, Dürer, le peintre géomètre. *Pour la Science,* n°184, p. 10-12.

POTIÉ P., 1996, *Philibert de l'Orme. Figures de la pensée constructive.* Editions Parenthèses, Marseille.

ROMMEVAUX M-P., 1991 , Le premier pas dans l'espace. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* vol.4. Irem-ULP, Strasbourg. p. 85-123.

ROMMEVAUX M.P., 1997, *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle.* Thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg.

SAKAROVITCH, J., 1995, Stéréotomie et géométrie. *Mathématiques et Arts.* (M.Loi éditeur) Hermann éditeurs, Paris. p. 79-91.

TATON, R., 1951, *L'œuvre mathématique de G.Desargues.* Presses Universitaires de France, Paris.

DE L'INFLUENCE DES REPRÉSENTATIONS DISPONIBLES SUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES DE PROBABILITÉ ET SUR L'ACQUISITION DU CONCEPT D'INDÉPENDANCE.

Claire DUPUIS et Suzette ROUSSET-BERT

At the first stages of probability teaching, which changes between which registers of representation can be introduced in order to help understanding ? Modelisations congruent to natural language, the use of so called familiar situations or the restriction to symbolic expressions cannot help pupils to understand, for example, independance in probability. Introducing tree diagrams and cross tables representations in probability is helpful to construct the meaning of probabilistic independance.

Lors de l'initiation aux probabilités, quels sont les changements de registres de représentation à introduire pour faciliter la compréhension des phénomènes et à quel moment les introduire ? Les recours aux modélisations quasi linguistiques, au faux concret évoqué ou aux seules écritures symboliques ne sont pas suffisants pour la compréhension de l'indépendance en probabilité, quand ils ne créent pas eux-mêmes des obstacles. Dès le début, la pratique de changements de registres dans la représentation de situations d'indépendance et de dépendance, utilisant les registres que constituent les arbres et les tableaux de probabilité, permet de donner du sens à l'indépendance en probabilité.

Pour l'avoir observé avec des populations de collégiens et de lycéens, on connaît maintenant l'influence que peut avoir la possibilité de disposer de représentations intermédiaires lorsqu'il s'agit de passer d'un énoncé de problème à sa résolution (par exemple W. L. Damm, C.Dupuis (1992), Groupe Math -Français (1996))

Nous avons réalisé deux questionnaires, le premier en Deug "BioPhysicoChimie" (au début de la deuxième année) et le second en Terminale (après la fin du cours de probabilité). Dans notre analyse, nous distinguerons les questions classiques de calcul de probabilités et celles qui portent sur l'indépendance de deux événements.

Ayant déjà observé les possibilités qu'offrent les arbres de probabilité en terminale (Claire Dupuis et Suzette Rousset-Bert, 1996), nous avons voulu observer si la mise à disposition d'une organisation des données en tableau (ou en arbre) pouvait avoir une influence sur le traitement et sur la réussite de problèmes élémentaires de probabilité. C'est ce que nous étudierons plus particulièrement dans le paragraphe 1, en comparant les réussites des étudiants sur des problèmes équivalents du point de vue de leur contenu mathématique, mais différents dans la présentation des données (énoncés sous forme de texte seulement, énoncés comportant des tableaux ou des arbres). On trouvera en annexe l'ensemble des énoncés ainsi qu'une description des conditions de passation et un aperçu des résultats.

Les paragraphes suivants sont centrés sur l'acquisition du concept d'indépendance et la possibilité d'améliorer l'enseignement de ce concept en faisant travailler les élèves sur ses différentes représentations sémiotiques. Nous ferons tout d'abord un bref panorama des difficultés de présentation de ce concept dans les programmes de Terminale (§2)

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
6 (1998) (p. 67-87) - IREM de Strasbourg

Dans le paragraphe 3, nous montrerons que le concept d'indépendance peut être valablement enseigné et surtout mis en oeuvre dans des registres de représentation autres que la langue naturelle ou les écritures symboliques.

Nous pensons en effet que, pour que les élèves s'approprient rapidement cet objet mathématique, s'en fassent une image mentale correcte, il est bon de rendre "visible" l'indépendance de deux événements dans un arbre et dans un tableau.

Nous analyserons ensuite les réponses des élèves et des étudiants aux questions portant sur l'indépendance.(§4). Pour ce faire, nous définirons diverses conceptions de l'indépendance. Nous nous intéresserons aussi aux représentations sémiotiques, telles que des arbres ou des tableaux, produites spontanément par les élèves et à leur lien avec la réussite aux différentes questions. Nous montrerons que les réussites augmentent lorsque les élèves disposent de plusieurs outils de représentation.

1) LES QUESTIONS "CLASSIQUES" : EFFETS D'UNE VARIATION.

La difficulté du problème ci-dessous, dans sa version "texte", tient au fait que le croisement des deux caractéristiques sémantiques que sont la couleur et la parité n'est pas mis en évidence. Ce croisement serait plus perceptible dans une version "texte" si les trois données étaient des probabilités d'intersections (comme dans le problème T2). Ce croisement est bien mis en évidence par la présentation sous forme de tableau.

Enoncé T1 tableau

Une urne contient des jetons de deux couleurs : JAUNE et VERT, portant chacun un numéro, qui est PAIR ou IMPAIR.
On tire au hasard un jeton dans cette urne.
Le tableau ci-dessous indique les probabilités de différents événements :

	être JAUNE	être VERT	
porter un numéro PAIR	1 / 12		4 / 12
porter un numéro IMPAIR			
	7 / 12		

1) Les événements "être JAUNE" et " porter un numéro PAIR" sont-ils indépendants?
JUSTIFIEZ VOTRE REPONSE.
2) Quelle est la probabilité pour que le jeton soit VERT ?
3) Quelle est la probabilité pour que le jeton porte un numéro IMPAIR ?
4) Quelle est la probabilité pour que le jeton soit VERT et porte un numéro IMPAIR?

Trente-quatre étudiants sur trente-huit ont répondu correctement aux trois questions ne portant pas sur l'indépendance.

Les trente-quatre étudiants qui ont répondu correctement ont tous, quoique ce ne soit pas demandé, complété correctement le tableau. Deux autres étudiants ont complété correctement le tableau, sans répondre explicitement aux questions.

Enoncé T1 texte.

Une urne contient des jetons de deux couleurs : BLANC et ORANGE, portant chacun un numéro.
On tire au hasard un jeton dans cette urne.
La probabilité pour que le jeton soit BLANC est 7 / 12.
La probabilité pour que le jeton porte un numéro PAIR est 4 / 12.
La probabilité pour que le jeton soit BLANC et porte un numéro PAIR est 1 / 12.
1) Quelle est la probabilité pour que le jeton soit ORANGE ?
2) Quelle est la probabilité pour que le jeton porte un numéro IMPAIR?
3) Quelle est la probabilité pour que le jeton soit ORANGE et porte un numéro IMPAIR ?
4) Les événements "être ORANGE" et "porter un numéro IMPAIR" sont-ils indépendants ?
JUSTIFIEZ VOTRE REPONSE.

Vingt-deux étudiants sur trente-huit ont répondu correctement aux trois questions ne portant pas sur l'indépendance.

Représentations spontanées.

Sur les vingt-deux réponses correctes, on observe neuf tableaux complets corrects avec marges, deux arbres corrects et deux arbres où les probabilités des intersections sont sur les branches au lieu d'être au bout. Dix-neuf étudiants ne font aucune représentation, neuf d'entre-eux donnant les trois réponses correctes.

Réussites, échecs et représentations "spontanées".

La différence entre les taux de réussite à T1-Tableau et à T1-Texte est significative et peut être attribuée à la différence de présentation des données des deux versions de T1. En effet, on observera que les deux échantillons de trente-huit étudiants ont exactement les mêmes performances sur les trois autres problèmes.

Dans la population des soixante-seize étudiants interrogés, nous avons observé que

- faire figurer une représentation non demandée sur la copie n'est pas une condition nécessaire de réussite (pour T1-texte, on observe neuf réussites sur vingt-deux sans aucune représentation visible).

- une représentation correcte visible (non demandée) n'est jamais associée à une réponse fausse (elle est associée soit à une réponse correcte, soit à une non-réponse).

- il est rare qu'une représentation non conforme soit associée à une réussite ; ainsi pour T1-texte, les seuls cas sont deux arbres avec les probabilités d'intersection sur les branches au lieu d'être au bout des branches. Compte tenu des questions posées, cette erreur de représentation est sans conséquence sur les réponses.

En conséquence, si la production d'une représentation (non demandée) ne peut être qualifiée de nécessaire à la réussite, on voit que dans tous les cas où cette production spontanée d'une représentation est faite par des élèves qui maîtrisent ce type de représentation, elle conduit à la réussite.

2) L'INDÉPENDANCE EN PROBABILITÉ : QUELQUES AVENTURES DE L'ENSEIGNEMENT DE CET OBJET MATHÉMATIQUE EN TERMINALE

la place de l'indépendance dans l'enseignement des probabilités

Seule l'indépendance de deux événements figure au programme de terminale. Dès que l'on a plus de deux événements, ou que l'on fait des conditionnements successifs, il faut introduire des distinctions entre l'indépendance deux à deux, trois à trois, et l'indépendance mutuelle. On peut penser que le concept d'indépendance figure dans les programmes de Terminale parce qu'il semble simple, du point de vue de l'expert, de l'introduire en même temps que le concept de probabilité conditionnelle. Ce que l'on enseigne à ce niveau n'est donc qu'une toute petite partie de la richesse d'un concept plus utile pour la suite des études, du moins si les probabilités y ont une place, que pour la résolution de problèmes de niveau Terminale. Ainsi, par exemple, l'indépendance des variables aléatoires constituant un échantillon est une des hypothèses permettant de construire la loi de la moyenne d'échantillon $\overline{X}$ qui sera l'outil de décision d'un test d'hypothèses sur une moyenne.

ce qui est fait habituellement dans les manuels pour présenter la notion d'indépendance aux élèves

Nous avons examiné quelques manuels de terminale et leur présentation de l'indépendance ; elle respecte plus ou moins le schéma suivant.

Au paragraphe "indépendance" figure une définition incluant $p(A \cap B) = p(A).p(B)$. Dans certains ouvrages, on démontre l'équivalence avec $p_A(B)=p(B)$ lorsque $p(A)$ n'est pas nul. Il n'y a, en général, pas d'exemple de situation permettant de discerner un cas d'indépendance et un cas de dépendance.

La définition est souvent accompagnée de quelques commentaires du genre "Ainsi la probabilité d'obtenir B sachant que A est réalisé, est égale à la probabilité d'obtenir B. Intuitivement cela signifie que B ne dépend pas de A ; de même A ne dépend pas de B".

Cette tentative louable de rapprochement avec le familier dans la phrase "Intuitivement cela signifie que B ne dépend pas de A" peut conforter des confusions puisqu'elle supprime toute référence à une probabilité dans la définition de l'indépendance. On glisse alors sans le vouloir vers l'idée fausse que l'indépendance est attachée de manière intrinsèque à la définition de l'événement sans tenir compte de la répartition de probabilité sur l'univers.

D'autres manuels essaient d'éclairer cette définition par un exemple supposé familier pour l'élève, celui des tirages successifs de deux boules avec remise.

L'énoncé type de l'exercice proposé pour illustrer l'indépendance est le suivant :

"une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On effectue, au hasard, deux tirages successifs (indépendants) avec remise. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche et la seconde noire ?"

Si A est l'événement "la première boule tirée est blanche" et si B est l'événement "la seconde est noire", $p(A\text{et}B) = p(A).p(B)$; $p(A) = \frac{2}{3}$; $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $p(A\text{et}B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

En fait quels sont les événements indépendants dans ce problème et que cache-t-on aux élèves ?

Notons Ω_1 (resp Ω_2) l'ensemble des éventualités associé au premier tirage(respectivement deuxième tirage). A chaque tirage de deux boules avec remise on peut associer un couple de ($\Omega_1 \times \Omega_2$). Si A1 est le sous ensemble de Ω_1 constitué des boules blanches et si A2 est le sous ensemble de Ω_2 constitué des boules noires , alors ce sont les événements $A1 \times \Omega_2$ et $\Omega_1 \times A2$ qui sont indépendants pour la probabilité produit.

Il ne nous semble pas raisonnable de parler aux élèves d'ensembles produit et de probabilité produit ; on parle donc dans cet exemple de l'indépendance de deux événements mal définis. Autrement dit la référence à cet exemple soit disant "familier" est un rideau de fumée.

Regardons maintenant les quelques exercices qui suivent le cours et qui concernent l'indépendance.

Bon nombre d'entre eux contiennent au moins un indice dans l'énoncé qui conduit l'élève inévitablement vers la loi binomiale, comme dans l'énoncé suivant.

" Un représentant de commerce doit visiter 5 clients. Chacune de ces visites est indépendante des autres . La probabilité qu'il rencontre effectivement le client est p=0,6 (le client est absent, ou le représentant ignore le code de l'immeuble).

On note X le nombre de clients effectivement rencontrés. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

Donnez la probabilité des événements suivants :

a) le représentant rencontre au moins un client

b) le représentant rencontre au moins trois clients"

Que doit-on comprendre en lisant la phrase "Chacune de ces visites est indépendante des autres"? L'auteur a voulu exprimer que les cinq variables aléatoires indicatrices X_i associées aux cinq visites de clients sont des variables aléatoires indépendantes de sorte que leur somme X suit une loi binomiale.

On peut imaginer une expérience aléatoire pour donner un sens probabiliste à cette phrase. Le représentant de commerce dispose d'une urne contenant des boules représentant ses différents clients. Il tire 5 boules successivement avec remise. Autrement dit il peut aller voir 5 fois de suite le même client. Il n'y a donc indépendance que pour les représentants de commerce amnésiques.....

Certains auteurs pourraient être tentés de supprimer dans leurs énoncés toute référence à une indépendance de ces variables, arguant du fait que la probabilité de réussir à voir le client est stable. Mais cela ne suffit pas. Il faut en effet se rappeler que la probabilité a priori d'obtenir une

boule d'une couleur donnée est aussi stable lorsque l'on tire successivement et sans remise dans une urne à deux couleurs, du moins jusqu'à épuisement de l'urne. Dans ce cas la loi de la somme des X_i est une loi hypergéométrique. Cette suppression de toute référence à l'indépendance ne gênerait guère les élèves qui feraient facilement et éventuellement implicitement cette hypothèse d'indépendance pour construire leur loi binomiale.

L'indépendance intervient aussi dans des exercices qui, à un habillage près, ressemblent à celui-ci : "Monsieur Durand, très prévoyant, a utilisé pour chauffer sa maison deux types de chauffage indépendants : le premier (pompe à chaleur) tombe en panne avec une probabilité de 0,2 et le second (chauffage au fuel) tombe en panne avec une probabilité de 0,05.

Quelle est la probabilité qu'aucun des types de chauffage ne tombe panne? un seul des deux types de chauffage soit en panne ?"

On peut remarquer que ce sont des types de chauffage qui sont qualifiés d'indépendants. On ne sait pas trop ce qu'est l'expérience aléatoire. L'indépendance semble associée de manière intrinsèque aux événements.

On doit comprendre que ce sont les deux événements "le premier chauffage ne tombe pas en panne" et "le second chauffage ne tombe pas en panne" qui sont indépendants pour une probabilité évoquée dans la suite de l'énoncé. L'indépendance de ces deux événements est **postulée a priori,** il s'agit **d'une hypothèse de modélisation.** Il ne reste plus alors qu'à faire le calcul dans le modèle. En fait, même si cette hypothèse ne figurait pas dans l'énoncé les élèves la feraient en acte, d'ailleurs **que pourraient-ils faire d'autre pour résoudre cet exercice** ?

Cet exercice (et tous les autres construits sur le même modèle) donne à la formule $p(A \cap B) = p(A).p(B)$ une valeur de formule générale quels que soient A et B. Cette formule devient une méthode générale, une sorte de théorème en acte qui pourrait s'énoncer ainsi : pour calculer $p(A \cap B)$ il faut faire $p(A).p(B)$.

Le premier contact de l'élève avec l'indépendance est bien souvent réduit à la présentation d'une définition non suivie d'exemple ou suivie d'un exemple qui masque la difficulté. Rien ne permet à l'élève de discerner une situation d'indépendance d'une situation de dépendance. Enfin les exercices qui suivent le cours comportent deux risques :

celui de renforcer une conception intuitive de l'indépendance (indépendance attachée de manière intrinsèque à la définition de l'événement, sans aucune référence à une répartition de probabilité sur un univers)

celui de donner à la formule $p(A \cap B) = p(A).p(B)$ un caractère universel puisque sans elle il serait impossible de traiter l'exercice.

Il n'est donc pas étonnant que les élèves ne gardent qu'une idée un peu floue de l'indépendance, et que ce concept soit mal construit à la sortie de Terminale.

3) CE QUE L'ON PEUT PROPOSER POUR AMÉLIORER LA COMPRÉHENSION DE L'INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÉNEMENTS.

3.1 Comment représenter l'indépendance dans le registre des tableaux ?

Reprenons le problème T1 (énoncé en page 2)

Une urne contient des jetons de deux couleurs : JAUNE et VERT, portant chacun un numéro, qui est PAIR ou IMPAIR. On tire au hasard un jeton dans cette urne.

Voici le tableau complété correspondant à ce problème.

	être JAUNE	être VERT	
porter un numéro PAIR	1 / 12	3 / 12	4 / 12
porter un numéro IMPAIR	6 / 12	2 / 12	8 / 12
	7 / 12	5 / 12	12 / 12

Les événements J "être JAUNE" et P "porter un numéro PAIR" ne sont pas indépendants(question 1).

A partir de ce tableau présentant une situation de non-indépendance, on peut faire construire par les élèves un autre tableau présentant une situation d'indépendance.

	être JAUNE	être VERT	
porter un numéro PAIR	1 / 12	3 / 12	4 / 12
porter un numéro IMPAIR	2 / 12	6 / 12	8 / 12
	3 / 12	9 / 12	12 / 12

On peut visualiser l'indépendance dans ce tableau en repérant que la probabilité située dans chaque case "croisée" est le produit des probabilités situées dans ses marges. La représentation en tableaux illustre donc le fait que s'il y a indépendance des évènements P et J, il y a également indépendance de P et de V (événement contraire de J), de I (événement contraire de P) et J et des événements V et I.

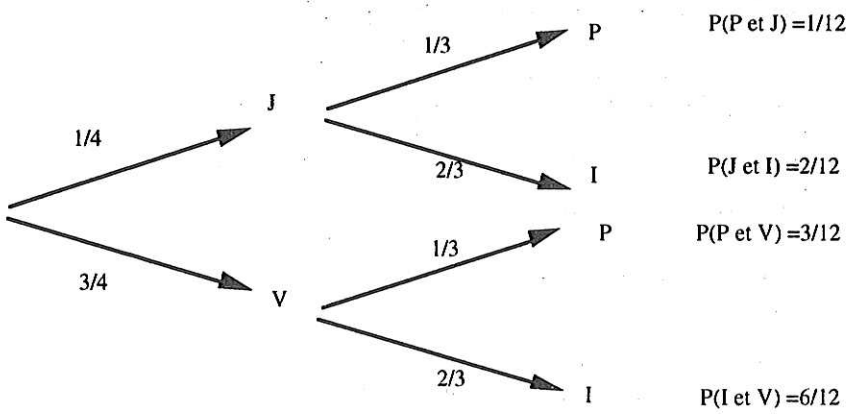
Ce critère de reconnaissance de l'indépendance (le nombre figurant dans chaque case "croisée" est le produit des nombres figurant dans ses marges) est "congruent" à la définition de l'indépendance dans le registre des écritures symboliques ($p(J \cap P) = p(J) \times p(P)$) car il y a correspondance entre les unités signifiantes qui constituent ces deux représentations.

On peut aussi repérer l'indépendance à la proportionnalité des colonnes ou à la proportionnalité des lignes.

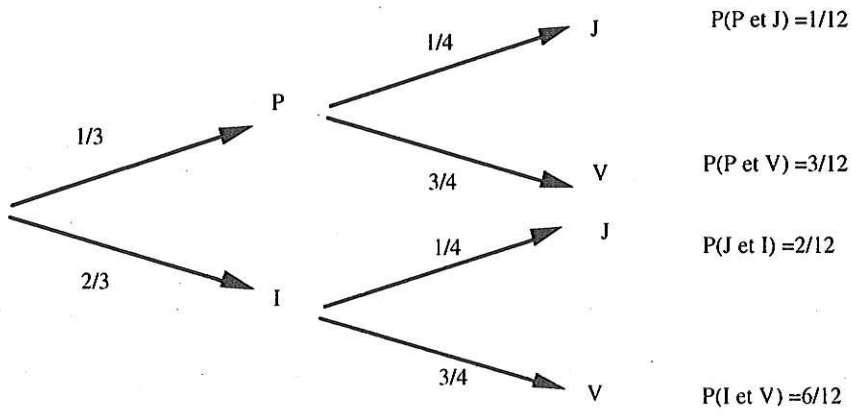
Cette proportionnalité des lignes et colonnes d'un tableau est étudiée en statistiques par les élèves de première ES dans les cas d'hypothèses de proportionnalité parfaite, quand on étudie des problèmes de sous-représentation et sur-représentation.

Comment se traduit l'indépendance dans le registre des arbres ?

Reprenons la situation d'indépendance ci-dessus. Les probabilités des intersections d'événements sont placées aux bouts des branches de l'arbre. Des probabilités conditionnelles apparaissent.



Construisons maintenant l'arbre renversé[1]. Il représente la même situation. Les probabilités aux bouts des branches sont les mêmes.



L'indépendance des événements P et V par exemple se lit de deux façons différentes, toutes deux suffisantes pour établir l'indépendance de deux événements dans cette situation. Sur le

[1] voir Dupuis et Rousset-Bert 1996, Groupe Probabilité 1994.

premier arbre, on voit que les deux "sous-arbres" de deuxième niveau sont identiques. On le voit sur le deuxième arbre aussi, bien évidemment. Si on compare le premier arbre et l'arbre renversé, on voit que le "sous-arbre" de premier niveau se retrouve dupliqué au deuxième niveau de l'autre arbre, et réciproquement !

On voit donc qu'il est facile de représenter une situation d'indépendance de deux événements dans le registre des arbres et dans celui des tableaux.

Avec le même matériel (des boules jaunes et vertes portant des numéros pairs et impairs) on peut donc fabriquer une situation d'indépendance et une situation de dépendance en faisant simplement varier la répartition de probabilité dans l'univers et montrer ainsi que des événements ne sont pas intrinsèquement indépendants ou dépendants.

Le travail dans ces registres de représentations et surtout le travail sur les changements de registres de représentations permettent de donner du sens au concept, par la mise en correspondance des diverses représentations de ce même concept. Les arbres et les tableaux peuvent donc être des aides à la conceptualisation.

4) ÉTUDE DES CONCEPTIONS D'ÉLÈVES DE TERMINALE ET DE DEUG À PROPOS L'INDÉPENDANCE

Nous avons voulu repérer quelles étaient les conceptions des élèves à propos de l'indépendance au travers d'une enquête conçue dans son ensemble pour regarder l'influence de la présentation des données sur les réponses.

Dans ce paragraphe nous avons extrait pour notre analyse les questions concernant l'indépendance dans les différentes problèmes proposés (voir annexes 1 et 2).

4.1 les différentes conceptions des élèves de Terminale

Nous donnons au mot conception le sens que lui a donné Corine Castela (1995) : "Une conception est une modélisation élaborée par le chercheur. Elle vise à rendre compte de la cohérence perceptible dans les comportements observables d'un élève confronté à une groupe de tâches mettant en jeu le même concept mathématique : tout se passe comme si, pour toutes les activités concernées, le sujet utilisait cette conception de l'objet en question. Le modèle proposé n'a pas de visée globale, un même élève peut manifester dans des exercices différents des conceptions distinctes. Il n'est pas non plus strictement local puisqu'il veut traduire une cohérence." Nous définissons les conceptions ci-après.

Conception Correcte : la réponse de l'élève comprend une référence à une des deux définitions $p(A \cap B) = p(A).p(B)$ ou $p_A(B) = p(B)$ et le calcul explicite fait sur l'exemple en question avec sélection des données pertinentes.

Conception fausse incluant des probabilités : la réponse de l'élève comprend une comparaison non pertinente de deux probabilités

ce sont des réponses du type

"les événements jaune et impair sont dépendants car on n'a pas la même probabilité d'avoir un jeton jaune et pair que un jeton vert et impair"

"ils sont dépendants car $p_F(V) \neq p_E(V)$ donc que l'on ait tiré une pièce étrangère ou française on n'a pas les mêmes chances d'avoir une pièce valable" ;

"le fait d'être jaune amène deux possibilités non équiprobables"

"$p(A).p(B) \neq 1$"

Conception intuitive : il n'y a aucune référence à une probabilité dans la réponse.

Dans ces réponses, l'élève fait comme si l'indépendance était une propriété intrinsèque qui qualifie les événements sans tenir compte de la probabilité qui leur est attachée.

Voici quelques exemples :

oui ils sont indépendants car le fait d'être jaune n'a rien à voir avec le fait d'être impair

oui car "valable n'entraîne pas française " et française n'entraîne pas valable"

oui car tous les jetons jaunes ne sont pas pairs

oui car le jeton peut être jaune avec un nombre pair

oui car si on tire un jeton pair, il n'est pas forcément jaune

On peut aussi avec le même type d'arguments obtenir la réponse non :

non car un jeton peut être pair sans être jaune

non car un jeton peut être à la fois jaune et pair.

Des réponses telles que "les événements sont indépendants car ils ne sont pas dépendants" ne nous permettent pas d'imaginer quelle est la conception de l'élève. Il y a ainsi quelques réponses que nous n'avons pas pu interpréter en l'absence d'autres informations.(**Conception non identifiée**).

4.2 les résultats en Terminale

Chacun des quatre problèmes de l'enquête comporte des questions sur l'indépendance. Nous avions conçu ces questions pour regarder l'influence de la présentation des données sur les réponses des élèves.

Dans le problème T1-Tableau, les probabilités à sélectionner pour répondre correctement à la question d'indépendance Q1 sont des données visibles dans le tableau ; à la question Q5 portant également sur l'indépendance, il faut se servir de résultats des questions précédentes, également visibles dans le tableau lorsqu'il a été complété correctement. Dans cette enquête, tous les élèves ont complété le tableau correctement.

Dans le problème P'1, la question Q4 porte sur l'indépendance de "la pièce est FRANÇAISE" (F) et "la pièce est VALABLE" (V). La probabilité P(F) est une donnée visible dans l'arbre ; la probabilité P(V) est le résultat de la question précédente. La probabilité de l'intersection P(F et V) est également visible dans l'arbre (en marge).

Dans le problème P'2 , les probabilités à utiliser à la question Q4 sur l'indépendance sont les résultats des trois questions qui précèdent. Il n'y a aucune représentation dans l'énoncé.

Dans le problèmes P''2, les probabilités à utiliser à la question Q6 sur l'indépendance sont des données et des résultats de questions précédentes. Il n'y a aucune représentation dans l'énoncé qui les rende visibles.

	Conception correcte	Comparaison fausse	Conception intuitive	non identifiée	non réponse	nombre d'élèves
T1-Tableau questions Q1 et Q5	**23**	**9**	**23**	**7**	**4**	**66**
P'1 (arbre) question Q4	**23**	**9**	**18**	**7**	**9**	**66**
P'2 (texte) question Q4	**11**	**5**	**5**	**1**	**10**	**32**
P''2 (texte) question Q6	**8**	**2**	**7**	**3**	**14**	**34**

Dans les problèmes T1-Tableau et P'1, les résultats concernant l'indépendance sont stables d'une question à l'autre et il y a très peu de changement de catégorie. Les arguments donnés par les élèves sont de mêmes nature dans les deux problèmes, ils se précisent ou se complètent. Le type de représentation, arbre ou tableau, ne semble pas avoir eu d'influence sur les résultats.

Dans les deux problèmes P'2 et P''2, où aucune représentation n'est fournie, il y a une forte augmentation des non-réponses. On peut penser qu'il y a un problème supplémentaire de sélection des données même pour les élèves qui connaissent la définition correcte et ont su la faire fonctionner dans les problèmes précédents.

4.3 les résultats en Deug

Les étudiants interrogés ont des conceptions stables de l'indépendance et ont répondu de la même façon aux quatre questions sur l'indépendance sauf quatre étudiants pour lesquels nous avons créé la catégorie "Mixte". Dans le tableau ci-après, nous n'avons donc pas distingué les quatre questions mais seulement les deux versions du questionnaire.

Pour interpréter les réponses des étudiants de Deug, nous avons dû introduire des catégories supplémentaires.

Conception correcte avec ambiguïté : la conception est vraisemblablement correcte mais la réponse présente une confusion. Il s'agit soit d'une confusion sur le vocabulaire dépendant, indépendant, soit d'une confusion des symboles $\cup$ et $\cap$ mais l'élève a sélectionné correctement les données pour calculer les probabilités. La catégorie "Correcte avec ambiguïté" diffère peu de la catégorie "Correcte" et il semble qu'il ne s'agisse que de confusion de vocabulaire ou de symbolisme, que l'on peut attribuer au peu de maniement récent de ces notations chez ces étudiants.

Confusion avec l'incompatibilité. Elle se repère dans des réponses telles que : "$p(A \cap B) \neq 0$ donc les événements sont dépendants".

La confusion avec l'incompatibilité ne se rencontre pas en Terminale ce qui n'est guère étonnant puisque la notion d'événements incompatible y est peu travaillée en tant que telle. On rencontre cette réponse un certain nombre de fois en Deug où l'incompatibilité et l'indépendance ont été étudiées l'année précédente.

Conception "Mixte" : l'étudiant utilise au moins une fois une définition correcte et fait au moins une fois une confusion avec l'incompatibilité.

Rappelons qu'il y a 38 étudiants interrogés pour chaque version du questionnaire.

version	Conception correcte	Correcte avec ambiguïté	Confusion avec l'incompatibilité	Conception Mixte	Conception intuitive	non identifiée	non réponse	
A avec T1-tableau	**19**	**5**	**4**	**3**	**3**	**2**	**2**	**38**
B avec T1-texte	**12**	**3**	**3**	**1**	**1**	**4**	**14**	**38**

Les réponses relevant d'une **conception intuitive sont peu nombreuses** ; on les rencontre ici chez des étudiants qui n'ont pas suivi le cursus habituel de la première année et qui n'ont pas suivi de cours de statistique la première année. Le fait d'avoir utilisé l'indépendance en première année de Deug a fait diminuer le nombre de réponses relevant d'une conception intuitive, alors qu'elles étaient assez fréquentes en Terminale

Le nombre de réponses correctes chute au profit des non-réponses entre la version A avec T1-tableau et la version B avec T1-texte, **la question de l'indépendance semblant plus difficile à traiter lorsqu'il n'y a pas de représentation explicite** permettant d'organiser les données et en particulier d'aller repérer la probabilité de l'intersection nécessaire au calcul.

4.4 production spontanée de représentations intermédiaires lorsque les énoncés sont donnés sous forme "texte" ; leur lien avec la réussite aux questions d'indépendance

Nous nous sommes enfin intéressés plus spécifiquement aux représentations non demandées produites spontanément par des élèves et des étudiants dans les problèmes dont l'énoncé est donné en version "texte".

En Terminale, pour résoudre les problèmes P'2 ou P''2, les élèves peuvent évidemment construire une représentation en arbre ou en tableau. Rappelons que les énoncés T1-Tableau et P'1 (arbre) comprennent des représentations. Cinquante-cinq élèves sur soixante-six ont produit spontanément des représentations. Nous avons croisé ces représentations avec les conceptions de l'indépendance.

	Conceptions					
	Correcte	Comparaison fausse	Intuitive	non identifiée	Non réponse	
arbre complet correct	5	3	3		6	17
arbre partiel correct	5		2		2	9
tableau complet correct	4	1		1	1	7
arbre faux	1	2	3	2	12	20
tableau faux				1		1
"patate" fausse					1	1
absence de représentation	4	1	4		2	11
	19	7	12	4	24	66

Sur les dix-neuf réponses relevant d'une conception correcte, on n'observe qu'une représentation fausse. Les vingt et une autres représentations fausses sont associées à des conceptions non correctes ou des non-réponses. **Les représentations correctes spontanées sont majoritairement associées à une conception correcte ou une non-réponse.**

On n'observe que cinq fois une représentation exacte associée à une conception "intuitive", même s'il faut bien admettre qu'une représentation correcte ne suffit pas à remettre en cause une conception intuitive. Seul un travail explicite, tel que celui que nous proposons, d'expression de l'indépendance dans divers registres de représentation pourrait mettre en question cette conception intuitive.

Dans l'enquête **en Deug**, les résultats sont encore plus nets. Considérons les problèmes P1, T1-texte et T2 dont l'énoncé ne comportait pas de représentation. Vingt-deux étudiants ont construit des tableaux corrects non demandés ; ces tableaux sont, pour dix-sept d'entre eux, associés à des réponses relevant d'une conception correcte ou correcte avec ambiguïté, à une confusion avec l'incompatibilité, trois conceptions "Mixtes", une non réponse. Huit étudiants ont construit des arbres corrects non demandés ; ils sont associés six fois à des réponses relevant d'une conception correcte ou correcte avec ambiguïté et deux non réponses. **Aucune représentation correcte spontanée n'est associée à une réponse intuitive.**

Il semblerait donc que le fait de produire une représentation correcte spontanée soit associé très majoritairement à un raisonnement probabiliste qui a sa cohérence (même s'il n'est pas exact).

Dans notre enquête de 1995 déjà citée, le problème T1-texte avait été proposé à soixante-huit élèves de Terminale. Seuls trois d'entre eux avaient réussi à donner une réponse à la question de l'indépendance. Nous avions observé beaucoup moins de productions spontanées de représentations : trois arbres exacts, vingt et un arbres diversement faux et un seul tableau. Si on observe plus de représentations non demandées en 1997, c'est peut-être parce que le questionnaire comporte des représentations mais aussi parce que les enseignants en ont plus utilisé dans leurs cours.

Nous pensons qu'il est possible d'améliorer la compréhension de l'indépendance en probabilité en utilisant plus systématiquement les changements de registres de représentation.

CONCLUSION

Tous les éléments recueillis dans nos enquêtes vont dans le même sens : disposer de représentations sémiotiques telles que arbres et tableaux constitue une aide efficace pour la résolution de problèmes et la compréhension des situations probabilistes. Que ces représentations figurent dans l'énoncé ou qu'elles soient produites spontanément par les élèves pour leur propre usage, l'effet est toujours le même : une augmentation des réussites grâce à ces outils d'organisation des données et de segmentation des textes des énoncés.

Les programmes 1998 pour la classe de Terminale ouvrent de nouvelles possibilités. En effet, les arbres et les tableaux sont désormais acceptés comme outils de démonstration, ce qui signifie par exemple pour les arbres que "dans la résolution d'un problème, l'écriture à bon escient d'un arbre pondéré accompagné d'un calcul explicite de la probabilité d'un évènement constitue à elle seule la rédaction d'une justification du résultat obtenu".

Dans le cas particulier de l'indépendance, nous pensons qu'il serait possible d'améliorer encore les performances des élèves en utilisant les repérages visuels de l'indépendance dans les différents registres de représentations sémiotiques. La mise en correspondance des diverses

représentations des situations d'indépendance ou de dépendance, dans plusieurs registres différents, permet de donner du sens à un concept difficile à introduire et pour lequel toute tentative de rapprochement avec le familier est plus ou moins vouée à l'échec.

Le concept d'indépendance pourra alors se construire comme un ensemble de représentations sémiotiques intériorisées et c'est la coordination des différents registres de représentations sémiotiques qui va permettre cette construction. Or "La coordination entre des représentations relevant de systèmes sémiotiques différents n'a rien de spontané. Sa mise en place ne résulte pas automatiquement des apprentissages classiques trop directement centrés sur des contenus d'enseignement. Un travail d'apprentissage spécifique centré sur la diversité des systèmes de représentation, sur l'utilisation de leurs possibilités propres, sur leur comparaison par mise en correspondance et sur leurs traductions mutuelles l'un dans l'autre semble nécessaire pour la favoriser. Lorsqu'un tel type de travail est proposé, on constate une modification complète dans les initiatives et dans les démarches des élèves pour effectuer des traitements mathématiques, pour les contrôler , pour la rapidité d'exécution et aussi pour l'intérêt pris à la tâche. Il n'y a pas simplement réussite mais modification de la qualité des productions." (R. Duval, 1995).

RÉFÉRENCES

Corine Castela (1995) Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.15, n°1, pp. 7-47.

Werner L. Damm, C.Dupuis (1992) "Les problèmes de mélange" , *Activités Mathématiques*, N° 18, pp 1 - 12.

Claire Dupuis et Suzette Rousset-Bert (1996) Arbres et tableaux de probabilité : analyse en termes de registres de représentation, *Repères-IREM*, N°22, pp. 51-72.

Raymond Duval (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.

Groupe Math -Français de l'IREM de Strasbourg (1996) *Problèmes de mise en équations : ces charades dont la solution est un système d'équations à deux inconnues*, Brochure IREM de Strasbourg.

Groupe "Probabilité" de l'IREM de Strasbourg (1994) *Enseigner les probabilités en classe de Terminale*, Brochure S 157, IREM de Strasbourg.

ANNEXE 1 LES ÉNONCÉS DU QUESTIONNAIRE DE DEUG

Enoncé P1

En vrac dans un panier se trouvent un grand nombre de pièces de monnaies de différents pays.
Si je prends une pièce au hasard, différents événements peuvent se produire : la pièce peut être française ou étrangère, être encore en cours de validité ou au contraire ne plus être valable.

La probabilité que la pièce soit française et valable est : 41 / 100.
La probabilité que la pièce soit étrangère et valable est : 18 / 100
La probabilité que la pièce soit française et ne soit plus valable est : 32 / 100
La probabilité que la pièce soit étrangère et ne soit plus valable est : 9 / 100

1) Quelle est la probabilité que la pièce soit française ?
2) Quelle est la probabilité que la pièce soit valable ?
3) Les deux événements "la pièce est française" et "la pièce est valable" sont-ils indépendants ? JUSTIFIEZ VOTRE REPONSE.

Enoncé P2

Dans une caisse se trouvent un grand nombre de petites pièces métalliques qui ont été fabriquées dans l'atelier A ou l'atelier B.
Si je prends une pièce au hasard dans la caisse, différents événements peuvent se produire : la pièce peut provenir de l'atelier A ou de l'atelier B, être bien fabriquée ou défectueuse.

Le tableau ci-dessous donne des probabilités d'événements :

	la pièce est bien fabriquée	la pièce est défectueuse
la pièce provient de l'atelier A	1 / 10	2 / 10
la pièce provient de l'atelier B	3 / 10	4 / 10

1) Quelle est la probabilité que la pièce provienne de l'atelier A ?
2) Quelle est la probabilité que la pièce soit bien fabriquée ?
3) Les deux événements "la pièce provient de l'atelier A" et "la pièce est bien fabriquée" sont-ils indépendants ? JUSTIFIEZ VOTRE REPONSE.

Enoncé T2

Une urne contient des jetons de deux couleurs : ROUGE et NOIRE, portant chacun un numéro.
On tire au hasard un jeton dans cette urne.
La probabilité pour que le jeton soit ROUGE et porte un numéro PAIR est 1/9 .
La probabilité pour que le jeton soit ROUGE et porte un numéro IMPAIR est 2/9.
La probabilité pour que le jeton soit NOIR et porte un numéro PAIR est 3/9.
1) Quelle est la probabilité pour que le jeton soit ROUGE ? soit NOIR ?
2) Quelle est la probabilité pour que le jeton porte un numéro PAIR ? IMPAIR ?
3) Quelle est la probabilité pour que le jeton soit NOIR et porte un numéro IMPAIR ?
4) Les événements "être NOIR" et " porter un numéro IMPAIR" sont-ils indépendants ?
JUSTIFIEZ VOTRE REPONSE.

ANNEXE 2 LES ÉNONCÉS DU QUESTIONNAIRE DE TERMINALE

Le questionnaire de Terminale comprenait deux modalités :

modalité A	T1 tableau	P'1	P'2
modalité B	T1 tableau	P'1	P"2

Enoncé T1 tableau

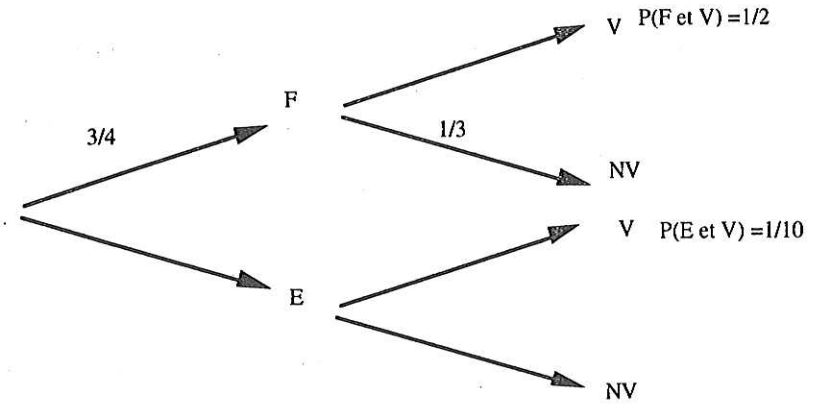
Même début d'énoncé qu'en DEUG avec deux questions supplémentaires :

5) Les événements "être VERT" et " porter un numéro IMPAIR" sont-ils indépendants ?
JUSTIFIEZ VOTRE REPONSE.

6) Quelle est la probabilité pour que le jeton soit JAUNE sachant qu'il porte un numéro PAIR ?

Enoncé P'1

En vrac dans un panier se trouvent un grand nombre de pièces de monnaies de différents pays.
Je prends une pièce au hasard dans le panier.
Différents événements peuvent se produire : la pièce peut être FRANCAISE (F) ou ETRANGERE (E), être encore VALABLE (V) ou au contraire ne PLUS être VALABLE (NV).
L'arbre ci-dessous donne les probabilités de différents événements :



1) Quelle est la probabilité que la pièce soit VALABLE sachant qu'elle est FRANCAISE ?
2) Quelle est la probabilité que la pièce soit FRANCAISE et ne soit PLUS VALABLE ?
3) Quelle est la probabilité que la pièce soit VALABLE ?
4) Les deux événements "la pièce est FRANCAISE" et "la pièce est VALABLE" sont-ils indépendants ? JUSTIFIEZ VOTRE REPONSE.
5) Quelle est la probabilité que la pièce soit FRANCAISE sachant qu'elle est VALABLE ?

Enoncé P'2

Dans une caisse se trouvent un grand nombre de petites pièces métalliques qui ont été fabriquées dans l'ATELIER A ou l'ATELIER B.
Je prends une pièce au hasard dans la caisse.
Différents événements peuvent donc se produire : la pièce peut provenir de l'ATELIER A ou de l'ATELIER B, être BIEN FABRIQUEE ou DEFECTUEUSE.

La probabilité pour que la pièce provienne de l'ATELIER B est 15 / 25.
La probabilité pour que la pièce soit DEFECTUEUSE est 3 / 25.

La probabilité pour qu'à la fois la pièce provienne de l'ATELIER B et soit DEFECTUEUSE est 2 / 25.

1) Quelle est la probabilité que la pièce provienne de l'ATELIER A ?
2) Quelle est la probabilité que la pièce soit BIEN FABRIQUEE ?
3) Quelle est la probabilité que la pièce provienne de l'ATELIER A et soit BIEN FABRIQUEE ?
4) Les deux événements "la pièce provient de l'ATELIER A" et "la pièce est BIEN FABRIQUEE" sont-ils indépendants ? JUSTIFIEZ VOTRE REPONSE.
5) Quelle est la probabilité pour que la pièce provienne de l'ATELIER B sachant qu'elle est DEFECTUEUSE ?

Enoncé P''2

Dans une caisse se trouvent un grand nombre de petites pièces métalliques qui ont été fabriquées dans l'ATELIER A ou l'ATELIER B.

Je prends une pièce au hasard dans la caisse.
Différents événements peuvent donc se produire : la pièce peut provenir de l'ATELIER A ou de l'ATELIER B, être BIEN FABRIQUEE ou DEFECTUEUSE.

La probabilité pour que la pièce provienne de l'ATELIER B est 15 / 25.
La probabilité pour qu'à la fois la pièce provienne de l'ATELIER B et soit DEFECTUEUSE est 2 / 25.
La probabilité pour que la pièce soit DEFECTUEUSE sachant qu'elle provient de l'ATELIER A est 1 / 10.

1) Quelle est la probabilité que la pièce provienne de l'ATELIER A ?
2) Quelle est la probabilité pour que la pièce soit DEFECTUEUSE sachant qu'elle provient de l'ATELIER B ?
3) Quelle est la probabilité pour qu'à la fois la pièce provienne de l'ATELIER A et soit DEFECTUEUSE ?
4) Quelle est la probabilité pour que la pièce soit DEFECTUEUSE ?
5) Quelle est la probabilité pour que la pièce provienne de l'ATELIER B sachant qu'elle est DEFECTUEUSE ?
6) Les deux événements "la pièce provient de l'ATELIER B" et "la pièce est DEFECTUEUSE" sont-ils indépendants ? JUSTIFIEZ VOTRE REPONSE.

ANNEXE 3 PASSATION ET APERÇU DES RÉSULTATS

Tous les problèmes des questionnaires utilisent des situations d'un tirage au hasard dans une "urne" où les "boules" présentent deux caractéristiques croisées. Les énoncés ont été construits en faisant varier la présentation des données de la situation pour observer si cette variation avait une influence sur les réponses.

Les questionnaires comportent chacun deux modalités ; des problèmes communs aux deux modalités permettent de contrôler l'homogénéïté des deux sous-échantillons.

1) Le questionnaire en DEUG.

Nous avons repris les situations des énoncés T1 (T1 texte ici) et T2 de notre article (C. Dupuis et S. Rousset-Bert, 1996). Nous avons modifié les couleurs des boules et les valeurs numériques dans T1 puisque les deux énoncés T1 et T2 sont présents dans les deux versions du questionnaire en DEUG. Nous n'avons conservé que les questions portant sur des probabilité d'intersections, des probabilités marginales et sur l'indépendance car les probabilités conditionnelles ne sont pas utilisées dans le cours de statistique de ces étudiants.

En terminale, à la fin du cours de probabilité (C. Dupuis et S. Rousset-Bert, 1996), nous avions observé

T1 Questions 1 et 2 (probabilités marginales)	65 réponses correctes pour 68 élèves
T1 Questions 3 (probabilité d'intersection)	6 réponses correctes pour 68 élèves !!! (et 31 réponses où la probabilité de l'intersection était calculée par produit des deux probabilités marginales précédentes).
T2 Questions 1 et 2 (probabilités marginales)	52 réponses correctes pour 63 élèves
T2 Questions 3 (probabilité d'intersection)	33 réponses correctes pour 63 élèves.

Deux versions de questionnaire ont été réalisées en DEUG.

	première page	deuxième page	troisième page	quatrième page
version A	T1 tableau **tableau incomplet avec marges visualisées**	P2 **tableau complet sans marges visualisées**	T2 **texte**	P1 **texte**
version B	P1 **texte**	T2 **texte**	T1 texte **texte**	P2 **tableau complet sans marges visualisées**

Conditions de passation.

Les deux versions de questionnaire ont été distribuées dans un amphi de BioPhysicoChimie 2ème année au début de l'année universitaire (durée de passation : une heure de cours). Ces étudiants (sauf ceux qui sont arrivés par équivalence mais qui ne représentent que 11 sur 76) ont eu en première année un cours semestriel de probabilité-statistique (42 heures en tout) ; l'enseignement des probabilités y est conçu comme devant apporter les outils nécessaires à l'apprentissage de l'estimation par intervalle et des tests d'hypothèses qui sont le véritable but du cours. Quasiment tous les énoncés de problèmes y sont des énoncés de modélisation, analogues à ceux que nous avons présenté dans le questionnaire. L'enseignement de deuxième année qui vient de débuter au moment de la passation est un enseignement de tests statistiques. Les tableaux qui y sont utilisés sont des tableaux de données d'observation. Trente-huit étudiants ont eu la version A, et trente-huit autres la version B.

Représentations fournies et réussites aux questions "classiques" avant la question sur l'indépendance

Problème	données et questions	Version A : 38 étudiants	Version B : 38 étudiants
Problème P1	4 probabilités d'intersection 2 questions	**37**	**37**
		texte	
Problème P2	4 probabilités d'intersection 2 questions	**34**	**34**
		tableau complet sans marges	
Problème T2	3 probabilités d'intersection 3 questions	**33**	**33**
		texte	

Réussites, échecs et représentations visibles.

Problème P2.

Le problème est exactement le même dans les deux versions. La seule différence est la place dans le questionnaire. On n'observe pas de différence significative entre les deux échantillons d'étudiants en ce qui concerne les représentations visibles. La plupart (65 sur 76) des étudiants ne font pas de représentation pour répondre à cette question facile pour eux. Cette observation permet de vérifier que sur ces notions de base les deux échantillons d'étudiants sont comparables.

Problème P1.

Le problème est exactement le même dans les deux versions. La seule différence est la place dans le questionnaire : dans la version A, ce problème vient en dernier, après deux tableaux et un énoncé "texte" ; dans la version B, cet énoncé est le premier. La différence entre les deux versions se situe au niveau des représentations visibles : il y a beaucoup plus de tableaux dans la version A que dans la version B ! Mais il n'y a pas, pour autant, de différences de taux de réussites pour ces questions très faciles.

L'étudiant de la version A qui échoue à ce problème a donné des réponses fausses ou n'a pas répondu aux problèmes P2 et T2. Pour T1 tableau, il a complété correctement le tableau sans reprise des réponses en dehors du tableau.

L'étudiant de la version B qui échoue à ce problème calcule souvent les probabilités marginales par des produits mais parfois par des sommes ou des différences. Il a donc quelques réponses correctes mais ne réussit complètement aucun problème.

Croisement des réponses à P1 et P2

Les 68 étudiants qui réussissent P2 réussissent aussi P1. La réussite à P2 impliquant donc la réussite à P1, on peut dire que le problème P2 est plus difficile que P1.

Voisinage

Il n'y a pas d'influence de "voisinage" sur les réussites puisque les problèmes P1, P2 et T2 sont réussis de la même façon quelle que soit leur place dans le questionnaire.

Croisement des réponses à T1-texte et T2 (version B)

Les vingt-deux étudiants qui ont réussi T1-texte ont tous réussi T2. La réussite à T1-texte impliquant donc la réussite à T2, on peut dire que le problème T1-texte est plus difficile que T2.

T1 et T2

Comme en terminale lors de l'enquête précédente, T1-Texte reste un problème plus difficile que T2 sauf lorsque la présentation des données sous forme de tableau dans T1-Tableau met en évidence le croisement des deux caractéristiques (ou déterminations sémantiques) des individus. On voit ici la puissance de cet outil d'organisation des données lorsqu'il y a une difficulté.

2) Le questionnaire de Terminale

En Terminale, les questions étaient plus nombreuses et plus variées et les erreurs sont plus diverses. Nous n'analyserons pas ici ces réponses en détail, nous limitant à une question difficile dans chaque problème, "difficile" parce que sa réponse nécessite d'utiliser des quantités qui ne sont pas toutes des données.

forme du problème	données et questions	
Problème T1 - Tableau tableau incomplet avec marges	2 probabilités marginales et 1 probabilité d'intersection question Q4	**54 réussites sur 66 élèves (0,82)**
Problème P'1 arbre	1 probabilité marginale 2 probabilités d'intersection 1 probabilité conditionnelle question Q5	**39 réussites sur 66 élèves (0,59)**
Problème P'2 texte	2 probabilités marginales 1 probabilité d'intersection question Q3	**15 réussites sur 32 élèves (0,47)**
Problème P''2 texte	1 probabilité marginale 1 probabilité d'intersection 1 probabilité conditionnelle question Q5	**15 réussites sur 34 élèves (0,44)**

Le phénomène persistant observable est, qu'**en cas de difficulté, on retrouve une plus grande réussite lorsque l'énoncé comporte un outil d'organisation.**

COMPRENDRE UN TEXTE ARGUMENTATIF

Isabelle BECK et Michèle VAILLANT

Understanding argumentative texts is an important requirement at upper secondary level. We present two ways of analysing any organisation of arguments. One of them is based on linguistic tokens. The other is based on proposition status and on the level of conviction induced from the understanding of proposition content. We confront these two ways through their applications to texts and questions of a national assessment. We can see the difficulties related to the teaching and assessment of any argumentation. This confrontation yields new issues about relations between text comprehension, argumentation and proof, which must be taken in account for their learning.

Comprendre un texte argumentatif est devenu une exigence importante dans l'enseignement secondaire. Cet article présente deux types d'analyse de l'organisation d'une démarche d'argumentation. L'une se fonde sur la présence de marques linguistiques. L'autre se fonde sur le statut des propositions et sur le degré de conviction induite par la seule compréhension de leur contenu. Ces deux types d'analyse sont utilisés sur des textes et des items d'un questionnaire de l'évaluation nationale à l'entrée en seconde. On peut alors voir toutes les difficultés soulevées par l'enseignement et l'évaluation de l'argumentation. Cela ouvre de nouvelles pistes sur les rapports entre compréhension de texte, argumentation et démonstration qui doivent être pris en compte dans une perspective d'apprentissage.

Aussi bien dans les nouvelles épreuves écrites du baccalauréat de français, que dans les programmes pour le collège de 1995 et 1996 ou dans les exercices proposés pour l'évaluation à l'entrée en seconde, un objectif, qui n'était pas auparavant formulé de cette façon, occupe une large place : «comprendre un texte argumentatif».

Cet objectif correspond à l'introduction d'une nouvelle façon de classer les textes, issue des sciences du langage : aux côtés des classifications en genres et par époque on utilise les «typologies textuelles».

Il correspond aussi, en particulier au lycée, à la prise en compte du travail qui consiste à comprendre le texte, avant éventuellement de le résumer ou le commenter.

Apprendre à comprendre un texte argumentatif, c'est-à-dire à reconstruire l'argumentation qu'il présente, est une des préoccupations du groupe math-français de l'IREM de Strasbourg, dont les axes de travail sont les raisonnements et la compréhension des textes, et au sein duquel a vu le jour cet article.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
6 (1998) (p. 89 - 115) - IREM de Strasbourg

Celui-ci a pour but de réfléchir, en particulier à partir des exercices proposés lors de l'évaluation à l'entrée en seconde en 1994, à la question suivante :

Comment la façon de caractériser un texte argumentatif peut-elle permettre d'une part d'évaluer qu'un tel texte est compris et d'autre part de faire progresser les élèves dans cette compréhension ?

Pour permettre l'analyse du questionnaire proposé à l'entrée en seconde, qui occupe la deuxième partie, nous présenterons :

- d'une part la didactique du texte argumentatif d'A. Boissinot, fondée sur la recherche d'indices linguistiques, après avoir rapidement évoqué les recherches théoriques dont elle est issue ;
- d'autre part les caractéristiques de l'argumentation telles que les a décrites R.Duval (1992).

Une dernière partie regroupera les remarques et questions issues de l'étude du questionnaire à l'entrée en seconde et concernant les deux aspects de notre question centrale.

I LES CADRES DE DEFINITION DU TEXTE ARGUMENTATIF

1. Les typologies textuelles

a/ les sources :
Lorsque la linguistique dans les années 1960 a commencé, suivant les termes de Benveniste[1], à s'intéresser au «discours», à «la langue comme instrument de communication» et non plus seulement comme «système de signes», et à ne plus se limiter à la phrase mais à étudier les suites de phrases, diverses entreprises de «classements de textes» ont vu le jour, prenant comme critère par exemple la fonction dominante du texte selon le schéma de Jakobson[2] : fonction émotive, référentielle, poétique, etc... ou la façon dont s'organise la succession des propositions, selon un «ordre» temporel, spatial ou logique[3].

Benveniste a classé les textes en «discours» ou «récits» suivant la présence ou l'absence d'un certain nombre de caractéristiques linguistiques qui obligent à se repérer par rapport à la situation d'énonciation[4]. Il a ainsi ouvert la voie à de nombreuses recherches dans deux directions : classer les textes d'après des groupements de caractéristiques linguistiques[5] et étudier la place de l'énonciation dans la langue. Parmi ces dernières, citons en particulier les travaux de Ducrot mettant en valeur de « l'orientation argumentative dans la langue» (*cf.* plus loin page 5, § c).

Mais aucune de ces recherches ne fait intervenir la catégorie «texte argumentatif».

---

[1] J. Benveniste, *Problèmes de Linguistique générale*, 1966, p. 13.
[2] R. Jakobson, *Essais de linguistique générale*, 1963.
[3] J.Dubois, *Grammaire structurale du français : la phrase et ses transformations*, Paris, 1969.
[4] L'énonciation étant l'acte de produire un énoncé, la situation d'énonciation recouvre les participants : énonciateur, destinataire, *etc*, ainsi que les relations entre eux, les circonstances spatiales et temporelles et tous les autres aspects du contexte.
[5] Voir par exemple, J.Bronckart, *Le fonctionnement des discours*, Delachaux et Niestlé, 1985.

b/ Les « types de textes »

E.Werlich [1] propose cinq catégories de textes : narration, description, exposition, argumentation et instruction. Il définit deux critères sur lesquels il s'appuie pour cette classification :

- l'existence de conduites langagières adaptées à des situations de communication : par exemple expositives pour informer ou persuasives pour modifier l'opinion, la volition de quelqu'un.
- ce qu'il appelle « the basic cognitive process of contextual categorization ». Il explique ainsi que pour la narration « the focus is on factual and/or conceptual phenomena in the temporal context » et pour l'argumentation « on the relations between concepts of phenomena » [2].

Les linguistes qui travaillent dans cette direction[3] vont chercher à définir, pour chaque catégorie, «à un niveau global (superstructure), un schéma d'organisation, un plan d'ensemble» et, «au niveau microstructurel»[4] des ensembles de caractéristiques linguistiques, par exemple un usage particulier des temps verbaux.

Cette classification a été reprise dès 1979 dans un manuel scolaire publié par B. Combettes, J. Fresson et R. Tomassone [5] et a pris de plus en plus d'importance dans la didactique du français, et des langues, car elle permet d'articuler les différentes activités du cours de français (apprendre à lire et à s'exprimer et étude de la langue) et d'introduire de nombreux outils nouveaux issus des sciences du langage.

Cependant tous les auteurs se sont heurtés à la difficulté de faire entrer la multiplicité de l'ensemble des textes dans quelques catégories assez strictement définies ou ont cherché à redéfinir ces dernières. Tous, dès le départ, ont précisé qu'à côté des textes «purs» on trouve des textes relevant de plusieurs types, avec une dominante. J.-M. Adam préfère classer les «séquences» combinées dans un texte que les textes. Il propose aussi de réserver la classification à la structure des séquences, c'est-à-dire à l'organisation hiérarchique des propositions ou «grandes formes de mise en texte» s'appuyant sur «un découpage prélinguistique du référent»[6]. D'autres «plans d'organisation textuelle» intervenant et expliquant la diversité finale des textes, mais ne relevant pas d'une typologie.

c/ Les critères de définition du texte argumentatif

Définir les caractéristiques permettant d'identifier un texte narratif n'a pas posé les mêmes difficultés que pour les autres types de textes. Tout d'abord les recherches effectuées autour du récit étaient déjà très nombreuses et fournissaient des modèles structuraux d'organisation pour les textes. De plus une organisation de type chronologique est sans doute plus aisée à comprendre.

Au contraire, on a rencontré beaucoup de difficultés pour définir les caractéristiques permettant d'identifier un texte argumentatif. On ne disposait d'aucune description de son organisation, mais seulement de notions comme celles de «thèse soutenue/réfutée» et d'argument. Les formes

---

[1] E. Werlich, *A text grammar of english*, 1976.

[2] *Ibid.*, p. 19.

[3] Voir, par exemple, dans la bibliographie les travaux de J-M Adam ou B. Combettes.

[4] A. Petitjean, cours de DEA , Metz, 1986-1987.

[5] B. Combettes, J. Fresson et R. Tomassone, *De la phrase au texte*, 3è, Delagrave, 1979.

[6] J.-M. Adam, *Eléments de linguistique textuelle*, 1992, p. 97.

des textes argumentatifs apparaissaient comme trop diverses. Le recours à une rhétorique qui multiplie les catégories pour désigner les sortes d'arguments renforçait cette difficulté.

De plus si dans toutes les classifications il y a un type de texte argumentatif à côté du narratif et du descriptif, les autres catégories peuvent varier entre informatif, explicatif, expositif, instructif, injonctif... De ce fait, les critères caractérisant le texte argumentatif varient de façon importante suivant les catégories dont on cherche à le distinguer : argumentatif/explicatif ou argumentatif/expositif par exemple.

Non seulement ces critères varient suivant les auteurs mais ils sont parfois très flous. Ainsi certains considèrent le « but » du texte dans la situation de communication comme déterminant. Par exemple A. Petitjean [1] classe, d'après ce critère, le texte suivant comme « instructif », même s'il s'organise comme une conclusion et deux arguments :

> « En cas de troubles cutanés, n'appliquez pas localement n'importe quel médicament, notamment les antibiotiques ou les dermocorticoïdes. Cela pourrait s'avérer néfaste pour la peau et gêner le diagnostic du médecin. »

Or la définition de ce critère est flou. Par exemple, l'opposition «faire comprendre/convaincre » qui permet de distinguer texte explicatif et argumentatif soulève autant de difficultés qu'elle en résout. B. Combettes [2] écrit que « la volonté d'informer est très proche de la volonté de transformer une croyance fausse ». Certains ont même assimilé cette opposition à celle qui oppose recours à l'intelligence, à la raison et recours à la subjectivité. Ainsi dans un manuel scolaire les auteurs estiment qu'on trouve les textes informatifs et explicatifs dans « les livres scientifiques et les manuels scolaires » et les textes argumentatifs dans les « tracts, courrier, dépliants, prospectus » [3].

Enfin la recherche de caractéristiques linguistiques dépendra des autres critères de définition : le dernier manuel cité, par exemple, cherchera dans les textes explicatifs « un vocabulaire neutre et la présence de généralisations » et dans les textes argumentatifs « un vocabulaire marqué, des tournures de mise en relief, des renvois à l'interlocuteur ».

Ainsi caractériser un texte argumentatif est une entreprise difficile. Pour l'enseignant de français, la façon de le faire doit permettre d'évaluer et de faire progresser la compréhension que les élèves ont de tels textes.

2. Comprendre un texte argumentatif à partir des «indices» linguistiques

a/ La lecture de textes argumentatifs en didactique du français

L'ouvrage de référence est actuellement celui de A. Boissinot [4] Après avoir constaté qu'il n'y a pas pour l'argumentation de «théorie constituée» comme la narratologie pour le récit, il se propose de retenir dans les «modèles» issus de la rhétorique, de la philosophie et des sciences du langage, ce qui a une efficacité pédagogique. Il décrit trois «traits constants d'organisation des textes argumentatifs» [5] :

---

[1] A. Petitjean, cours cité.

[2] ?? B. Combettes, J. Fresson et R. Tomassone, *op. cit.*, p. ???

[3] *Lire à loisir-4è*, Nathan, 1992, p. 51.

[4] A.Boissinot, *Les textes argumentatifs*, B. Lacoste, 1992.

[5] *Ibid.*p. 37.

- leur «déroulement» mène d'une thèse réfutée à une thèse proposée, par un «processus d'argumentation».
- leur développement se fait autour d'un certain nombre d'arguments.
- ils ont un caractère «dialogique», car «deux points de vue s'y croisent de façon plus ou moins explicite».

Les différentes formes d'argumentation correspondent à une prédominance de l'une ou l'autre de ces caractéristiques. Chacune se manifeste par un recours privilégié à certains outils linguistiques.

b/ La méthode proposée

A. Boissinot propose une «grille de lecture» en trois étapes :

- Il s'agit d'abord de repérer systématiquement un certain nombre « d'indices » constitués par des « procédés linguistiques » qui traduisent dans le texte les caractéristiques dégagées plus haut. Ces procédés ne sont pas tous nécessairement présents dans un texte, et les catégories d'indices peuvent se révéler plus ou moins « productives » selon les textes [1].
- Dans un deuxième temps, l'observation de la répartition de ces indices dans le texte, leur interprétation et celle de leur évolution au cours du texte doivent permettre des hypothèses sur la « dynamique du texte ».
- «Enfin l'interprétation amène à recouper les trois types d'indices pour passer du repérage local à une prise en compte globale du texte » [2], c'est-à-dire repérer les thèses en présence, identifier les arguments et la thèse à laquelle ils se rattachent, leur « agencement », ce que l'auteur appelle reconstruire «le circuit argumentatif».

c/ Les « indices » retenus

Ils sont regroupés en trois catégories :

- **Les « indices d'énonciation »** sont nombreux. On relèvera le jeu des pronoms personnels, et on sera attentif aux sens de *on*. On s'intéressera à tout ce qui constitue un « trait de subjectivité » dans le choix du lexique et aussi à ce qui « oriente » vers telle ou telle conclusion, suivant les études de Ducrot[3]. Par exemple, l'énoncé « il est *à peine* en retard » oriente vers la conclusion « ce n'est pas grave », alors que l'énoncé « il est *presque* en retard » oriente dans l'autre sens.

  A. Boissinot met encore dans cette catégorie les procédés par lesquels celui qui argumente «signale son degré d'adhésion aux contenus énoncés» [4] et la façon dont il rapporte les «énoncés d'autrui». Ces indices doivent mettre sur la voie du repérage des deux thèses en présence.

---

[1] *Ibid.*p. 57.
[2] *Ibid.*
[3] O. Ducrot, *Les mots du discours*, 1980 et *Le dire et le dit*, 1984.
[4] A. Boissinot, *op. cit.*, p. 52.

- **Le repérage des «champs lexicaux»**[1] doit surtout permettre de relever des oppositions et d'observer comment ces champs lexicaux sont reliés à «deux pôles dont l'un est valorisé et l'autre dévalorisé». L'auteur avertit que la définition de la notion de «champ lexical» n'est pas toujours assez précise. Il signale aussi que l'interprétation de ces indices «suppose au moins un début de compréhension du texte» [2].

- **« les indices d'organisation »** sont aussi bien la disposition typographique que le choix des thèmes du texte et l'ordre dans lequel ils apparaissent («la progression thématique») ou les «connecteurs argumentatifs».[3] D'autres entrées sont encore proposées comme le repérage des métaphores et des comparaisons. A partir de ces indices il s'agira en particulier de repérer le découpage des arguments et leur «agencement».

Comment passer du relevé des indices à l'organisation du texte ? L'auteur répond en donnant des exemples de lecture de textes suivant sa «grille». Cette question de l'organisation du texte apparaît comme centrale pour la compréhension du texte argumentatif. Notre collaboration entre professeurs de mathématiques et professeurs de français nous a conduits à l'aborder d'une autre manière.

3. Les caractéristisques de l'argumentation

Partant de l'idée que comprendre un texte argumentatif c'est reconstruire l'argumentation qu'il présente, nous nous sommes d'abord intéressés à l'organisation de la représentation que doit construire le lecteur au cours de son activité de compréhension de texte. Les publications de R.Duval nous permettent de préciser quelques caractéristiques de l'organisation de l'argumentation.

a/ le raisonnement comme organisation de propositions.

La première caractéristique concerne le type d'organisation recherchée : il ne s'agit pas de reconstituer une succession chronologique d'événements comme dans une narration, ni de caractériser différents éléments tout en les situant dans un objet ou une unité d'ensemble comme dans une description.

Cette remarque élémentaire a pour conséquence que les unités de l'organisation globale d'un raisonnement ne sauraient être des «objets». Il s'agit obligatoirement de propositions, c'est-à-dire d'énoncés susceptibles de prendre une valeur de vérité ou une valeur épistémique (évidence, absurdité, vraisemblance *etc*...). Par exemple pour la compréhension du texte de Zola proposé lors de l'évaluation seconde en 1994, *des éléments comme «la littérature» ou «les œuvres d'art» ne peuvent permettre de reconstruire le raisonnement. Il faut partir d'énoncés comme «l'art et la littérature **meurent de leur belle mort**».*

Ces propositions peuvent ou non correspondre à des propositions au sens grammatical du terme. Un groupe comme «la mort de l'art et de la littérature» pourrait aussi renvoyer à l'énoncé «l'art et la littérature meurent» .

---

[1] Un champ lexical est une « série de termes renvoyant à une même réalité ou à un même concept »

[2] *Ibid.*p. 57.

[3] L'étude des connecteurs a été une des premières recherches en didactique du français sur les textes argumentatifs [3] (*cf.* Groupe INRDP, "Logique et Langage", *Recherches Pédagogiques*, n°56, 1976, pésenté par O.Ducrot) et continue à occuper une place importante (*cf. Pratiques*, n°84, 1994.) Mais tous les textes argumentatifs n'en comportent pas.

b/ Une organisation orientée

L'organisation propre à un raisonnement se fait en fonction de l'orientation de chaque proposition vers une proposition que — suite à R. Duval — nous appellerons **énoncé-cible**, car les mots «conclusion» et «thèse» peuvent prendre des sens plus particuliers.

Dans le cas de l'argumentation l'énoncé-cible est la proposition dont on cherche à convaincre l'interlocuteur. Puisqu'il s'agit d'une proposition dont on veut convaincre, elle implique toujours l'existence — même non explicite dans le texte — d'une proposition contraire qu'on cherche à dévaluer.

Dans un texte, l'énoncé-cible peut être explicite, mais aussi apparaître sous la forme de l'énoncé auquel l'auteur s'oppose et non sous la forme de l'énoncé dont il cherche à convaincre ; il peut même rester complètement implicite. R. Duval [1] donne l'exemple de l'argumentation fameuse de Voltaire en faveur de Callas, conduisant à conclure que la condamnation de Callas est injuste sans jamais l'affirmer.

Puisqu'il y a toujours une affirmation que l'on rejette en même temps qu'une affirmation contraire que l'on défend, un texte argumentatif s'organise autour de deux points de vue, traditionnellement «le pour et le contre». Il est indispensable pour le comprendre d'identifier clairement ces deux points de vue et de bien partager dans le texte les propositions et les formulations à relier à chacun d'eux. On retrouve ici les deux «pôles» d'A. Boissinot.

Mais dans cette organisation en fonction de l'énoncé-cible toutes les propositions n'ont pas le même rôle. Une proposition sera une déclaration, un jugement alors que la suivante pourra être une justification de la première (ou le contraire). L'organisation se saisit des propositions en fonction de leur **statut**[2] qui peut être marqué ou non par des expressions linguistiques.

c/ Différence entre raisonnement explicatif et raisonnement argumentatif

Deux types de textes sont organisés en fonction d'un énoncé-cible : l'explication et l'argumentation. Mais leur fonctionnement est différent.

Nous venons de rappeler que **dans un texte argumentatif** il s'agit de convaincre de l'énoncé-cible, c'est-à-dire que le contenu de cette proposition doit apparaître en fin d'argumentation comme plus certain qu'il ne l'était au départ.

Ainsi dans le texte de Maupassant proposé à l'évaluation seconde [3], argumenter pour « on ne peut aimer qu'une seule fois » c'est donner des raisons pour répondre à la question « Pourquoi dites-vous qu'on ne peut aimer qu'une seule fois ? »

S'il y a argumentation c'est parce que celui qui argumente pense que l'énoncé-cible n'a pas au départ le même degré de fiabilité pour l'interlocuteur que pour lui. C'est cette différence entre

---

[1] R. Duval, « Démontrer, argumenter, expliquer : continuité ou rupture cognitive », *Petit x*, n°31, Grenoble. 1992., page 6

[2] Le statut d'une proposition « correspond au rôle qu'elle remplit vis à vis d'un autre énoncé dans l'organisation globale d'un discours : prémisse, règle, conclusion. » (Duval, 1995, p.123).
Il s'agit ici du « statut opératoire » qu'on trouvera dans tous les textes de raisonnement. Par contre le « statut théorique », fixé par un « état des connaissances » (conjecture, théorème, hypothèse, etc...), ne peut exister que dans des domaines comme les mathématiques. Dans le cas particulier de la démonstration, les propositions ont donc un double statut. (*cf.* Duval-Egret 1993, page 5)

[3] Voir texte en annexe.

deux positions opposées (quand l'un pense l'énoncé-cible comme certain, et l'autre comme impossible, par exemple) ou éloignées (l'un pensant certain ce que l'autre juge seulement possible) qui donne lieu, dans un texte, aux deux points de vue dont nous avons parlé au paragraphe précédent.

Dans une explication, on n'évalue pas le bien-fondé d'une affirmation. On met en relation des faits pour permettre de les comprendre. Par exemple pour expliquer qu'on ne peut aimer qu'une seule fois, quelqu'un pourrait mettre en relations différentes caractéristiques affectives et psychologiques des êtres humains qui permettraient de comprendre pourquoi un deuxième amour est impossible, sans que cette impossibilité ne soit remise en question.

Dans la mesure où une proposition que l'on comprend mieux acquiert de ce fait même un degré de fiabilité plus grand, la distinction entre argumentation et explication, surtout dans les textes peu élaborés, n'est pas toujours évidente, et ne constitue pas un but en soi.

Mais il est important que le lecteur soit attentif à toute explicitation du degré de fiabilité que l'auteur donne à telle proposition ou de celui qu'il lui prête aux yeux de l'interlocuteur, que ce soit par des expressions comme « il est certain que » ou moins directement par une forme interro-négative par exemple. Tout ce qui constitue une évaluation du bien-fondé des raisons produites est à rechercher pour comprendre l'organisation de l'argumentation.

d/ La compréhension de l'organisation de l'argumentation

Elle se fait à deux niveaux : d'une part il s'agit de repérer chaque argument et de comprendre son fonctionnement, d'autre part il est nécessaire d'articuler entre eux les différents arguments d'après les relations qu'ils entretiennent entre eux et avec l'énoncé-cible.

Pour chaque argument il s'agit de repérer le statut des propositions qui le composent (même si on trouve aussi des jugements de valeur sans justification) et donc de se demander :

- quelle proposition est prise comme point de départ ? y en a-t-il une ou plusieurs ?
- quelle est la conclusion proposée ?
- quelles relations sémantiques existent entre ces propositions, et entre les termes qui les composent, permettant de justifier l'inférence proposée ?
- Pour justifier cette inférence a-t-on besoin d'un « loi » plus générale, explicitée ou non dans le texte, ou s'agit-il d'une inférence directe ?

Cette organisation de l'argument peut ou non être soulignée par des connecteurs ou d'autres caractéristiques linguistiques que l'on va rechercher en fonction de ce qu'elles indiquent du fonctionnement de l'argument.

L'organisation globale du texte repose à la fois sur la pertinence des arguments, c'est-à-dire sur les relations entre leur contenu sémantique et celui de l'énoncé-cible, et sur les relations entre eux.

Elle prend en compte aussi bien leur orientation — en faveur ou contre l'énoncé-cible — et leur force, suivant qu'ils résistent ou non à l'objection. L'opposition entre propositions intervient de deux façons dans cette organisation. D'une part l'opposition entre l'énoncé-cible et l'énoncé qu'on cherche à réfuter fait qu'on donnera des arguments en faveur de l'énoncé-cible et des arguments contre l'énoncé qu'on veut dévaluer. D'autre part l'organisation peut aussi reprendre

l'opposition entre deux arguments, l'un orienté pour une thèse et l'autre contre, et faire intervenir leur force respective pour orienter globalement vers l'énoncé-cible.

Ainsi le jeu des oppositions dans un texte est souvent complexe et on ne peut le traiter sans tenir compte du statut des propositions. D'autant plus qu'introduire une opposition à l'intérieur de ce qui était présenté comme simple par l'adversaire est une façon de démolir son argumentation.

Aux niveaux de l'organisation de chacun des arguments et de l'organisation globale de l'argumentation, la variété des textes argumentatifs est très grande.

Nous avons choisi de confronter à ces quelques orientations le travail proposé sur la compréhension d'un texte argumentatif lors de l'évaluation à l'entrée en seconde. En effet on dispose là à la fois d'un ensemble de questions sur des textes et de réponses attendues comme indicatrices de compréhension. De plus le choix des textes, des questions et des réponses avait un statut d'évaluation nationale ce qui, sans lui donner vraiment une valeur de norme, permet au moins de le considérer un indicateur de ce qui se passe dans les classes, sous une forme souvent plus partielle et moins observable. Il s'agit de la première expérience à ce niveau charnière entre le collège et le lycée, en septembre 1994.

II L'EXEMPLE DES EXERCICES DE L'EVALUATION SECONDE

La partie « comprendre un texte argumentatif », dans l'évaluation à l'entrée en seconde en septembre 1994, proposait, au choix, deux extraits, l'un de Maupassant et l'autre de Zola, reproduits ici en annexe. L'élève avait à répondre à dix-huit questions (numérotées de 13 à 30) sur le texte choisi, correspondant à des « compétences évaluées » identiques pour les deux textes et organisées de la même façon. Nous ferons ici un certain nombre de remarques sur une partie de ces questions, en fonction des caractéristiques de l'argumentation que nous venons de rappeler.

1. L'énoncé-cible

Dans un texte argumentatif, le premier repérage nécessaire à la compréhension du texte est celui de l'énoncé-cible en fonction duquel se construit l'ensemble des propositions. Certaines questions de l'évaluation pouvaient permettre ce repérage, celles qui correspondaient à la « compétence évaluée » : « dégager les éléments du problème posé » (9e et 10e questions). L'avant-dernière question, qui avait pour but d' « expliciter la thèse », pose d'autres problèmes sur lesquels nous reviendrons plus loin.

POUR LE TEXTE DE MAUPASSANT, la neuvième question :

"21 — Formulez en une question le problème dont débattent les dîneurs."

aurait dû se trouver au début du travail, d'autant que le texte est au départ un texte narratif, racontant un dîner de chasse, et que c'est autour du « problème débattu » qu'on peut aussi y repérer des éléments d'argumentation. De plus la question était sans difficulté dans la mesure où il suffisait de retrouver l'expression : **"l'éternelle discussion pour savoir si on peut aimer vraiment une fois ou plusieurs fois"**, et de formuler la question au style direct. A partir de là on repère les parties en présence, selon les réponses que les personnages donnent à cette question.

Au contraire les auteurs ont préféré proposer au départ un repérage du thème en demandant en quatrième question :

> **16 — Dans les quinze premières lignes, le thème du texte apparaît à travers plusieurs mots ou expressions. Retrouvez dans le tableau ci-dessous les trois éléments manquant à ce réseau lexical :**
>
> **"aimer vraiment"(ligne 5)**
> **...**
> **"aimer souvent, avec violence" (ligne 7)**
>
> **...**
> **"l'amour vrai" (ligne 11)**
> **"le grand amour" (ligne 11)**
> **"cet amour " (ligne 12)**
> **... "**

On attendait que l'élève complète avec les expressions : "un amour sérieux", "la passion" et "aucun sentiment puissant".

Outre que cette formulation amenait à séparer ce qui dans le texte ne forme qu'une expression (**"l'amour, l'amour vrai, le grand amour"**), *le thème proposé par la question, l'amour, efface la distinction entre "l'amour vrai" et "l'amour passion", qui est proprement le problème débattu et l'objet de l'argumentation, et mélange les expressions utilisées par chacun des partis en présence.* Elle ne peut donc qu'introduire de la confusion en noyant l'énoncé-cible dans un thème vague.

POUR LE TEXTE DE ZOLA, la question concernant le "thème" du texte est la suivante :

> **16 — Cochez dans les propositions suivantes celle qui correspond le plus précisément au thème du texte :**
>
> - la haine de l'art et de la littérature
> - le rôle de l'écrivain au temps de Zola
> - la création littéraire et artistique au temps de Zola
> - la mort de l'art et de la littérature

Les auteurs attendent que les élèves éliminent les «propositions fondées sur des indices trop partiels» pour choisir la réponse : «la création littéraire et artistique au temps de Zola», l'expression la plus générale qui subsume les trois autres.

En fait le choix de «la haine de l'art et de la littérature» reposerait sur une association jamais faite dans le texte entre les termes présents dans le titre. L'expression «la mort de l'art et de la littérature» pourrait renvoyer à la thèse que rejette Zola. La dernière expression «le rôle de l'écrivain au temps de Zola» comporte un mot dont le sens ne renvoie à aucune des propositions du texte. Donc là encore *le «thème», notion vague et mal définie correspondant en gros à "ce dont on parle", amène à préférer au départ une formulation très générale plutôt que de repérer ce qui correspondrait à l'énoncé-cible.*

La question qui pouvait permettre ce repérage est pour ce texte aussi la neuvième question :

21 — Relevez dans les lignes 1 à 4

- **l'expression qui présente le jugement de Zola sur la création artistique de son temps**
- **une expression qui présente l'opinion de ses adversaires.**

Il serait cependant préférable et suffisant de repérer l'affirmation que Zola prête à ses adversaires, car elle fait l'objet d'une proposition : «notre art et notre littérature meurent de leur belle mort», alors que l'expression attendue pour le jugement de Zola : «les œuvres vivantes et tout enfiévrées de notre âge» ne fait que renvoyer à ce jugement sans explicitement le formuler [1].

Mais puisque les auteurs acceptent aussi comme «expression qui présente l'opinion des adversaires» : «nulles et étroites» ou «feuillettent avec mépris», ils ne semblent pas par cette question chercher à faire formuler le jugement discuté, ni concevoir que dans une argumentation le «problème posé» est celui du degré de fiabilité qu'on peut attribuer à une *proposition*..

On peut noter que lors de l'évaluation de septembre 1997, aucune question cette fois n'invite à formuler ce qui pourrait correspondre à un énoncé-cible : la première question s'intitule « anticiper sur la conduite du débat », mais il s'agit en fait de « dégager le thème principal ». D'autre part, la question intitulée « identifier la thèse défendue et la thèse rejetée » confond de fait énoncé-cible et arguments.

2. Repérer les points de vue en présence

Convaincre c'est aussi bien augmenter le degré de conviction que l'interlocuteur attache à un jugement que diminuer la conviction qu'il attachait au jugement contraire. C'est pourquoi très souvent les textes argumentatifs vont citer et dévaloriser des jugements prêtés aux contradicteurs, et la lecture impose un repérage des points de vue en présence.

Lors de l'évaluation seconde, ce repérage était central puisque les deux textes étaient entièrement organisés sur l'affrontement de deux opinions contradictoires.

POUR LE TEXTE DE MAUPASSANT, ce travail est renvoyé à la douzième question et de plus la formulation de cette question restreint le travail à effectuer réellement.

23 — Chacune des affirmations suivantes se rapporte à un des deux points de vue qui s'affrontent dans le texte. Complétez le tableau :

	l'affirmation	point de vue des hommes	point de vue des femmes
a	la passion est comme la maladie (lignes 7-8)		
b	l'amour est comme la foudre (ligne 12)		
c	aucun sentiment ne peut germer dans un cœur ravagé (lignes 13-14)		
d	des gens se sont tués par amour (ligne 17)		
e	il en est des amoureux comme des ivrognes (l. 19-20)		

[1] *Cf* Duval, 1995, page 335.

Le travail pour les affirmations des lignes 7, 12 et 13 consiste simplement à repérer le verbe introducteur et son sujet. Le travail sur les lignes 17 puis 19-20 est plus fin : il s'agit de reconnaître que le marquis attribue à ses adversaires l'affirmation « des gens se sont tués par amour » avant de prendre à son compte l'affirmation « il en est des amoureux comme des ivrognes », et qu'il défend le point de vue des hommes.

La même liste d'affirmations aurait pu servir de point de départ à un repérage des points de vue si on avait demandé d'abord de regrouper celles qui appartiennent à un même point de vue, puis d'identifier les points de vue.

On aurait pu aussi, après avoir fait trouver le problème débattu, simplement demander quelles sont les réponses que les personnages du texte donnent à cette question avant de faire relever les arguments que chaque groupe utilise.

Concernant ce repérage des points du vue en présence, le travail proposé aux élèves commençait d'une façon susceptible d'introduire de la confusion, dès la première question :

> **13 — Dans les six premières lignes du texte, le pronom on est employé quatre fois. Il renvoie toujours au même groupe de personnes, sauf dans un cas. Lequel ?**
> **Cochez la case correspondantes.**
> **ON vint à parler" (ligne 4)**
> **ON pouvait aimer" (ligne 5)**
> **ON cita" (ligne 5)**
> **ON cita aussi" (ligne 6)**

Pour les auteurs il s'agit de distinguer le *on* très général de « on pouvait aimer » des autres *on* renvoyant aux personnages du texte. Mais il ne semble pas très judicieux de regrouper tous les personnages alors que d'après la suite du texte si le premier « *on* vint à parler » renvoie à l'ensemble des personnages, « *on* cita » (ligne 5) renvoie aux femmes, et « *on* cita encore » (ligne 6) renvoie aux hommes. Il serait sans doute préférable de commencer par distinguer les points de vue en présence avant de remarquer qu'au début du texte Maupassant les englobe dans un *on* indifférencié.

POUR LE TEXTE DE ZOLA, la première question explicitant les points de vue en présence, Zola et ses "adversaires", est aussi tardive (question 21).
Elle est encore une fois précédée d'une question qui risque d'introduire de la confusion.

19 — Qui est désigné par la première personne du pluriel dans les expressions suivantes ?
Cochez la case correspondante[1] :

	Zola et les créateurs qui partagent ses convictions	l'ensemble des hommes de la fin du XIXè siècle
"notre âge" (l.4)		X
"nous sommes au seuil d'un siècle" (l.14)		X
" nous aurons eu les joies cuisantes" (l.18-19)	X	
" nos luttes" (l.21-22)	X	

[1] Les croix portées dans les cases sont celles qui ont été données dans le corrigé.

La distinction introduite à l'occasion de cette étude de pronoms n'est pas pertinente pour le texte puisque «partisans» et «adversaires» de Zola constituent deux sous-ensembles du même vaste ensemble «les hommes de la fin du XIXè siècle».

Il aurait été plus intéressant par exemple de proposer aux élèves de relever les expressions par lesquelles Zola désigne ses opposants (lignes 1 à 4, puis 21-24 : «les sots qui», «les impuissants qui», «les cerveaux les plus...», «les aveugles», «je LES hais[1]»...) ce qui permettrait ensuite une réflexion sur leurs variations (formes grammaticales, contenus sémantiques, place dans l'argumentation...).

3. Repérer les oppositions sémantiques construites par le texte

Distinguer deux points de vue qui s'affrontent dans un texte implique de séparer clairement les mots et les propositions propres à chaque point de vue. *Les questions qui permettent de relever les oppositions pertinentes dans le texte aident à en dégager le sens, alors que d'autres relevés restent de pure forme sans rien apporter à la compréhension du texte, ou, pire, peuvent conduire à mélanger les deux points de vue et brouiller le sens du texte.*

L'une des compétences visées par cette évaluation seconde était : "dégager des ensembles lexicaux significatifs"(item 20).

Pour LE TEXTE DE MAUPASSANT la question était :

> **20 — Dans les lignes 7 à 20, on peut identifier le champ lexical de la maladie caractérisant la passion amoureuse. Relevez cinq mots ou expressions qui en font partie.**

Cette question repose sur un concept flou, celui de "champ lexical". Comment faut-il l'entendre ? Les termes relevés doivent-ils appartenir à un même champ lexical au sens strict, c'est-à-dire avoir des sèmes communs dans le lexique de **la langue** ? Ou doit-on élargir le sens du concept et relever aussi les termes polysémiques qui **dans le texte** ont des sèmes communs ? Dans ce dernier cas, comment et sur quels critères peut-on éliminer ou accepter un terme, surtout si on se fonde, comme c'est généralement le cas, sur l'intuition ?

Le choix proposé par les correcteurs nous a semblé particulièrement incohérent. Les seules réponses acceptées sont : maladie — frapper — tuer — touché — rechute.

Ce relevé apparaît tout de suite correspondre à un sens large du "champ lexical". Mais en même temps il semble plus limité que ce qui est annoncé, les correcteurs attendant implicitement un champ lexical "négatif". Sinon pourquoi refuser «guéris» qui appartient au sens strict au champ lexical de la maladie ? En deuxième lieu, si on accepte «tuer» pourquoi pas l'expression « mort naturelle» ? Serait-ce que les correcteurs opposent implicitement «mort naturelle» et «mort de maladie» ? Cependant la « mort de maladie» est une mort naturelle par opposition à la mort par accident, qu'évoquerait davantage le terme «tuer». Si on élargit le concept de champ lexical, on est obligé d'accepter un certain nombre de réponses, et même le mot «tempérament» en tant qu'il désigne une propension pathologique.

Mais surtout en intégrant «touché» dans le champ lexical de la maladie, relevé qui doit contribuer à décrire l'argumentation des hommes pour qui l'amour est une maladie, alors que ce mot

[1] Souligné par nous.

appartient à la comparaison avec la foudre utilisée par les femmes, les auteurs confondent les arguments utilisés par les deux partis en présence.

Plusieurs questions posées sur LE TEXTE DE ZOLA ont pour but de repérer des oppositions.

L'une reste extérieure au sens du texte :

18 — Les lignes 18-24 comportent de nombreuses oppositions. Citez-en quatre.

Les réponses notamment acceptées sont :

joie/angoisse ; aveugles/voient ; vice/vertu ; joies cuisantes/angoisse douce et amère ; agonie/naissance.

La plupart de ces oppositions relèvent du sémantisme des termes dans le lexique de la langue, par exemple joie/angoisse, et ne sont pas du tout pertinentes pour construire l'argumentation, au contraire d'axes comme «aujourd'hui/demain» ou «les gens enterrés dans le passé/notre génération».

Les termes «naissance» et «agonie» reviennent dans deux autres questions, mais aucune ne les relie à l'opposition des deux points de vue.

20 — Relevez dans les lignes 12 à 24 trois termes qui appartiennent au champ lexical de la naissance de l'être vivant.

Les réponses acceptées sont :

enfantement, cris libres, berceau, bégaiement de la naissance.

Elles se trouvent toutes dans les lignes 19 à 24. Le découpage proposé dans la question relève-t-il d'une volonté de piéger l'élève qui ne prendrait pas en compte la précision «de l'être vivant» et répondrait par un relevé erroné : «ressaillir en nous» (encore que cette expression s'emploie pour un être vivant), «au seuil d'un siècle» ou «grande lueur qui se lève» ? Mais cette distinction entre «naissance» et «naissance de l'être vivant» reste sans effet sur la compréhension de l'argumentation et inciterait même à interpréter faussement le terme «édifice» ligne 18. Pour Zola, il s'agit bien d'un édifice littéraire et donc de la «naissance» d'une nouvelle littérature et non pas de la naissance de quelque chose de concret, un groupe d'hommes par exemple, comme le suggère la question.

Le tableau dont voici le corrigé (les réponses attendues apparaissant en italique) pourrait être plus intéressant. Mais il faudrait prévoir un tableau permettant de relier explicitement les deux colonnes aux deux points de vue (alors qu'ici l'expression « les décombres » n'appartient pas au point de vue des opposants) et ne pas tronquer les expressions du texte en ne relevant par exemple que le substantif « naissance ».

27 — Remplissez les cases vides du tableau suivant par les expressions du texte qui conviennent [1]

l. 1 à 6	*meurent de leur belle mort*	**je n'ai souci que de VIE**
l.16-18 (métaphore)	*les décombres tombent avec fracas*	*l'édifice sera reconstruit*
l. 21-23	**convulsions de l'AGONIE**	*naissance*

[1] Les italiques indiquent les réponses attendues.

4. Les arguments

Dans la compréhension d'une argumentation une étape consiste à séparer les différents arguments utilisés pour renforcer l'énoncé-cible et à observer le fonctionnement de chacun d'eux.

De fait le choix des textes proposés pour l'évaluation à l'entrée en seconde en 1994 ne permettait pas un travail très riche de ce point de vue.

En particulier nous avons regretté pour plusieurs raisons le choix du texte de Zola. Nous noterons ici que Zola ne construit pas vraiment une argumentation : il rejette un certain nombre de jugements de valeur qu'il dit « haïr » et leur en oppose d'autres. Cependant au lieu de se limiter à une observation purement formelle, certaines questions auraient pu permettre de comprendre sa façon de procéder.

17 — "SI nous balbutions, C'EST QUE nous avons quelque chose à dire." (lignes 13-14) Réécrivez la phrase en supprimant les expressions soulignées et en exprimant le même rapport logique.

On attend seulement que l'élève exprime un rapport de cause à conséquence et évite de confondre avec le SI hypothétique. Il aurait été plus intéressant de faire observer que ce SI introduit une observation de ses «adversaires» que Zola accepte, «nous balbutions», mais pour lui donner une interprétation différente et valorisante : «nous avons trop de choses à dire.» On aurait pu alors demander de repérer d'autres endroits dans le texte où Zola procède de la même façon.

On peut faire des remarques du même ordre à propos du questionnaire sur le texte de Maupassant. La question 24 propose un travail sur les connecteurs qui malgré les apparences demande seulement de reconnaître une opposition.

24 — Voici quatre couples de connecteurs logiques indissociables :

- **or ... en effet**
- **de même ... car**
- **par conséquent ... donc**
- **or ...mais**

Choisissez celui qui mettrait en évidence le rapport existant entre les phrases suivantes. Inscrivez chaque élément de ce couple dans la case qui convient : "Je vous dis, moi, qu'on peut aimer plusieurs fois avec toutes ses forces et toute son âme. ... vous me citez des gens qui se sont tués par amour, comme preuve de l'impossibilité d'une seconde passion ... je vous répondrai que s'ils n'avaient pas commis cette bêtise de se suicider, ce qui leur enlevait toute chance de rechute, ils se seraient guéris."

Outre que le terme «indissociable» pose problème et devrait être remplacé par «que vous ne dissocierez pas», on peut noter que pour «expliciter les rapports logiques implicites» l'élève peut négliger le rapport entre les deux premières propositions puisqu'une seule des réponses proposées correspond à une opposition entre les deux dernières. Cet inconvénient est lié au travail par élimination que permet tout questionnaire en QCM.

Mais surtout le travail proposé ne permet pas à l'élève de se rendre compte que *les connecteurs qu'il introduit ne font que souligner la stratégie de l'intervention du marquis, déjà bien mise en évidence par les verbes introducteurs et les pronoms : «je vous dis» / «vous me cite » / je vous répondrai»* . Le marquis cite un argument en faveur de la thèse qu'il combat pour ensuite montrer qu'il est sans valeur. Aucune question ne demande d'expliquer comment le marquis prend position.

De même les comparaisons dans le texte donnent lieu à une question de pure forme, de plus présentée de façon qui peut induire en erreur :

18 — Inscrivez les mots du texte qui complètent le tableau suivants[1] :

la passion	"comme" (ligne 8)	"les maladies" (ligne 8)
"il" (ligne 12)	*semblable à*	*la foudre*
des amoureux	"comme" (ligne 20)	*des ivrognes*

Certains, sans doute induits en erreur par l'énoncé de la question 16, ont lu ce tableau comme trois colonnes verticales indépendantes : les reprises du thème (l'amour), les occurrences de *comme*, le champ lexical de la maladie. Pourquoi ne pas demander aux élèves de relever les comparaisons du texte puisqu'on s'attend à ce que ce repérage soit acquis à l'entrée en seconde ? On pourrait alors demander sur quel point commun s'appuie chacune des comparaisons.

Mais ce relevé n'a qu'un intérêt très réduit si on ne fait pas travailler l'élève sur l'utilisation des comparaisons dans l'argumentation. Il aurait été judicieux de faire repérer les lignes 8 et 20

comme des arguments masculins et la ligne 12 comme un argument féminin et faire observer ici l'utilisation des analogies pour convaincre.

5. L'organisation

Le travail sur un texte argumentatif doit permettre de reconstituer l'organisation de l'argumentation en tenant compte des relations des arguments entre eux et avec l'énoncé-cible, mais aussi de tout ce qui a trait à l'évaluation de leur force.

Là encore les textes choisis ne permettaient pas un travail très approfondi. Mais les questions posées à ce niveau sont celles qui s'éloignent le plus de la compréhension du texte : certaines nous ont paru incompréhensibles, tandis qu'à d'autres on peut répondre sans comprendre le texte.

Le choix du TEXTE DE ZOLA nous a semblé soulever le problème des connaissances nécessaires pour repérer la thèse en jeu ; comment comprendre sans connaissances sur le contexte littéraire de l'époque des affirmations comme «je n'ai guère souci de beauté ni de perfection» ou «nous sommes au seuil d'un siècle de science et de réalité» ? comment apprécier si l'expression «grands siècles» a le même sens aux lignes 5 et 21 ? Ce texte nous a paru aussi difficilement séparable de son contexte historique du fait de son côté fortement métaphorique : ces métaphores prennent sens dans une époque donnée, un débat précis. *En fait c'est la possibilité même de donner un sens à ce débat et à la violence avec laquelle Zola s'y engage qui nous paraît problématique pour des élèves qui n'ont aucune idée par exemple des procès intentés à Baudelaire ou à Flaubert.*

Pour répondre à la question visant à «expliciter la thèse» l'élève ne pourra que vérifier si la proposition proposée semble contredire un des jugements de valeur de Zola (dans le cas de la réponse attendue : «L'artiste doit rechercher la beauté.») ou ne correspondre à aucun (les deux autres réponses attendues sont : «il faut être ivre pour créer» et «Ni Dieu, ni maître.»)

[1] Les italiques indiquent les réponses attendues.

28 — Parmi les propositions suivantes, cochez celles qui ne s'accordent pas à la thèse (thèse = idée principale) du texte :

Il faut être ivre pour créer
Ni Dieu, ni maître
Les lendemains chanteront
La création est un travail
Les époques de désordre sont des époques intéressantes
Du passé faisons table rase
L'artiste doit rechercher la beauté
La littérature doit être libre

De même à la question 25 sur LE TEXTE DE MAUPASSANT, ne pas réussir à choisir, par élimination, l'affirmation particulièrement générale : « les femmes cherchent à convaincre » permet seulement de repérer ceux qui feraient des erreurs de compréhension très grossières sur le texte.

25 — Dans la discussion, les femmes répètent le mot "amour" (quatre fois dans les lignes 11-13). Pourquoi ? Cochez la réponse qui vous paraît la meilleure :

les femmes sont amoureuses à ce moment-là
les femmes cherchent à convaincre
les femmes hésitent sur les mots à employer
les femmes ont peur de l'amour
les femmes ne croient pas à l'existence de l'amour vrai.

La question la plus incompréhensible est celle qui demande de juger l'efficacité de l'argumentation :

27 — Deux opinions, celle des hommes et celle des femmes (H/F), sont reprises par le marquis :

extraits du texte	opinion	verbe introducteur
"Je vous dis... toute son âme (lignes 16-17)	H	je vous dis
"Vous me citez... passion" (lignes 17-18)	F	vous me citez
" Je vous répondrai ... ivrognes" (lignes 18 à 21)	H	je vous répondrai

En observant le jeu des pronoms personnels et des verbes introducteurs, mettez en évidence l'efficacité de l'argumentation du marquis.

La première difficulté d'interprétation de la question vient de l'emploi du terme «efficacité». Si une argumentation efficace est une argumentation qui convainc, qu'est-ce qui dans le texte permet de mesurer cette efficacité, en dehors éventuellement du fait que les femmes ne répondent pas ? Cependant la réponse proposée, loin de permettre de comprendre ce que les correcteurs entendaient par «efficacité», soulève d'autres problèmes : le codage demande de prendre en compte deux éléments pour considérer la réponse comme bonne, à savoir «une seule opinion des femmes placée entre deux opinions masculines» et «une seule référence à l'opinion des femmes» . Il semble d'abord que ces deux éléments soient redondants, le premier contenant le second. De plus, peut-on conclure à l'efficacité d'une argumentation par la seule supériorité numérique des prises de parole ?

Finalement au lieu de réfléchir à l'argumentation proposée par le texte, le questionnaire invitait à «prendre position sur la thèse».Un travail de compréhension de texte argumentatif ne saurait en aucune façon s'achever de cette façon. S'il est possible de demander de reformuler l'une ou l'autre thèse, demander à un élève engagé dans une démarche de construction de sens de donner son avis l'oblige à sortir de cette démarche pour élaborer sa propre réflexion.

En fait la question posée sort complètement du domaine de l'argumentation. Pour LE TEXTE DE MAUPASSANT on invite l'élève à reprendre à son compte un ensemble de « prises de position » sommaires, qui pose même problème car on n'accepterait pas de telles formulations dans les rédactions scolaires :

30 — Les neuf phrases suivantes illustrent les trois opinions différentes formulées par le texte. A chacune de ces trois opinions correspondent trois phrases.
Choisissez le groupe de trois phrases qui reflète l'opinion la plus proche de la vôtre

1 — L'amour est un engagement total et définitif
2 — Des goûts et des couleurs on ne discute pas
3 — Ce débat resurgit à chaque époque
4 — Un(e) de perdu(e), dix de retrouvé(e)
5 — La curiosité en amour est le propre de l'être humain
6 — A toi pour la vie ♥
7 — Chaque expérience enrichit
8 — Autant d'êtres, autant d'avis différents.
9 — "Quand on aime une fois, on aime pour toujours."

Pour LE TEXTE DE ZOLA il nous a même été impossible de comprendre le type de réponse attendue.

30 —Zola est optimiste sur l'art et la littérature du siècle à venir. Eprouvez-vous un optimisme analogue "au seuil" du XXIè siècle ? Justifiez en quelques lignes votre réponse à cette question.

Le corrigé précisait : « il s'agit moins de valider l'accord ou le désaccord avec la thèse de Zola que d'évaluer la démarche de l'élève à l'aune d'une double exigence : l'élève a-t-il pris en compte tous les éléments de la situation ? L'élève a-t-il pris soin de justifier sa réponse ? Il ne s'agit pas ici d'évaluer la culture personnelle des élèves ou leurs capacités linguistiques. »

Aucune de ces questions ne permettait donc d'évaluer le compréhension que l'élève pouvait avoir de l'organisation de l'argumentation.

Pourtant LE TEXTE DE MAUPASSANT pouvait donner lieu à une réflexion intéressante sur son organisation générale en se posant la question du point de vue du narrateur : l'auteur n'expose pas ses idées sur la possibilité ou non d'aimer plusieurs fois. Il met en scène des personnages qui débattent de cette question. On peut alors s'attendre à trouver dans le texte des arguments justifiant l'une ou l'autre thèse. Mais une autre dimension argumentative est introduite par le fait que le débat est rapporté par un narrateur : suivant son point de vue sur la thèse débattue ce narrateur peut valoriser ou dévaloriser les différentes positions en présence. A la limite, ce récit pourrait n'être qu'une stratégie pour convaincre de telle ou telle conclusion.

Les auteurs du questionnaire vont dans ce sens par certaines questions :

26 — Qui s'exprime dans les passages suivants ? (une seule réponse attendue)

- **"bien que cette manière de voir ne fût pas contestable" (lignes 9 et 10**
- **"ayant aimé beaucoup" (ligne 15)**
- **"justement" (ligne 24)**

28 — "On le pria de donner son avis. Justement il n'en avait pas" (lignes 22-23) Relevez dans le début du texte le groupe nominal qui annonce cette impossibilité de donner un avis définitif.
29 — Formulez brièvement de manière personnelle la thèse présentée au début et à la fin du texte par le narrateur [1].

On remarquera que l'enchaînement des questions permet pour le moins de vérifier sa réponse à la question 26. Il aurait été plus intéressant de demander aux élèves de relever les passages du texte qui donnent une indication sur la position du narrateur.

De plus autant il nous semble utile d'inciter les élèves à repérer les interventions du narrateur (*cf.* question 26) ou à montrer comment il dévalorise la position des femmes mais aussi d'une autre façon celle des hommes, autant il nous semble exagéré de parler de «l'impossibilité de trancher le débat» comme d'une «thèse» du narrateur comme l'indique la question 29.

Sur ce point, nous voudrions relever un problème soulevé par le choix de l'extrait de Maupassant : le problème du découpage du texte. Il est évident que les contraintes de ce type d'exercices vont très souvent obliger à travailler sur un extrait plutôt que sur un texte dans sa totalité. Mais l'affirmation « justement il n'en avait pas » lorsqu'on demande son avis au docteur devient, du fait du découpage du texte et de la modification de la ponctuation (un point au lieu des deux points), une sorte de conclusion. Les questions 28 et 29 attribuent au narrateur cette prise de position, alors que dans la nouvelle de Maupassant il s'agit d'annoncer le point de vue que va défendre le docteur, d'autant plus que cette affirmation est suivie de deux points. Le docteur prend la parole pour répéter qu'il s'agit d'une « affaire de tempérament » et surtout pour saisir l'occasion de placer "une belle histoire"...

Conclusion : quel autre type de questionnaire possible ?

Sans présenter en détail chacune des questions, il est clair que ce questionnaire ne conduit pas à la construction d'une argumentation telle que nous l'avions définie dans la première partie (page 6 et suivantes).

Si on se limite à l'exemple du texte de Maupassant, une telle démarche aurait pu être introduite par des questions comme :

1 — Quelle est précisément la question débattue ?
2 — Quelles sont les réponses à cette question qui s'opposent au cours du débat ? Comment se partagent sur cette question les participants au débat ? Relevez les expressions qui vous ont permis de répondre.

Ensuite des questions sur la façon de désigner et de caractériser l'amour et sur les comparaisons utilisées dans les lignes 5 à 14 auraient eu pour but d'observer de quelle façon chaque partie a recours à l'analogie. Une autre question aurait pu porter sur l'organisation de l'intervention du marquis.

Une dernière question aurait demandé comment le narrateur prend position ou non dans ce débat, en relevant les passages du texte qui permettent de répondre.

---

[1] Texte de Maupassant.

A première vue, le questionnaire proposé à l'entrée en seconde en 1994 semble reprendre la méthode proposée par A. Boissinot avec ses trois parties : la partie « observer » correspondant au repérage des « indices », la partie « mettre en relation » à la recherche de la « dynamique du texte » qui aboutit à une dernière partie : « construire un sens ». Mais outre que cette évaluation commence par des questions, comme celles sur le sens d'un mot (*tempérament*) ou sur le thème du texte, sans lien avec la démarche proposée, elle s'en écarte pour plusieurs raisons.

Tout d'abord le relevé des indices est fait de façon très incomplète. Si une question attire l'attention sur le fait que les paroles du marquis sont rapportées entre guillemets, on ne demande aucun relevé des expressions marquant des propos rapportés, ni dans l'ensemble du texte ni dans l'intervention du marquis. De plus un relevé plus complet des «indices d'énonciation» se serait aussi intéressé aux termes comportant un jugement tels que «prétendaient»(l.7) «cette croyance» (l.15) ou «l'éternelle discussion» (l.5) et d'autres. De plus dans les exemples de A. Boissinot, le relevé des indices s'accompagne de l'élaboration d'hypothèses de lecture. Ainsi les observations sur les discours rapportés auraient dû conduire à observer les deux parties en présence et à s'interroger sur l'intervention du marquis. Les termes valorisants et dévalorisants auraient été reliés à un narrateur dont on se serait demandé la position dans le débat.

Le relevé des «indices lexicaux» se fait dans le cadre de «l'opposition des points de vue en présence» «qui eux-mêmes opposent deux pôles dont l'un se trouve valorisé et l'autre dévalorisé»[1]. Ainsi, des recherches sur le lexique utilisé par les hommes et celui utilisé par les femmes auraient pu conduire à se demander si l'opposition entre les deux points de vue se limite à une opposition «une fois/plusieurs fois» et à se poser la question : parlent-ils du même amour ? Dans ce cadre, on pourrait noter que la «violence» de l'amour qu'évoquent les hommes se retrouve dans l'emploi de termes comme «ravagé, incendié» par les femmes.

Enfin A. Boissinot invite à prendre en compte le déroulement du texte et la répartition des indices suivant cette «dynamique». L'observation sur *on* dont nous avons montré les limites plus haut aurait alors été précisée par celle que le *on* englobant tous les participants au débat est remplacé dès la septième ligne par la définition des deux groupes en présence.

Dans la démarche proposée par A. Boissinot c'est le recoupement qui conduit à ce que «l'observation et l'interprétation des indices permettent de confirmer des hypothèses sur la signification globale du texte», et finalement de repérer les arguments et leur agencement [2]. Dans le questionnaire les «mises en relation» de la deuxième partie ne se font pas à partir des «observations» de la première partie, et la construction du sens ne s'appuie pas sur les exercices précédents.

On peut arguer que l'ensemble était destiné à contrôler les capacités à comprendre un texte argumentatif et non à guider cette compréhension. C'est pourquoi nous observerons certaines difficultés que révèle ce questionnaire en tant qu'outil d'évaluation, avant de présenter quelques interrogations concernant ce nouvel objectif des instructions pour le collège : « comprendre un texte argumentatif ».

[1] Boissinot, 1992, page 56.
[2] *Ibid.*, page 58.

III - ENSEIGNER ET EVALUER LA COMPREHENSION D'UN TEXTE ARGUMENTATIF : QUESTIONS ET PISTES DE REFLEXION.

En étudiant cette première tentative de mettre en place à l'échelon national un outil d'évaluation de la compréhension d'un texte argumentatif, notre but n'est en aucun cas de pratiquer une critique systématique aboutissant à souligner un échec. Au contraire cette critique n'a pour nous d'intérêt que parce qu'il s'agit d'un essai qui nous oblige à nous poser un certain nombre de questions concernant l'évaluation de la compréhension des textes et surtout son apprentissage dans le cas des textes argumentatifs.

1. Evaluer la compréhension d'un texte

L'élaboration d'un tel outil d'évaluation se heurte à plusieurs types de difficultés.

*a/ choix du texte_*

Les premières concernent le choix du texte sur lequel va porter l'évaluation. Il s'agit d'abord de juger correctement de la difficulté de compréhension du texte par rapport aux capacités des élèves qu'on souhaite évaluer.

Cette difficulté dépend pour partie de ce que les connaissances supposées chez le lecteur lui sont de fait plus ou moins familières. Nous avons noté ce problème concernant le texte de Zola qui supposait des connaissances d'histoire littéraire.

Elle dépend aussi de ce que l'organisation du texte est plus ou moins proche du sens à reconstruire et de ce que ses caractéristiques linguistiques sont plus ou moins complexes.

L'évaluation à l'entrée en seconde comportait deux parties distinctes sur la compréhension d'un texte narratif et sur celle d'un texte argumentatif. Il semble alors maladroit de choisir un texte, comme celui de Maupassant, où l'argumentation est présentée à l'intérieur du récit d'un repas, si bien que les caractéristiques propres au récit se superposent aux caractéristiques argumentatives.

Le texte de septembre 1997, un extrait de *l'Ecume des jours* de Boris Vian, contenait une argumentation, mais assez éclatée, sous forme de conversation entre deux personnages. Le piège pouvait être que la « thèse défendue » et la « thèse réfutée » ne sont pas simplement portées par chacun des interlocuteurs. L'organisation du texte est éloignée de celle de l'argumentation.

Le problème est donc aussi de choisir un texte plus ou moins typique de l'argumentation, ou dont la dimension argumentative soit suffisamment claire, ce qui suppose de définir les caractéristiques à prendre en compte.

b/Formuler des questions

Cette deuxième catégorie de difficultés intervient dans l'élaboration de tout questionnaire, car la formulation d'une question peut rendre l'évaluation de la réponse impossible. D'une part chaque question doit être formulée de façon claire. Nous avons noté que l'utilisation du mot « indissociable » dans la question 24, demandant de choisir parmi des « couples de connecteurs indissociables », était source d'ambiguïté (*cf.* plus haut page 17) et que la question 27 demandant de mettre en évidence « l'efficacité de l'argumentation » (*idem* page 19) était

tout à fait incompréhensible. De plus pour que l'évaluation de la réponse attendue ne pose pas trop de problèmes il faut qu'elle s'appuie sur un concept clair, ce qui n'était pas le cas de celui de "champ lexical" (*cf.* page 15).

D'autre part il faut éviter que le questionnaire fournisse totalité ou partie de la réponse attendue. Nous avions observé par exemple que les questions 28 et 29 sur le texte de Maupassant permettaient à l'élève de trouver la réponse à la question 26 (*cf.* plus haut page 20) Plus généralement on doit se demander si la formulation de la question n'aboutit pas à rendre la tâche trop élémentaire. Il convient ici de choisir les éléments d'interprétation du texte qui sont demandés à l'élève et ceux qui lui sont fournis par l'énoncé. Ainsi nous avions noté (*idem*, page 12) que la présentation de la question 23 sur le texte de Maupassant, censée évaluer la capacité à repérer « les points de vue qui s'affrontent dans le texte », limitait la tâche à un repérage pour chaque affirmation du verbe introducteur et de son sujet.

c/ Questions et compréhension du texte

Dans le tableau indiquant les capacités et les compétences évaluées dans la compréhension des textes, les concepteurs des épreuves ont prévu trois ensembles : « observer », « mettre en relation », « construire un sens ». Même si on ne les considère pas comme trois ensembles successifs, correspondant à trois étapes de la compréhension du texte, cette séparation pose problème : est-il possible de découper des unités et de les observer en dehors d'une démarche globale de construction du sens ? De telles questions permettront-elles d'évaluer la compréhension ?

Nous avons remarqué la présence de questions auxquelles on peut répondre mécaniquement sur la base de rapprochements sémantiques, comme la question 18 (*cf.* plus haut page 15) ou en se limitant à l'interprétation d'une phrase comme la question 17 (*idem* page 16), et ainsi réussir même si on ne comprend rien au texte.[1]

D'autres questions invitent à regrouper des éléments qui ne sont pas significatifs pour la construction du sens du texte comme la question 19 (*cf.* plus haut page 14) ou peuvent même la fausser, comme la question 20 (*idem* page 15). De telles questions non plus ne peuvent permettre de juger de la façon dont l'élève a compris l'argumentation.

Bien sûr rien n'empêcherait de faire porter les questions sur des aspects plus significatifs du texte mais la construction de ce type de questionnaires pose plusieurs problèmes. Déterminer des éléments vraiment significatifs sur lesquels poser une question sans ambiguïté, dont la réponse ne donne pas lieu à des interprétations trop diverses, demande un gros travail d'élaboration, et d'abord d'avoir défini les éléments essentiels du sens du texte et leur organisation. La difficulté est encore plus grande dans ce type de questionnaire à réponses "fermées", destiné à un codage rapide des réponses. Il nous semble même que ce type de questions inévitablement réductrices ne permet pas de prendre en compte tous les aspects importants du texte.

En critiquant ce questionnaire et en montrant l'inefficacité de nombre de questions nous voudrions attirer l'attention sur deux points :

- Il semble indispensable d'avoir conscience de l'imperfection de l'outil d'évaluation pour éviter d'en tirer des conclusions trop catégoriques. A condition d'être vigilants et de réfléchir aux

[1] En septembre 1997, sur huit questions, deux ne demandaient aucune lecture du texte : il s'agissait de reformuler une phrase donnée dont le sens ne dépendait pas du contexte (item 8)). Pour l'item 3, les extraits de textes donnés servaient de prétexte à verifier lla connaissance de termes : antonymes, négation, réprise de mot.

réponses des élèves et à ce qu'elles révèlent de leur compréhension du texte ou de la question, ce questionnaire permettra des observations intéressantes sur leurs capacités. En aucun cas il ne peut permettre des conclusions chiffrées rapides, des comparaisons sur des niveaux, d'un groupe d'élèves à un autre par exemple.

- Evaluer la compréhension que les élèves ont d'un texte et améliorer leurs capacités en ce domaine sont des objectifs fondamentaux pour l'enseignement du français et l'imperfection de l'outil invite à l'améliorer. Pour cela il faudrait travailler la formulation des questions, mais surtout réfléchir à l'activité "comprendre un texte", s'interroger sur les types de textes et sur les démarches qu'ils supposent. A cette condition, la mise au point d'un tel outil peut constituer une excellente occasion pour ces recherches essentielles.

2. Faire progresser les élèves dans la compréhension des textes argumentatifs.

La réflexion sur les exercices proposés lors de l'évaluation à l'entrée en seconde peut nous permettre de revenir sur les démarches présentées dans la première partie pour formuler quelques questions et pistes de travail.

Se fondant sur une distinction des types de textes à la fois d'après leur schéma d'organisation et d'après des ensembles particuliers de caractéristiques linguistiques, la méthode proposée par A. Boissinot pour la compréhension des textes argumentatifs était de relever un certain nombre d' « indices », de marques linguistiques et de les interpréter pour mettre à jour l'organisation de l'argumentation. Pour progresser dans cette démarche il faudrait entraîner les élèves au choix des marques linguistiques et à leur interprétation.

Dans les nouvelles instructions pour la classe de sixième comme dans le projet d'instructions pour les classes de cinquième-quatrième[1], l'objectif fondamental est «la maîtrise des discours » (comprendre et produire des discours) et c'est à cet objectif que doivent être «associés les divers aspects des apprentissages et les divers contenus». Il s'agit en particulier que les connaissances recensées dans la partie «outils de la langue» concourent à la «maîtrise des discours» et de «préciser les caractères distinctifs des formes principales de discours qui s'entrecroisent dans la réalité des textes : le narratif, le descriptif, l'explicatif, l'argumentatif.» Est-ce que dans ce cadre peut être envisagé un apprentissage des indices linguistiques nécessaires à la compréhension des textes argumentatifs ?

Pour répondre à ces instructions, sur six livres de grammaire correspondant à la classe de cinquième publiés pour la rentrée 1997[2], plusieurs se contentent de prévoir un chapitre sur les caractéristiques des types de textes ou l'organisation des discours. Le Magnard organise une partie des chapitres de grammaire et de vocabulaire en fonction d'un apprentissage des «formes de discours», en regroupant par exemple l'étude de la valeur des temps du passé, les connecteurs temporels, *etc.* , dans une partie «récit» ; mais rien à ce niveau concernant l'argumentation.

---

[1] BO n°1, mars 1996.

[2] - F.Descourbes, A.Meunier, J.Paul, *Grammaire pour les textes 5è*, nouvelle collection Plus-que-parfait - Bordas, 1997.
- C. Caron-Michamblé, A.-M. Achard, JJ Besson,*Grammaire et expression 5è* , Hachette, 1997.
- G. Molinié ed., *Grammaire et communication 5è*, Magnard, 1997.
- M.-F. Sculfort ed., *Grammaire et expression 5è*, Nathan, 1997.
- V. Géraud et J.-N. Moreau ed., *Grammaire du francçais 5è*, Belin, 1997.
- D.Stissi, J.Bidault, J.-B. Allardi, M. Arnaud, *Grammaire pour lire et écrire 5è*, Delagrave, 1997.

On trouvera un chapitre «reconnaître les textes argumentatifs et explicatifs» dans le Bordas. Seul le Delagrave comporte une partie concernant l'argumentation, comportant les chapitres «expliquer» et «argumenter» mais aussi des chapitres sur «les liaisons logiques», la cause, la conséquence, et la proposition conjonctive complément d'objet, «très fréquente dans ce type de textes». On peut ainsi ne pas limiter la grammaire et le vocabulaire à une étude formelle et réfléchir aux rôles des différentes marques linguistiques dans la construction du sens.

Mais si on prend un chapitre comme celui sur «les liens logiques» par exemple, il sera bien sûr impossible de recenser pour chaque type de «lien logique» tous les mots, groupes de mots, constructions particulières qui peuvent servir à l'exprimer. Il faudra par ailleurs apprendre comment la compréhension de l'organisation du sens dans un texte peut guider pour repérer à quel lien logique correspond telle expression, ou pour interpréter les cas fréquents où aucune expression n'explicite la liaison.

De plus l'étude se complique du fait qu'une même marque linguistique peut jouer des rôles différents, et par exemple s'interpréter différemment suivant les textes où elle se trouve. Ce que méconnaissent certains auteurs de grammaires [1] qui écrivent :

> **« Ne confondez pas donc et car : donc = conséquence, car = cause ; N'écrivez pas : Tous lui serraient la main, donc il était très populaire. Mais : Tous lui serraient la main, car il était très populaire. »**

Or les deux phrases ne correspondent pas à la même démarche. En écrivant «Il était très populaire, tous lui serraient donc la main» on soulignerait bien la relation d'un fait à sa conséquence, mais la phrase refusée par les auteurs correspond au cas où le locuteur veut justifier l'affirmation «Il était très populaire». *Donc* n'a pas le même sens dans les deux cas. La reconnaissance des démarches en jeu permet d'interpréter l'une ou l'autre phrase.

Ainsi il apparaît que d'autres apprentissages sont fondamentaux pour améliorer la compréhension des textes argumentatifs. Il faut que les lecteurs deviennent capables d'identifier une démarche cognitive particulière — l'argumentation — à travers la diversité des textes qui lamettent en œuvre et se construisent un modèle capable de les guider dans le repérage des éléments qui permettent de comprendre le sens d'un texte et dans l'organisation de ces éléments.

Beaucoup de pistes de travail sont alors à explorer. Tout d'abord quelles activités mettre en place pour que les élèves apprennent à distinguer l'argumentation de la narration ou de la description, mais aussi de l'explication ? Quelles caractéristiques propres à chacune de ces démarches cognitives vont être opérantes ? Faut-il partir de l'étude de textes mettant en œuvre typiquement une seule de ces démarches pour que les élèves se construisent un modèle d'organisation la caractérisant ? Faut-il travailler par comparaisons et distinctions successives ?

Comment apprendre à reconnaître les différentes opérations discursives mises en œuvre dans un texte présentant une argumentation et à relever et classer les éléments du texte qui permettent de les repérer ? Par exemple comment identifier l'énoncé-cible ? Comment est justifié un argument, comment est-il orienté, comment est indiquée sa force ?

C'est pourquoi la définition de l'argumentation, telle qu'elle a été amorcée ici d'après les publications de R. Duval, comme une organisation particulière de propositions tenant compte en particulier du degré de fiabilité qu'on leur attribue, se veut un point de départ. Elle ouvre des perspectives à la fois pour mieux évaluer la compréhension des textes argumentatifs et pour faire progresser les élèves dans cette compréhension.

---

[1] A.Gasquez, E. Heintzmann, H.Mitterand, *Grammaire française et expression écrite 4è-3è*, Nathan, 1992. p.223.

ANNEXE

Je hais les sots qui font les dédaigneux, les impuissants qui crient que notre art et notre littérature meurent de leur belle mort. Ce sont les cerveaux les plus vides, les cœurs les plus secs, les gens enterrés dans le passé, qui feuillettent avec mépris les œuvres vivantes et tout enfiévrées de notre âge, et les déclarent nulles et étroites. Moi, je vois autrement. Je n'ai guère de souci de beauté ni de perfection. Je me moque des grands siècles. Je n'ai souci que de vie, de lutte, de fièvre. Je suis à l'aise parmi notre génération. Il me semble que l'artiste ne peut souhaiter un autre milieu, une autre époque. Il n'y a plus de maîtres, plus d'écoles. Nous sommes en pleine anarchie, et chacun de nous est un rebelle qui pense pour lui, qui crée et se bat pour lui. L'heure est haletante, pleine d'anxiété : on attend ceux qui frapperont le plus fort et le plus juste, dont les poings seront assez puissants pour fermer la bouche des autres, et il y a au fond de chaque nouveau lutteur une vague espérance d'être ce dictateur, ce tyran de demain. Puis, quel horizon large ! Comme nous sentons tressaillir en nous les vérités de l'avenir ! Si nous balbutions, c'est que nous avons trop de choses à dire. Nous sommes au seuil d'un siècle de science et de réalité, et nous chancelons, par instants, comme des hommes ivres, devant la grande lueur qui se lève en face de nous. Mais nous travaillons, nous préparons la besogne de nos fils, nous en sommes à l'heure de la démolition, lorsqu'une poussière de plâtre emplit l'air et que les décombres tombent avec fracas. Demain l'édifice sera reconstruit. Nous aurons eu les joies cuisantes, l'angoisse douce et amère de l'enfantement ; nous aurons eu les œuvres passionnées, les cris libres de la vérité, tous les vices et les vertus des grands siècles à leur berceau. Que les aveugles nient nos efforts, qu'ils voient dans nos luttes les convulsions de l'agonie, lorque ces luttes sont les premiers bégaiements de la naissance. Ce sont des aveugles.

Emile ZOLA, *Mes haines, causeries littéraires et artistique*, 1866.

La Rempailleuse

C'était à la fin du dîner d'ouverture de chasse chez le marquis de Bertrans. Onze chasseurs, huit jeunes femmes et le médecin du pays étaient assis autour de la grande table illuminée, couverte de fruits et de fleurs.

On vint à parler d'amour, et une grande discussion s'éleva, l'éternelle discussion pour savoir si on pouvait aimer vraiment une fois ou plusieurs fois. On cita des exemples de gens n'ayant jamais eu qu'un amour sérieux ; on cita aussi d'autres exemples de gens ayant aimé souvent, avec violence. Les hommes, en général, prétendaient que la passion, comme les maladies, peut frapper plusieurs fois le même être, et le frapper à le tuer si quelque obstacle se dresse devant lui. Bien que cette manière de voir ne fût pas contestable, les femmes, dont l'opinion s'appuyait sur la poésie bien plus que sur l'observation, affirmaient que l'amour, l'amour vrai, le grand amour, ne pouvait tomber qu'une fois sur un mortel, qu'il était semblable à la foudre, cet amour, et qu'un cœur touché par lui demeurait ensuite tellement vidé, ravagé, incendié, qu'aucun autre sentiment puissant, même aucun rêve, n'y pouvait germer de nouveau.

Le marquis, ayant aimé beaucoup, combattait vivement cette croyance :

« Je vous dis, moi, qu'on peut aimer plusieurs fois avec toutes ses forces et toute son âme. Vous me citez des gens qui se sont tués par amour, comme preuve de l'impossibilité d'une seconde passion. Je vous répondrai que, s'il n'avaient pas commis cette bêtise de se suicider, ce qui leur enlevait toute chance de rechute, ils se seraient guéris ; et ils auraient recommencé, et toujours, jusqu'à leur mort naturelle. Il en des amoureux comme des ivrognes. Qui a bu boira — qui a aimé aimera. C'est une affaire de tempérament, cela. »

On prit pour arbitre le docteur, vieux médecin parisien retiré aux champs ; et on le pria de donner son avis.

Justement il n'en avait pas.

Guy de MAUPASSANT, *Contes de la Bécasse*, 1883.

Références

ADAM. J-M. (1990), *Eléments de linguistique textuelle* , Mardaga .

ADAM J-M. (1984), Des mots au discours : l'exemple des principaux connecteurs, *Pratiques*, n°4, Metz , octobre 1984

BENVENISTE E.(1966), *Problèmes de linguistique générale* , Paris, NRF-Gallimard

BOISSINOT A. (1992), *Les textes argumentatifs* , B.Lacoste

BRONCKART J.P. (1985) et alii, Le fonctionnement des discours , Delachaux-Niestlé.

COMBETTES B., FRESSON J., TOMASSONE R. (1979) De la phrase au texte 3è, Delagrave.

COMBETTES B. (1983) *Pour une grammaire textuelle*, Paris-Bruxelles , De Boeck Duculot

COMBETTES B. (1987) Types de textes et faits de langue, *Pratiques*, n°56.

COMBETTES B. (1992) *L'organisation du texte*, collection Didactique des textes, Université de Metz.

DUBOIS J.(1969) *Grammaire structurale du français : la phrase et ses transformations* , Paris.

DUCROT O. et TODOROV T. (1972) *Dictionnaire encyclopédique des Sciences du langage*, Paris : seuil.

DUCROT O. (1980) *Les mots du discours* , Paris, Editions de Minuit.

DUCROT O. (1984) *Le dire et le dit* , Paris, Editions de Minuit.

DUVAL R. (1992) Démontrer, argumenter, expliquer : continuité ou rupture cognitive, *Petit x*, n°31, Grenoble.

DUVAL R. et EGRET M.A. (1993) Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif, *Repères*, juillet 1993.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Bern, Peter Lang

Groupe INRDP Logique et langage, (1973) Enseignement du français et enseignement des mathématiques - *Recherches pédagogiques* n°56 - Paris 1973.

JAKOBSON R. (1963) *Essais de linguistique générale* , Editions de Minuit, Paris.
Pratiques n°84, Argumentation et langue, décembre 1994, Metz.

WERLICH E. (1976) *A text grammar of English*, cité par LUNQUIST L. *La cohérence textuelle* .Copenhague - Nyt Nordisk Forlag Arnold Busk, 1980.

Manuels scolaires

DESCOURBES F., MEUNIER A., PAUL J. - Grammaire pour les textes 5è, nouvelle collection Plus-que-parfait - Bordas,1997

CARON-MICHAMBLÉ C., ACHARD A.M., BESSON J.J. - Grammaire et expression 5è - Hachette, 1997.

MOLINIÉ G. ed. - Grammaire et communication 5è - Magnard, 1997.

SCULFORT M.F. ed. - Grammaire et expression 5è - Nathan, 1997.

GÉRAUD V. et MOREAU J.N. ed. - Grammaire du francçais 5è - Belin, 1997. D.Stissi,

BIDAULT J., ALLARDI J.B., ARNAUD M., Grammaire pour lire et écrire 5è, Delagrave, 1997.

GASQUEZ A., HEINTZMANN E., MITTERAND H., Grammaire française et expression écrite 4è-3è - Nathan, 1992.

LE REPÉRAGE DES DIFFICULTÉS DE LECTURE A L'AIDE DU FRANÇAIS ET DES MATHÉMATIQUES

François PLUVINAGE et Anne MALLIER

Since the year 1989 a national assessment has been organised at the beginning of secondary school in France (for students about 11). One way for individual and collective using of the results is to attempt to solve in the classroom the difficulties that children have with literacy. We observe that the global results are following a decreasing slope, in spite of the fact that the teachers know what kind of items children had to answer the former years. It seems that the results of students in the average level do not change, but that the percentage of children with strong language difficulties increases in the population. We could find an explanation in the today official policy at the primary school, not to give to the pupils writing work at home.

Mathematics and French are the topics of this assessment. Some items in mathematics are as valuable as French items to measure literacy. It appears that the lists of items ordered by results are different between the standard students and those known as "students with difficulties". The mathematical items are in a relative better position in the second population and this could mean that mathematics allow the teacher to find some specific ways of learning for these students.

Pour la quatrième année dans l'académie de Strasbourg, un système de repérage des élèves en grande difficulté de lecture à l'entrée en 6ème a été mis en place en 1997. Il s'agissait de retenir 12 items très simples de l'évaluation nationale pour prélever les résultats des élèves à ce choix d'items et les constituer en un champ du logiciel CASIMIR. Les activités demandées aux élèves étaient comparables à celles retenues les années précédentes ; certains exercices étaient tout à fait semblables en français (par exemple relever une phrase interrogative, choisir un déterminant approprié) ; toutefois l'un de ceux qui, récurrents, avaient été sélectionnés depuis les premières années, a dû être écarté : il s'agissait de l'identification d'une forme impérative (item F011) et, en l'absence du point d'exclamation qui figurait comme marque explicite les années antérieures, la réponse était rendue plus difficile cette année. D'autres items, introduits dans l'évaluation 97 de mathématiques, ont été sélectionnés (tests de tracés de base conformes à une consigne écrite).

La très grande majorité des collèges a fait remonter au niveau académique des disquettes de résultats anonymés des élèves. Toutefois les résultats exploitables sont en moins grand nombre qu'en 1996 : dans certains établissements, des difficultés techniques dues à des modifications du logiciel CASIMIR ont rendu impossible la sauvegarde des résultats sur disquette ; pour sa part, le service FORM n'a pas pu exploiter la totalité des disquettes reçues, très peu étant inexploitables et un peu plus ne portant que sur les élèves de SES-SEGPA. Enfin, des absences d'élèves ou le manque de cahiers ont pu en certains endroits diminuer le nombre des élèves pris en compte. Le nombre d'élèves dont les résultats à la totalité des épreuves sont remontés sous forme exploitable est toutefois assez important pour être significatif : il s'agit de 11 249 élèves, 11 547 avec ceux de SES-SEGPA. Jusqu'en 1996, les résultats des élèves de SES-SEGPA n'étaient pas comptabilisés ; en 1997, on a procédé à deux

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 6 (1998) (pp. 117 à 124) – IREM de Strasbourg

calculs, l'un sans les élèves de SES-SEGPA pour la cohérence avec les années précédentes, l'autre avec eux pour préparer les années à venir où l'on sera amené à les prendre en compte.

Comparaison des items sélectionnés en 1996 et en 1997 et des pourcentages de réussite item par item

Dans tous les cas sauf F044 et F006 de 1996 (où des codes 3 et 8 ont été admis), on a considéré qu'un élève a réussi si sa réponse est codée 1 ou 2. La comparaison entre 1996 et 1997 montre une bonne homogénéité globale de questionnement d'une année à l'autre ; cette comparaison apparaît dans le tableau suivant, où les questions posées sont ordonnées par taux de réussite décroissants. En annexe, on trouvera les questions de mathématiques de 1996 et 1997 avec leur numéro d'item (numéros précédés de la lettre M dans le tableau).

1996 Description abrégée	Item	R %	1997 Description abrégée	Item	R %
Lire un graphique	M001	98%	Relever une phrase interrogative	F010	95%
Choisir entre des homophones	F066	94%	Choisir un déterminant approprié	F029	93%
Exploiter un tableau	M080	94%	Succession de panneaux routiers	M018	92%
Choisir entre des homophones	F062	92%	Tracer la symétrique	M062	92%
Relever une phrase interrogative	F044	90%	Tracer un segment selon consigne	M005	91%
Choisir un déterminant approprié	F055	88%	Repérage d'indices situant un lieu	F019	86%
Dénombrer des titres de chapitres	M002	88%	Choisir un déterminant approprié	F026	85%
Choisir entre des homophones	F061	86%	Dénombrer des personnages	F047	85%
Choisir un déterminant approprié	F056	86%	Choisir un déterminant approprié	F030	84%
Dénombrer des titres de chapitres	F005	83%	Tracer un cercle selon consigne	M065	83%
Relever une phrase impérative	F045	82%	Choisir un déterminant approprié	F028	74%
Exploiter les données d'un titre	F006	68%	Choisir un déterminant approprié	F027	71%

Tableau 1

Les scores de 1997, un peu inférieurs en moyenne à ceux de 1996, ne sont pas cependant sensiblement différents et laisseraient attendre des résultats assez proches d'une année à l'autre après application des critères de repérage des mal lisants. Pour à la fois tester la qualité de la population interrogée et vérifier la pertinence des items retenus, on procède d'abord à une comparaison des résultats académiques de 1997 avec les résultats nationaux.

Comparaison des résultats item par item au niveau académique et au niveau national

Le tableau suivant indique le nombre d'élèves ayant réussi à chaque item et le pourcentage de réussite ainsi que le pourcentage de référence au niveau national[1]. La lecture comparée des pourcentages de réussite académiques et nationaux figurant dans ce tableau montre que les résultats sont très semblables, à 1 ou 2 points près en plus ou en moins ; on notera au passage qu'en mathématiques, les résultats académiques sont toujours égaux ou supérieurs

[1] *Évaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1997*, numéro hors série à paraître 1998, Éducation & Formation, D.P.D., Ministère de l'Éducation nationale, F - Paris

(légèrement) à la moyenne nationale. L'introduction d'items nouveaux en mathématiques cette année n'est en tout cas pas responsable d'une chute des scores, tels qu'ils apparaissent après application des critères de repérage des mal lisants.

	Réussite	R %	Référence nationale
F10	10776	95%	96%
F19	9816	86%	87%
F26	9668	85%	87%
F27	8085	71%	72%
F28	8444	74%	73%
F29	10521	93%	94%
F30	9510	84%	83%
F47	9683	85%	83%
M05	10346	91%	91%
M18	10404	92%	89%
M62	10452	92%	92%
M65	9392	83%	81%

Tableau 2

Critères de repérage des résultats

Les critères de repérage restent les mêmes que les années précédentes :

- Avec ¾ ou plus de réussites (9 items ou plus), l'élève est considéré comme certainement bon lecteur ; 84,3 % des élèves sont concernés.
- Avec la moitié ou moins de réussites (6 items ou moins), l'élève est très probablement en grande difficulté de lecture ; c'est le cas de 4,2 % d'élèves.
- Entre les deux situations extrêmes, les élèves qui ont plus de la moitié des réussites et moins des ¾ (7 ou 8 items) doivent être regardés de plus près pour qu'on évalue plus finement leurs difficultés ; il s'agit de 10,4 % des élèves.

Comparaison des résultats académiques de 1996 et de 1997

Si l'on compare ces résultats à ceux des années précédentes, ils sont préoccupants.

	moitié des items ou moins	plus de la moitié et moins des ¾	les ¾ des items ou plus
1994	1.6 %	6.5 %	91.9 %
1995	1.4 %	7.0 %	91.6 %
1996	2.4 %	7.6 %	90.0 %
1997	4.2 %	10.4 %	85.4 %

Tableau 3

En additionnant les pourcentages des deux prémières colonnes du tableau précédent, on constate que le nombre d'élèves ayant obtenu un code 1 ou 2 à moins des ¾ des items sélectionnés est en 1997 de 14.6 %, alors qu'il était en 1996 de 10 %, pourcentage lui-même en

hausse par rapport aux années antérieures. Il est toutefois possible de discuter les chiffres précis de cette hausse, en remarquant que la stabilité des résultats d'une année sur l'autre n'est pas parfaite (se reporter au tableau 1). Ce phénomène ne va pas jusqu'à faire douter de la tendance, mais il représente un sérieux problème par rapport au souhait légitime des responsables académiques de disposer de résultats fiables.

Si on compte les résultats des élèves de SES-SEGPA, destinés à être comptabilisés parmi l'ensemble des collégiens, on obtient un pourcentage de 15,9 % (qui se décompose en 5.2 % + 10.7%) ; c'est ce dernier nombre qu'il faudra retenir les années ultérieures si l'on veut prendre en compte les résultats de tous les élèves, y compris ceux de SES-SEGPA. Notons que les chiffres communiqués au niveau national concernent tous les collégiens, donc incluent ces élèves.

Précisions sur les difficultés de lecture au début du collège

Les élèves que le travail écrit direct mettra en difficulté sont ceux pour qui les activités d'encodage et de décodage entre écrit et oral ne fonctionnent pas sans leur demander un véritable effort.

Items sélectionnés en 1997 et pourcentages de réussite item par item

Description abrégée de l'item	item	6e stand.	Réus-site	SES	Réus-site	Tous	Réus-site
Relever une phrase interrogative	F010	10776	96%	132	44%	10908	94%
Choisir un déterminant approprié	F029	10521	94%	128	43%	10649	92%
Tracer la symétrique	M062	10452	93%	153	51%	10605	92%
Succession de panneaux routiers	M018	10404	92%	131	44%	10535	91%
Tracer un segment selon consigne	M005	10346	92%	167	56%	10513	91%
Repérage d'indices situant un lieu	F019	9816	87%	70	23%	9886	86%
Dénombrer des personnages	F047	9683	86%	116	39%	9799	85%
Choisir un déterminant approprié	F026	9668	86%	108	36%	9776	85%
Choisir un déterminant approprié	F030	9510	85%	91	31%	9601	83%
Tracer un cercle selon consigne	M065	9392	83%	89	30%	9481	82%
Choisir un déterminant approprié	F028	8444	75%	74	25%	8518	74%
Choisir un déterminant approprié	F027	8085	72%	62	21%	8147	71%
Total des élèves concernés		11249		298		11547	
Population des élèves lisant correctement		9591	85.27%	117	39.26%	9708	84.08%
Population donnant lieu à des doutes		1176	10.45%	61	20.47%	1237	10.71%
Population aux difficultés quasi certaines		482	4.28%	120	40.27%	602	5.21%

Tableau 4

Dans notre environnement social, on peut estimer qu'en dehors de quelques cas extrêmement particuliers, on ne rencontre pas d'analphabètes au début du collège, chez des élèves dont l'âge régulier est de 11ans. En revanche, il vaut la peine de repérer la population plus importante

d'élèves que l'on peut qualifier de mal-lisants, c'est à dire handicapés pour toute exploitation de texte, parce que l'acte de lire ou celui d'écrire restent pour eux encore très (trop) coûteux. Outre la véritable difficulté à lire, demandant par exemple de lire deux fois une phrase simple avant de pouvoir déclarer en comprendre le sens, on peut rencontrer la grande pauvreté du bagage d'expression, amenant la méconnaissance du sens de trop de mots dans un texte simple pour que le contexte en permette autre chose qu'une compréhension vague et souvent erronée.

Dans le tableau des résultats, on constate ce qui a été dit précédemment sur la rareté de l'analphabétisme, puisque des réussites peuvent dépasser le taux de 95%. On se rend aussi compte des difficultés très importantes rencontrées dans les sections du type SES-SEGPA. Mais ce qui nous paraît le plus notable, en conformité avec nos propos sur les objets mathématiques, c'est que ce sont deux items de l'épreuve de mathématique qui obtiennent auprès des élèves de SES-SEGPA les meilleurs résultats ; ce sont les seules réussites au delà de 50% pour cette population, alors qu'il ne s'agit pas des items les plus réussis par l'ensemble des élèves (deux items de français les dépassent). On remarquera aussi que toute nécessité d'organisation est source de difficultés importantes pour les élèves de SES-SEGPA, comme on le voit par exemple sur l'item M065 demandant de coordonner la position du centre d'un cercle et l'ouverture du compas, lui permettant de passer par un point donné.

Interprétation des résultats

Quelle peut être la cause de la hausse inquiétante observée ? La comparaison des pourcentages de réussite à chaque item de 1996 et de 1997 a montré que la difficulté des items sélectionnés cette année n'est pas plus grande ou l'est à peine plus que l'année précédente ; de plus, nous avons pu observer, et il nous paraît important de le souligner, que ce n'est pas le niveau moyen de l'ensemble des élèves qui baisse, mais le nombre d'enfants en grande difficulté de lecture qui augmente ; si l'on se réfère à la forte proximité entre les résultats connus de l'échantillon national et ceux de l'académie, on peut supposer que cette assertion, vérifiable sur la population académique interrogée, est tout aussi valable au niveau national.

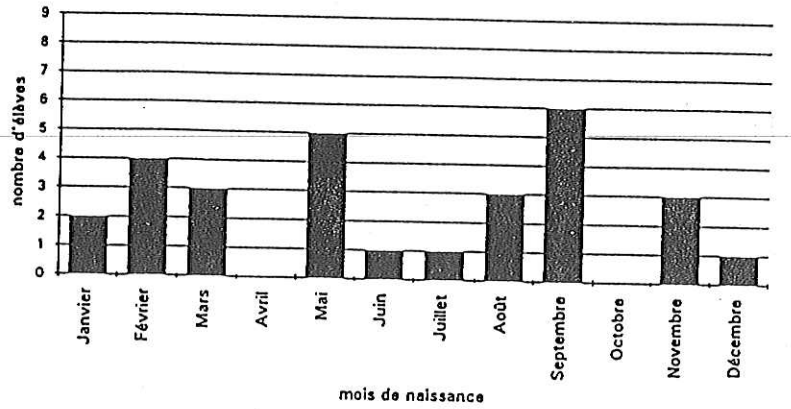
Il semble donc qu'il faille faire un effort très important au niveau de l'école primaire : avec présence sur les lieux d'enseignants responsables, les aides éducateurs nouvellement recrutés ne pourraient-ils pas intervenir après les horaires scolaires auprès des enfants auxquels leur milieu socioculturel n'apporte pas un soutien suffisant en lecture ? Offrir des possibilités de travail après l'heure de fin des classes primaires permettrait de revenir sur une décision qui pourrait bien avoir été une cause majeure des difficultés observées : pas de travail écrit (et souvent pas de travail du tout par voie de conséquence) à emporter à la maison. Au terme de cet examen de résultats, il paraît en tout cas justifié de développer avec des élèves des programmes de travail explicitement construits sur la base de déterminations de traitements dans des registres d'expression et de conversions entre registres.

Nous adressons nos remerciements aux spécialistes que sont Fabienne CLEMENT et Jacques NOUAILHETAS, pour leur précieuse contribution à l'exploitation informatique des résultats et aux calculs des statistiques que nous avons effectués.

EVALUATION 6ÈME MATHÉMATIQUES 1996

Exercice 1

Ne rien écrire dans cette colonne



Observe le graphique pour répondre aux questions.

1°) Quel est le mois où il y a le plus d'anniversaires ?

.....

1	9	0
		1

2°) Quels sont les mois où il n'y a pas d'anniversaire ?

.....

1	3	5	9	0
				2

Ne rien écrire dans cette colonne

Exercice 31

Voici un extrait du calendrier des postes indiquant les heures du lever et du coucher du soleil pour quatre jours de l'année 1996. Ces horaires sont valables à Paris.

Dates	Lever	Coucher
20 mars	05 h 55 min	18 h 02 min
21 juin	03 h 49 min	19 h 56 min
22 septembre	05 h 39 min	
21 décembre	07 h 43 min	15 h 55 min

1. A quelle heure se couche le soleil le 21 décembre ?

.....

1	9	0
		80

Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche- Direction de l'évaluation et de la prospective (DEP)

Ne rien écrire dans cette colonne

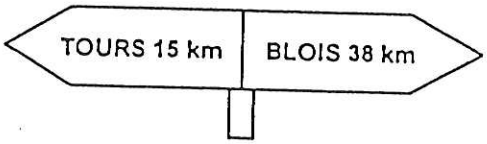
Exercice 4

Trace un segment de longueur 7 cm.

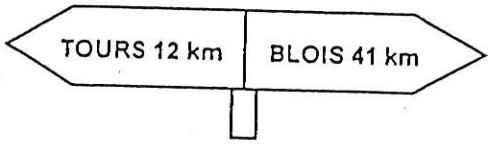
1 9 0
5

Exercice 13

Sébastien fait une randonnée à vélo. Peu après son départ, il voit un premier panneau :



dix minutes plus tard, sur la même route, il voit un deuxième panneau :



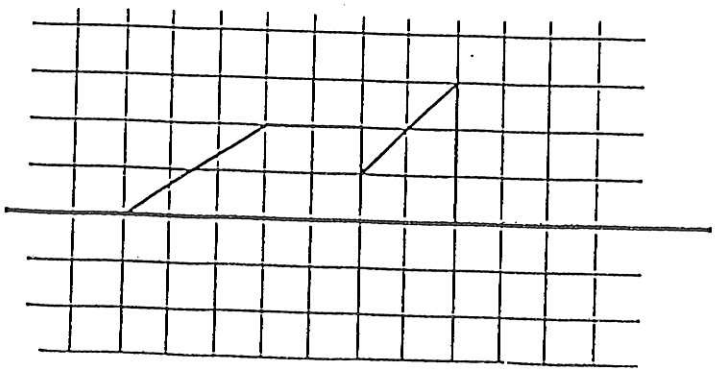
a) Sébastien comprend alors qu'il se rapproche de l'une des deux villes. Laquelle ?

.....

Exercice 36

1 9 0
18

Complète le dessin comme si tu pliais la feuille en suivant le grand trait.



1 9 0
62

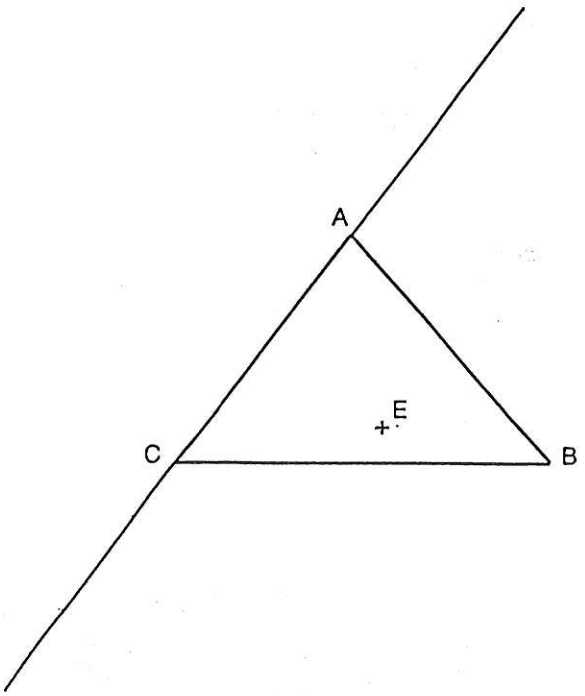
Ne rien écrire dans cette colonne

Exercice 38

On a commencé une figure. Complète cette figure en suivant les indications :

a) Trace le cercle de centre B passant par E.

b) Trace la droite perpendiculaire à la droite (AC) et passant par E.



1	3	4	9	0
				65

1	2	3	5	9	0
					65

LA NATURE DES OBJETS MATHEMATIQUES DANS LE RAISONNEMENT

François PLUVINAGE

Well known as difficult to reach, a goal for the mathematics teacher is the mastering of reasoning by his students. We might complete the numerous existing studies about this topic, helping us with the nature of the included *objects*. In the discourse we can distinguish three kinds of objects : the physical objects (for instance a duck), the cultural objects (for instance a square) and the mathematical objects (for instance a function). The usual semantic triangle significant-signified-referent is valid only for the physical objects, while other semantic schemes are working in both other kinds of objects. They are here studied in the case of rational numbers, as through their script and traditional representation as through the proposed formats and forms encountered in the modern software and spreadsheets. We focused our attention on the set of the treatments in a given expressing register and the set of conversions from one register to another.

On considère l'acquisition du raisonnement mathématique comme un objectif d'enseignement difficile à atteindre. Il nous paraît intéressant de compléter des études déjà présentées sur ce sujet par des considérations sur la nature des *objets* en jeu. Dans le discours, trois types d'objets méritent d'être distingués : les objets physiques (exemple : un canard), les objets culturels (exemple : un carré) et les objets mathématiques (exemple : une fonction). Le classique triangle signifiant-signifié-référent n'est véritablement pertinent que pour les objets physiques, d'autres schémas sémantiques fonctionnent pour les deux autres types d'objets. On les étudie dans l'exemple des nombres rationnels, tant au travers de leurs écritures et représentations traditionnelles que dans les formats offerts et les formules de caractère nouveau qu'utilisent les tableurs et certains logiciels de calcul. Ce qui focalise notre attention, c'est l'ensemble des activités de traitement dans un registre d'expression et de conversions entre registres différents praticables dans l'enseignement.

---

1 L'appréhension des objets : un problème pour l'enseignement des mathématiques ?

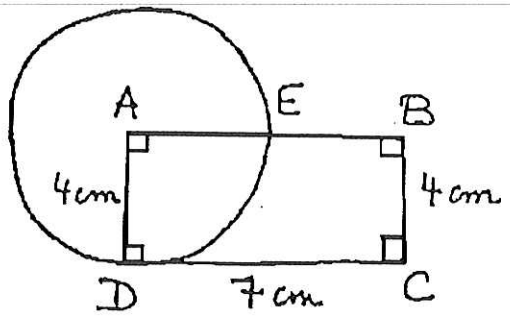
Le problème d'enseigner de manière à ce qu'un maximum d'élèves soient capables de *produire un raisonnement mathématique correct* est d'une difficulté suffisante pour retenir l'attention de chercheurs de spécialités diverses. Pour notre part, nous avons déjà envisagé, dans un article publié en langue espagnole et intitulé « Diferentes formas de razonamiento matemático »[1], des outils d'analyse des raisonnements, de leur nature et de leur degré de difficulté. Il nous paraît à présent utile de prendre en compte d'autres aspects pertinents pour les pédagogues, tout particulièrement la représentation des objets mathématiques

---

[1] F. Pluvinage, 1996, *Diferentes formas de razonamiento matemático*, actas del XX aniversario del Departamento de Matemática Educativa, Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
6 (1998) (pp. 125 à 138) – IREM de Strasbourg

On pourrait penser que nous sommes là en train de présenter un problème de chercheurs absorbés par des spéculations théoriques, mais n'ayant que des rapports lointains avec le quotidien de la classe. Ce ne serait déjà plus le cas de ceux qui connaissent les niveaux de Van Hiele, pouvant amener des individus différents de parler des mêmes objets sans se comprendre. Et l'observation d'élèves confrontés à des tâches simples met en évidence l'importance d'autres aspects, éventuellement moins connus des pédagogues. L'exemple qui suit, dont l'idée initiale et le schéma reviennent à Bernard Blochs, a été expérimenté en mars 1997, puis incorporé à l'évaluation nationale d'entrée en 6ème de septembre 1997.



Sur ce dessin à main levée (les vraies grandeurs sont écrites en cm), on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D.
Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.

Trouve la longueur du segment [EB] .....

Explique ta réponse : .....

.....

Figure 1

Les réponses peuvent être classées selon trois catégories bien identifiables, qui sont les suivantes :

- 3 cm : mathématique = réponse qui correspond au modèle mathématique
- 1.9 ou 2 cm : physique = réponse provenant d'une mesure (usage de la règle graduée),
- 3.5 cm ou 4cm : perceptive = réponse dictée par la perception visuelle ; ou bien le point E est vu comme milieu du côté AB (cas le plus fréquent), ou bien le segment EB est vu de la même longueur que le côté BC (réponse rare).

Les résultats que nous avons observés dans un échantillon de 167 élèves (âgés d'environ 11 ans) de trois collèges sont regroupés dans le tableau qui suit.

Réponses mathématiques	18%
Réponses physiques	28%
Réponses perceptives	52%

S'ajoutent, car tous les élèves de l'échantillon avaient répondu, 2% d'erreurs diverses.

Cette observation donne une idée du chemin à parcourir dans l'enseignement mathématique, pour que la majorité des élèves voient les figures comme des objets sur lesquels il y a directement à raisonner. En l'absence d'expérience d'apprentissage dans cette observation, il ne nous est toutefois pas possible de prétendre au vu de ses résultats, que le trajet

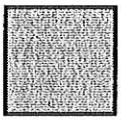
à parcourir pour atteindre un tel état ne serait pas aisé, ne nécessitant par exemple que des déclarations adéquates de la part du professeur.

Dans l'Encyclopedia Universalis France, l'article « Objet »[2], dont l'auteur est Gilles Gaston GRANGER professeur au Collège de France, nous montre que la réponse à l'interrogation qui vient d'être mentionnée est négative. Autrement dit, la difficulté est de taille et l'acquisition de la forme d'appréhension qu'exigent les objets mathématiques suppose de la part des élèves un important travail d'appropriation. Citons Gilles Gaston Granger :

« Sur le plan philosophique, la première interrogation sur le statut des objets en tant que visés par une connaissance concerne leur représentation dans un langage . Que signifie le privilège accordé aux noms dans tout symbolisme, comment s'expriment et se distinguent l'existence et la possibilité d'objets de pensée ?
Dans le prolongement de cette problématique, on conçoit qu'il faille examiner la notion d'objet en tant qu'elle se différencie selon les types de connaissances et l'on rencontre tout aussitôt le cas des objets mathématiques. Quel est leur degré d'indépendance à l'égard du symbolisme où ils sont construits, et à l'égard de l'empirie à quoi on les applique avec succès ? En quel sens ont-ils pu être assimilés à des « essences » immuables et autonomes ? »

Sans aller jusqu'à pénétrer dans un domaine fort complexe, qu'explore Raymond DUVAL dans le cadre d'une étude sur l'objet mathématique depuis Kant et Descartes jusqu'à maintenant, nous pouvons jeter un coup d'oeil sur des aspects épistémologiques inscrits depuis la nuit des temps dans l'évolution de la mathématique. Pour nos présents propos, ce sont les aspects les plus importants.

2 Des objets communs aux objets mathématiques



cos (x)

canard	**carré**	**cosinus**	← Les trois types d'objets dont les
objet physique	objet culturel	objet mathématique	études mathématiques traitent

Figure 2

Sur la figure 2, présentés par l'image suivie d'une description succincte, apparaissent les trois types d'objets qui sont pris en compte par des études mathématiques. Le discours ne se limite évidemment pas à ces *objets*, il a par exemple les siens propres, tels les connecteurs

[2]© 1996 Encyclopædia Universalis France S.A.Tous droits de propriété intellectuelle et industrielle réservés.

propositionnels ou logiques, tant qu'il sont considérés uniquement comme des outils et non comme des objets sur lesquels portent des traitements. Précisons que ce sont *les objets d'étude* et non pas les *objets de discours* qui retiennent ici prioritairement notre attention.

Les objets usuels ou physiques

Pour ce premier type, le classique *triangle signifiant-signifié-référent* de la sémiologie fonctionne parfaitement bien : tout canard rencontré représente parfaitement l'*objet* « canard ».

Les objets culturels

Cette fois, aucun objet réel ne représente parfaitement un carré. *L'ensemble des triangles sémantiques* liés à divers objets (carrelages, cases d'un échiquier, papier quadrillé...) produit le carré comme résultat d'une *approche*, par sélection des caractéristiques considérées comme pertinentes et élimination des autres propriétés.

Les objets mathématiques

Un objet mathématique doit son existence à des changements de registres d'expression, au minimum de deux d'entre eux, parmi ceux dont on dispose couramment : registre de la langue naturelle, registre algébrique, registre figural-géométrique et registre fonctionnel-graphique.
Par exemple, pour définir le cosinus d'un angle aigu, on considère un triangle ABC rectangle en A ayant en B l'angle aigu voulu et on écrit :

$$\cos \hat{B} = \frac{BA}{BC}.$$

Ce faisant, on a relié le registre de l'écriture algébrique avec celui des figures géométriques.
Pour ce type d'objets, la construction du sens provient à la fois :
- des *traitements* internes à chaque registre mis en jeu,
- des *échanges entre les registres* (cercle trigonométrique et écriture algébrique du cosinus, angles aigus d'un triangle rectangle et écriture algébrique, écriture algébrique et représentation graphique de fonction...), ces échanges étant nommés *conversions* pour bien faire la distinction avec les traitements.

Pour le substituer dans un tel cas au triangle sémiotique, Raymond Duval[3] (cf. pp. 65 à 70) propose un schéma de fonctionnement entre deux registres, centré sur la fonction d'objectivation. C'est lui que nous présentons ci-dessous, à une modification spatiale près, consistant à placer les *représentants* de registres dans un plan, auquel le *représenté* n'appartient pas. L'intérêt du schéma ainsi présenté est de s'adapter aux cas de mise en œuvre de plusieurs registres, sans autre modification qu'un enrichissement du contenu du plan des représentants (un exemple en sera vu, sur les fractions).

[3]Raymond DUVAL, 1995, *Sémiosis et Pensée Humaine*, Peter Lang, CH - Bern

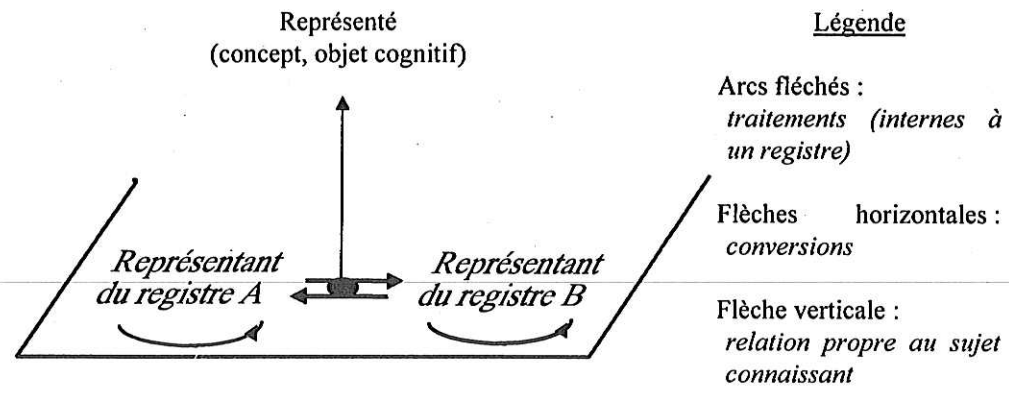


Figure 3

Un tel schéma est réellement opératoire : nous en rapportons ici un exemple d'utilisation à l'école, dans une classe du cycle des approfondissements (élèves d'âge normal 9 à 10 ans), à propos du sens d'un nombre rationnel. Auparavant, il vaut la peine de préciser des difficultés que l'on peut s'attendre à rencontrer dans une classe "standard", de telle sorte qu'apparaisse clairement la situation qui se présente quand on s'appuie sur du travail :

- à support écrit,
- direct, c'est-à-dire sans obligation pour les élèves de mobiliser des connaissances relatives à leur environnement extra-scolaire.

Exemple de la « figure » $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$.

Il ne s'agit pas ici de faire une présentation didactique complète des nombres rationnels, qui dépasserait l'objectif de cet article. Deux aspects nous intéressent plus particulièrement : la « figure » formée par l'écriture usuelle des fractions et les registres d'expression impliqués par leur acquisition.

C'est la présentation aujourd'hui habituelle des fractions, avec sa barre horizontale (le *trait de fraction*), qui introduit la dimension 2 dans l'écriture. Une telle présentation ne constituait pas une nécessité stricte, comme on peut le constater en utilisant un logiciel de calcul formel qui propose un trait incliné ; elle s'est pourtant imposée en raison de son caractère commode à l'emploi et de la facilité de vision procurée, bien plus grande que celle qui résulte de la chaîne d'écriture linéaire. Pour l'acquisition des traitements liés à la proportionnalité, tout cela joue un rôle important. Le tableau qui suit présente les points forts du long processus d'enseignement-apprentissage de ce domaine.

Avatars de $\frac{a}{b}$

Problématique	Registres et cadres théoriques
Écriture (limitée) des Égyptiens (1/n et 2/3)	Écriture
Fraction et commensuration (p. ex. trois quarts et un quart de trois)	Géométrie de dimensions 1 et 2
Simplification d'une fraction	Algèbre et arithmétique (Euclide, Gauss)
Nombres irrationnels	Logique : raisonnement par l'absurde, ou algorithme d'Euclide *ad infinitum*
Fractions continues (pouvant être rencontrées à l'occasion d'activités, mais ne figurant pas au programme du collège)	Algorithmique
...	...

On pourrait être surpris de ne pas voir dans le tableau ni la comparaison de fractions ni d'opérations qui mélangent l'écriture et l'arithmétique (multiples, diviseurs). C'est que le tableau est construit à partir de la considération des traitements d'une fraction. Si l'on considère les problèmes impliquant plusieurs fractions, la connaissance qui s'appliquera à chaque fraction est l'équivalence, dont la présentation sous forme d'égalité est

$$\frac{a}{b} = \frac{\lambda a}{\lambda b}.$$

Au passage, on notera que cette présentation est d'usage récent. Ainsi, rencontrait-on dans l'Encyclopédie de Diderot l'écriture

$$a : b :: \lambda a : \lambda b,$$

qui se lisait « a est à b comme λa est à λb ». Tout cela montre clairement qu'il y a un problème de formation d'un système sémiotique dans le processus de constitution du sens des nombres rationnels.

Sans même faire intervenir les éléments qu'apportent les traitements numériques des ordinateurs (notamment les logiciels du type tableur), le réseau de traitements et conversions qui jouent dans la construction du sens d'un rationnel donné (l'exemple choisi pour illustration est 3/4) se présente comme suit. Il faut voir ce réseau dans un plan, comme sur la figure 3, donnant son sens à une fraction, qui n'appartient pas, elle, à ce plan.

« Un nombre rationnel »

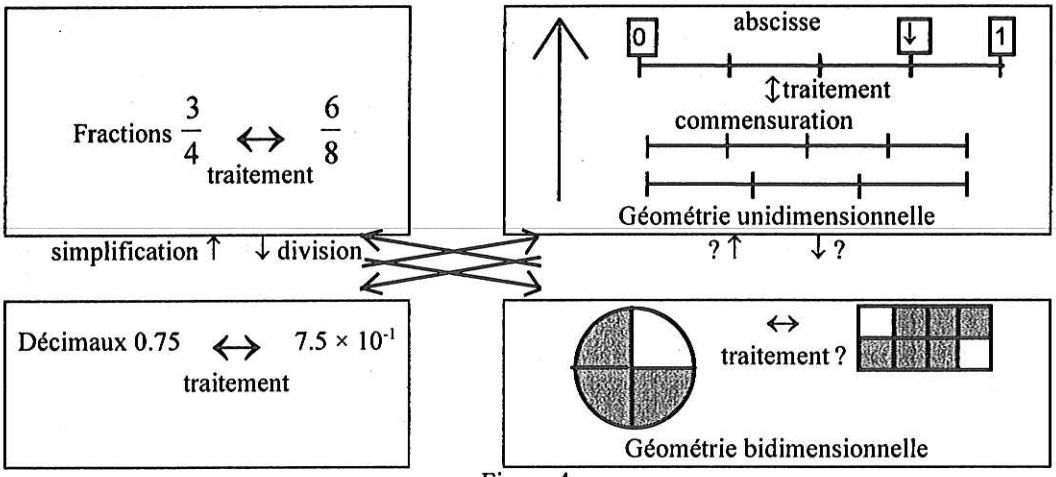


Figure 4

A la vision de la figure 4, le lecteur connaisseur des programmes de l'enseignement du premier degré imaginera des exercices qui auront déjà leur place à l'école élémentaire et sur lesquels certaines études didactiques, en France ou à l'étranger[4], se sont appuyées. Mais il se rendra certainement compte également que la quasi totalité des élèves risque de ne pas rencontrer, durant le déroulement de toute sa scolarité, la panoplie complète des tâches qui figurent dans cette figure. Ainsi, le traitement de transformation d'une détermination d'abscisse en une commensuration ne se rencontre pratiquement dans aucun manuel scolaire. Un intérêt de la figure est précisément d'attirer l'attention sur la diversité des activités qui peuvent être sollicitées dans le domaine. Les schémas que présente la figure 4 peuvent aussi aider à interpréter l'ensembles des réponses, fausses et correctes, fournies sur une interrogation donnée par un élève donné. Même une observation rapide en classe (d'une durée comprise entre une heure et quelques séquences scolaires) permet de voir les différences considérables séparant des activités qu'un examen superficiel pourrait conduire à estimer proches.

3 Une application à l'école élémentaire

Dans une classe à deux niveaux (CE2 et CM1, élèves âgés en principe de 9 à 10 ans) d'une école en milieu rural des environs de Strasbourg, en se consacrant au niveau CM1, nous avons conduit une observation en appui de la recherche menée par Robert Adjiage, professeur à

[4]Olimpia FIGUERAS MOURUT de M., 1996, *Juntando partes ; hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto*, actas del XX aniversario del Departamento de Matemática Educativa, Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica, México

l'IUFM d'Alsace, sur l'introduction du calcul fractionnaire avec recours à l'outil informatique pour du travail sur les graduations. Dans le cas présent, eu égard à la durée réduite souhaitée pour l'expérience, l'outil informatique n'a pas été sollicité. En revanche, la dimension (1, 2 ou 3) support des figures présentées, nous avait paru mériter être dès le début dans notre collimateur. C'est avec ces objectifs qu'a été construit un travail en quatre séquences scolaires, à la suite duquel a été passé un questionnaire d'évaluation, le tout ayant eu lieu au mois de mars 1998 avec le concours du professeur de la classe, Maurice Dontenville.

Séquence 1

- **Introduction :** pratique d'une mesure corporelle (référence au pouce de chaque élève), nécessité d'une unité commune, présentation du pouce et du pied anglais (point de vue historique et actualité - cas de l'aviation).
- **Fractionnement et reports :** pratique d'une mesure (la longueur de la table de classe de chacun) à l'aide d'une bande de papier de longueur 1 pied (c'est 30,48 cm), à subdiviser en 12 pouces si nécessaire ; la mise en commun est effectuée dans un tableau "plus que - moins que".

Documents remis aux élèves (4 pages) : extraits du Quid actuel (articles sur les mesures anglaises et le système métrique), du Larousse 1922 et du Meyers Konversationslexikon de 1908 (articles sur Jean-Charles Borda, un des « installateurs » du système métrique).

Séquence 2

Reprise des notions de la séquence 1 : vocabulaire (*un demi, un tiers, un quart* puis formulation régulière lorsque le dénominateur est au moins égal à 5, comme pour *un cinquième*) et écritures

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$... et $\frac{2}{3}$...

Séquence 3

- **Manipulation de volumes avec du miel :** remplir une bouteille d'un litre d'eau en utilisant un pot de 500 grammes de miel (il se trouve que la capacité d'un tel pot est de 1/3 de litre). La coïncidence entre 3 kg et 2 l est excellente, mais pour une bonne précision lors de la manipulation, le tracé d'un trait repère, qui n'avait pas été fait dans notre expérience, ne serait pas inutile.
- **Exercices de mise en oeuvre :** Résolution de questions associées à la manipulation effectuée (deux fois un tiers, c'est aussi un tiers de deux), en gardant la présence de l'unité **u** dans une

écriture à laquelle on n'a pas déjà donné sa forme mathématique totalement réduite (exemple d'écriture transitionnelle utilisée : « $3 \times \frac{1}{4} u = \frac{1}{4}$ de 3u »).

Séquence 4

Exercices extraits du manuel : pour ces exercices, des bandes et des surfaces ont été utilisées ; le contenu des exercices a porté en particulier sur les heures et coloriage de secteurs angulaires, en correspondance notamment avec le quart d'heure, la demi-heure.

Évaluation

Le questionnaire présenté aux élèves a été volontairement limité à une page, pour que l'ensemble des réponses reste en vue tout au long de la passation. Il est constitué de six questions (voir en fin de cet article l'annexe reproduisant le questionnaire), qui font intervenir les aspects qui ont déjà été mentionnés et que des études didactiques déjà menées par différents chercheurs conduisent à voir comme jouant un rôle. Voici les résultats obtenus parmi les 18 élèves constituant la population CM1 interrogée dans la classe mixte CE2 & CM1. On notera l'écart considérable qui sépare les réussites importantes aux questions 1 et 3, à support imagé bidimensionnel, des échecs quasi généraux à des questions comme 2, 4 ou 5, à support imagé uni ou tridimensionnel. Une explication d'un tel phénomène fait intervenir les traitements internes à un registre d'expression et les conversions entre registres ; l'étude de Robert Adjiage à paraître prochainement l'abordera en détails.

Question 1 : 15 réussites (et donc 3 échecs).

Question 2 : Respectivement 9, 7, 7, 5 et 4 réussites pour les fractions à attribuer aux flèches successives de gauche à droite.

Question 3 : 14 réussites.

Question 4 : 2 (deux) semi-réussites, « n'oubliant » que les 3kg de masse à vide, et, parmi les échecs, 11 réponses *11 kg.*

Question 5 : 3 réussites et, parmi les échecs, 9 correspondant au tracé d'un trait droit (donc ne respectant pas la perspective, qui avait été pourtant été présentée dans cette classe).

Question 6 : pas de réussite complète (qui demande la représentation de l'unité à côté du dessin, ou une indication de valeurs sur le dessin), mais 9 réponses présentant 7 unités que les élèves voient alors, sans penser à la nécessité de le dire, chacune comme un *quart.*

4 Pistes pour des travaux dirigés sur tableur

Afin de compléter le panorama présenté, nous envisageons les caractéristiques de situations favorables à du travail encadré des élèves sur des tableurs. Une réflexion similaire vaut pour des logiciels de calcul symbolique et formel. Une partie de ces quelques réflexions a été rédigée pour le Groupe Technique Disciplinaire de Mathématique, afin de contribuer aux documents d'accompagnement des programmes de la classe de troisième (élèves de 15 ans).

Dans les classes antérieures à la troisième, le calcul numérique est le point de départ pour le calcul littéral, puis devient en quelque sorte sa matière première. Par exemple, on apprend à distinguer une identité et une équation grâce à la substitution de valeurs numériques aux lettres représentant des variables. En classe de troisième, une modification de caractère fondamental s'introduit avec l'imbrication totale du calcul numérique et du calcul littéral. C'est, par exemple, du traitement des variables que l'on s'inspire pour les calculs mettant en jeu des racines carrées. Autrefois, les machines ne permettaient que du calcul approché dans certains cas (fractions non décimales, radicaux par exemple), mais aujourd'hui, les logiciels de calcul symbolique et formel sont accessibles désormais aux collégiens dans certaines calculatrices de poche. Pourvu que l'on ait bien choisi l'écriture à utiliser pour les nombres, ce que l'on appelle encore leur *format*, on peut par exemple obtenir en lecture directe de l'affichage d'une calculatrice une égalité du genre :

$$\frac{1}{666} - \frac{1}{999} = \frac{1}{1998}.$$

<u>*Un escalier de fractions égyptiennes*</u> (exercice extrait d'un manuel de l'IREM de Strasbourg).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	1										
2	1/2	1/2									
3	1/3	1/6	1/3								
4	1/4	1/12	1/12	1/4							
5	1/5	1/20	1/30	1/20	1/5						
6	1/6	1/30	1/60	1/60	1/30	1/6					
7	1/7	1/42	1/105	1/140	1/105	1/42	1/7				
8	1/8	1/56	1/168	1/280	1/280	1/168	1/56	1/8			
9	1/9	1/72	1/252	1/504	1/630	1/504	1/252	1/72	1/9		
10	1/10	1/90	1/360	1/840	1/1260	1/1260	1/840	1/360	1/90	1/10	
11	1/11	1/110	1/495	1/1320	1/2310	1/2772	1/2310	1/1320	1/495	1/110	1/11

Dans la colonne A du tableau, on trouve les entiers successifs, dans la colonne B, leurs inverses. A partir de la colonne C, toute cellule du tableau s'obtient en retranchant le contenu de sa voisine de gauche du contenu de celle qui est au-dessus (exemples : pour remplir la cellule C2, on retranche le contenu de B2 de celui de B1, pour remplir C3, on retranche le contenu de B3 de celui de B2).

L'écriture égyptienne pour les fractions était limitative : elle utilisait exclusivement les inverses des entiers (fractions de la forme 1/n) et le nombre 2/3. Ainsi devait-on garder pour une fraction comme 3/4 une présentation composite dont l'écriture actuelle serait de la forme $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. « L'escalier » de fractions présenté fait, quant à lui, apparaître des fractions qui ont toutes pour numérateur 1, ce qui explique l'expression de *fractions égyptiennes* utilisée dans l'intitulé.

De la construction d'un tel escalier sur un tableur (niveau du collège) jusqu'à la preuve que les fractions obtenues ont forcément, après simplification, un numérateur égal à 1 (niveau du lycée), il y a un ensemble très complet d'activités portant principalement, en définitive, sur la notion de variable. L'introduction de variables peut aujourd'hui être beaucoup plus graduelle et plus diversifiée qu'avant l'utilisation de l'ordinateur.

Par exemple, dans le cas de notre tableau, la première colonne peut avoir été obtenue de deux façons :

- en introduisant de haut en bas les entiers successifs (ici de 1 à 11),
- en introduisant 1 dans la première cellule, puis « = *[A1]* + *1* » dans la cellule en dessous, étant entendu que *[A1]* s'obtient soit en tapant A1, soit en attrapant par clic sur la souris le contenu de la première cellule, et en utilisant les commandes copier-coller pour faire passer l'information de la deuxième cellule aux cellules inférieures (jusqu'à A11).

Nous voyons que la deuxième méthode, pour plus compliquée qu'elle soit à décrire que la première, qui était a priori beaucoup plus naturelle, est en définitive à la fois la plus simple et la plus performante.

Pour la seconde colonne, où l'on peut introduire en B1 l'inverse 1/A1 avant de copier dans les autres cellules, et pour les autres colonnes, pour lesquelles on peut copier ce qui aura été introduit en C2, c'est à dire « = B1 - B2 », il convient d'être attentif au *format* des nombres, dont nous parlions à propos de l'exemple présenté avant l'escalier de fractions. Quand, par exemple, on choisit pour le contenu des cellules le format *décimal à trois chiffres après le point décimal*, voici comment se présentent les sept premières lignes du tableau.

1	1.000						
2	0.500	0.500					
3	0.333	0.167	0.333				
4	0.250	0.083	0.083	0.250			
5	0.200	0.050	0.033	0.050	0.200		
6	0.167	0.033	0.017	.0.017	0.033	0.167	
7	0.143	0.024	0.010	0.007	0.010	0.024	0.143

Commentaires en guise de conclusion

Deux tendances opposées attirent le professeur dans son activité d'enseignement :

- l'enseignement de masse l'incite à être attentif à toutes les compétences d'élèves bien différents, donc à n'aller ni trop loin, ni trop vite,
- le développement des T.I.C. (techniques d'information et de communication, généralisation actuelle de l'informatique) le pousse à utiliser la richesse, la simplicité et la convivialité des outils actuels, même lorsque ceux-ci mobilisent (sans que l'utilisateur en soit nécessairement informé) une mathématique déjà avancée.

Dans ces conditions, quelles nouveautés introduire avec succès dans une classe ? Qu'est ce qui est en définitive trop complexe, trop subtil ou trop particulier pour nos élèves ? L'intérêt du recours à de nouvelles formes d'expression justifie-t-il des économies, c'est à dire des suppressions de telle ou telle pratique ?

Un objectif de la didactique est précisément de répondre à de telles interrogations. En particulier, la théorie des registres d'expression permet de remplacer l'accumulation de savoirs étrangers les uns avec les autres par une aide réciproque des uns par les autres. Une condition est une pratique suffisante, en temps certes, mais surtout en nombre et variété des tâches de traitements et de conversions de registres suscitées par les exercices.

Bibliographie

Raymond DUVAL, 1993, *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, pp. 37-65, IREM de Strasbourg, France

Raymond DUVAL, 1995, *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuel,* Peter Lang, Suisse.

Olimpia FIGUERAS MOURUT de M., 1996, *Juntando partes ; hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto*, actas del XX aniversario del Departamento de Matemática Educativa, Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica, México

Eugenio FILLOY, 1996, *El teorema de Tales ; significado y sentido en un sistema matemático de signos*, actas del XX aniversario del Departamento de Matemática Educativa, Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica, México

Gilles Gaston GRANGER, 1996, *Objet*, Encyclopedia Universalis France

Fernando HITT, 1996, *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*, actas del XX aniversario del Departamento de Matemática Educativa, Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica, México

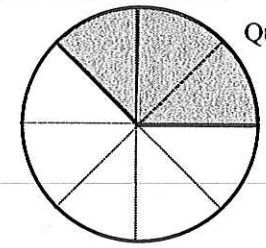
François PLUVINAGE, 1996, *Diferentes formas de razonamiento matemático*, actas del XX aniversario del Departamento de Matemática Educativa, Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica, México

LA NATURE DES OBJETS MATHEMATIQUES DANS LE RAISONNEMENT

NOM : ..... **Date :**.....

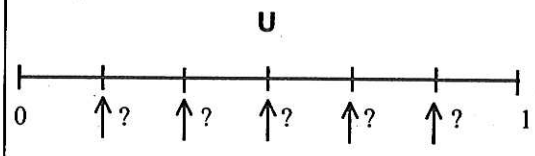
Prénom : .....

1 Un disque fractionné



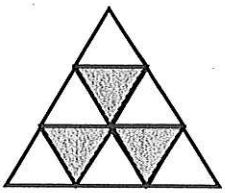
Quelle fraction est grisée ?

2 Une unité fractionnée



A chaque flèche ci-dessus, attribuer sa fraction.

3 Un triangle fractionné



Quelle fraction est grisée ?

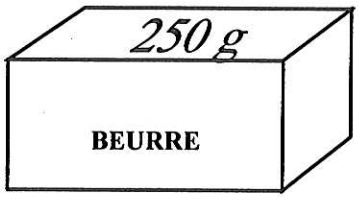
4 Le bidon

Ce gros bidon contient 10 litres et a une masse à vide de 3 kg.

Quelle sera la masse du bidon rempli de miel ?

*

5 Du beurre à couper



Comment t'y prendras-tu pour couper 50 g de beurre dans cette plaquette ?

6 Représentation d'une fraction

Fais le dessin que tu veux pour représenter $\frac{7}{4}$.

ton dessin

* *La masse de 2 l de miel est 3 kg (voir p.132).*

Annexe : le questionnaire présenté aux élèves de CM1

SIGNE ET OBJET (I)

TROIS GRANDES ÉTAPES DANS LA PROBLÉMATIQUE DES RAPPORTS ENTRE REPRÉSENTATION ET OBJET

Raymond DUVAL

Sign and object are two key ideas in order to analyse mathematical knowledge acquisition. The idea of sign cannot be considered like that of a simple notation, it is a representation changing according to the semiotic system which is used. The idea of object cannot be considered like that of thing, it is the conscious invariant meaning in relation to changing form and content semiotic representation. These two ideas are closely connected.

In the first paper we examine how the semiotic nature of representation has grown with the development of mathematical knowledge. We distinguish three great historical stages in this evolution of relations between representation and objet. In each stage there is a new way for analysing the content of representation in relation to objects. There is also a new determination of the cognitive process producing representations.

La notion d'objet est une notion que l'on ne peut pas ne pas utiliser dès que l'on s'interroge sur la nature, sur les conditions de validité ou sur la valeur des connaissances. Ainsi parle-t-on plus souvent d'objets mathématiques que de concepts mathématiques, car ce sont des objets que l'on étudie en mathématiques et non pas des concepts. D'ailleurs on insiste inconditionnellement sur la nécessité de ne jamais confondre un objet et sa représentation, même si ce sont des représentations que l'on présente explicitement et même si les représentations présentées peuvent à leur tour être traitées comme des objets ! Mais dès qu'il s'agit d'analyser le développement des connaissances ou les mécanismes de leur acquisition par des élèves, ce n'est plus cette notion qui est retenue, mais celles de «concept», de «conception», de «représentation» (du sujet), ou encore celles d'«opération» ou de «processus»... La notion d'objet semble alors considérée comme une notion seconde par rapport à ces notions, et comme une notion voisine de celle de «chose»[1], voire interchangeable avec elle pour les niveaux les plus élémentaires de la formation, bien qu'elle n'en présente pas les mêmes déterminations. Pourquoi un telle marginalisation lorsqu'il s'agit d'analyser les connaissances dans une perseptive d'apprentissage ? Et ne crée-elle pas un handicap pour la compréhension des problèmes d'apprentissage, particulièrement en mathématiques ?

A travers ce contraste entre le caractère fondamental de la notion d'objet et son caractère

[1] Une chose est une partie de la réalité qui présente les trois caractéristiques suivantes : tridimensionnalité (d'où le fait que les solides soient les exemples-types de choses), accessibilité sensorielle multimodale (par la vue et par le toucher ou la préhension et par l'audition...) indépendante des représentations sémiotiques, et séparabilité matérielle des autres parties de la réalité (ainsi les couleurs dont on connaît la difficulté d'en faire faire la discrimination et d'en faire apprendre le langage par les enfants - car elles échappent à toute monstration- ne sont pas des choses bien qu'elles soient immédiatement perceptibles (Aristote, *Métaphysique* Z)).

©
Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
6 (1998) (p. 139-163) - IREM de Strasbourg

secondaire en fonction des préoccupations, c'est tout le problème de l'analyse même des connaissances mathématiques et scientifiques qui est posé. L'opposition, récurrente en didactique, entre approche épistémologique et approche psychologique, et le débat sur l'importance de leurs apports respectifs dans l'étude de l'acquisisiton des savoirs sont symptomatiques de ce contraste (Noirfalise et Perrin-Glorian 1995). Elle oblige à s'interroger sur tous les problèmes théoriques et méthodologiques que soulève l'analyse de l'activité de connaissance, dès que celle-ci se veut commandée par une exigence scientifique qui en détermine le fonctionnement et qui en contrôle les démarches. En particulier les questions suivantes deviennent essentielles pour savoir ce que vaut une analyse des connaisances et quelles peuvent en être les conséquences pertinentes pour des choix d'enseignement ou pour l'organisation de conditions d'apprentissage. Quelles sont les notions absolument nécessaires pour pouvoir mener l'analyse des connaissances mathématiques et scientifiques ? Dans quel cadre théorique ces notions peuvent-elles être précisées, devenir compatibles entre elles et opératoires ? Quels domaines de phénomènes une modélisation de l'activité de connaissance doit elle prendre en compte, si l'on veut comprendre l'acquisition, par des individus, de connaissances mathématiques et scientifiques, c'est-à-dire de connaissances qui résultent d'un travail d'acquisition, historiquement discontinu, et de processus complexes de sédimentation culturelle ? Ce sont ces questions essentielles pour toute analyse de la connaissance que nous allons aborder dans les deux articles qui suivent.

Deux idées directrices vont nous permettre de progresser dans l'élucidation de ces questions vastes et complexes.

Les notions d'objet et de représentation sémiotique, ou plus exactement les relations entre objet et représentation sémiotique, sont les notions centrales pour toute analyse de la connaissance, aussi bien mathématique que scientifique : elles constituent comme deux entrées différentes pour analyser les connaissances Dans *Sémiosis et pensée humaine* (Duval 1995) nous les avions prises comme des notions primitives et évidentes, alors que leur emploi peut être délicat et que leur extension est difficile à cerner. De récentes publications sur la notion d'objet sont là pour en témoigner (Granger 1994). Et surtout la notion de représentation sémiotique apparaît comme la fusion de deux notions que l'on est habitué à opposer, celle de représentation et celle de signe. Le premier article est donc consacré à ces deux notions : que recouvrent-elles et pourquoi sont-elles centrales dans l'analyse de la connaissance ? Nous allons montrer qu'elles sont devenues centrales avec le développement considérable des connaissances mathématiques et scientifiques survenu ces trois derniers siècles. Non seulement la notion de représentation s'est alors imposée, mais elle s'est radicalement transformée en même temps que les méthodes d'analyse du rapport des représentations aux objets représentés : le caractère fondamentalement sémiotique des représentations est apparu de plus en plus clairement dans la mesure où le développement des systèmes de représentation sémiotique devenait un facteur intrinsèque du progrès des connaissances. Ce sont les principales étapes de cette transformation que nous allons décrire dans le premier article.

L'analyse de l'activité de connaissance peut être faite de trois points de vue différents : un point de vue scientifique, un point de vue cognitif et un point de vue de vue phénoménologique. Ces trois points de vue correspondent chacun à un choix différent de centration sur l'un des aspects de la relation sujet-objet. Chaque point de vue est indépendant des deux autres. Mais si l'on veut comprendre les conditions de l'acquisition des «connaissances» scientifiques et, plus particulièrement, celles des connaissances mathématiques, ces trois points de vue doivent être pris en compte. C'est ce qui rend si

complexe une analyse de la connaissance, scientifique ou mathématique, conduite dans le but de dégager les conditions de son acquisition par de jeunes élèves : comment ces trois points de vue peuvent-ils s'articuler pour permettre une analyse pertinente des processus d'acquisition des connaissances par les élèves ? L'articulation des trois points de vue ne peut se faire qu'autour de ce qu'on appelle d'une part des «objets» et d'autre part les représentations sémiotiques. En effet, le problème fondamental de l'acquisition des connaissances est celui de l'accessibilité des objets de connaissance : par l'invention de quels moyens, ou par quels processus d'appropriation des moyens inventés, des objets qui étaient inconcevables ou inaccessibles à un moment donné ont-ils pu devenir ensuite accessibles ? C'est la même question aussi bien au plan de l'histoire des sciences et des mathématiques qu'à celui, individuel, des apprentissages. Mais ce ne sont pas les mêmes réponses, car les systèmes de fonctionnement à prendre en compte pour le progrès des sciences et pour l'apprentissage en formation initiale ne sont pas les mêmes. C'est pourquoi les conditions d'accessibilité aux objets et celles de la constitution des moyens de leur accessibilité ne renvoient pas aux mêmes processus et doivent répondre à des critères ou à des exigences spécifiques selon le point de vue que l'on retient. C'est à la distinction et à l'articulation, nécessaires, de ces trois points de vue dans l'analyse de la connaissance que le deuxième article est consacré.

Dans chacun de ces trois points de vue nous retrouverons la notion de représentation sémiotique comme un élément clé de la connaissance, mais y jouant des rôles différents. Nous devrons cependant ajouter une troisième notion, peu pertinente d'un strict point de vue scientifique, celle d'«architecture fonctionnelle» de systèmes cognitifs et sémiotiques. Car c'est seulement par rapport à une «architecture fonctionnelle» que la notion d'opération (communément utilisée dans toutes les analyses de la connaissance) peut être utilisée de façon pertinente. On ne peut pas parler d'opération sans la référer au fonctionnement d'un système déterminé: il y a ainsi des opérations cognitives sémiotiques et des opérations cognitives non sémiotiques, les unes n'étant pas subordonnables aux autres.

Pour faciliter la lecture de ces deux articles, nous avons introduit au début de chaque un tableau qui donne une vue synoptique des objets traités, des points de vue sous lesquels ils sont envisagés et des relations que nous explicitons entre ces objets. Le texte peut donc être lu comme un commentaire du tableau.

&&&
&&
&

La première question qui se pose lorsqu'il s'agit de suivre l'évolution des problématiques concernant les rapports entre représentation et objet, est celle de la périodisation. Si l'on prend comme repères les oeuvres qui ont marqué des étapes importantes dans l'analyse de la constitution de connaissances, des *Regulae* de Descartes (1628) jusqu'aux démonstrations des deux théorèmes d'incomplétude de Gödel (1931) et, surtout, la décomposition, par Turing (1936), de tout processus logique en procédures élémentaires exécutables par une machine, trois grandes périodes peuvent être nettement distinguées.

Durant la première période les processus de pensée sont envisagés comme des processus purement mentaux. La première caractéristique de cette approche mentaliste des démarches de pensée est **un lien étroit entre les représentations, qui sont les représentations du sujet, et les objets.** Pour déterminer le caractère scientifique d'une connaissance il devient alors

essentiel de **rechercher l'origine des représentations** : proviennent-elles du sujet ou de l'objet lui-même ? Pour déterminer dans quelle mesure le sujet et l'objet interviennent comme facteurs dans l'origine des représentations, on recourt alors au principe de causalité. Durant toute cette période **le rapport des représentations aux objets est analysé en termes de causalité.** Nous présenterons la problématique que Descartes a exposé dans la troisième des *Méditations métaphysiques* et celle de Kant. Les thèses de la *Critique de la Raison pure* sont importantes car elles ont servi en quelque sorte de tremplin, au développement de la réflexion mathématique sur les fondements pour tout le XIXème siècle et elles préfigurent les problématiques cognitives.

Durant la seconde période les processus de pensée sont de plus en plus étroitement associés à des manipulations contrôlables de signes. On reconnaît alors **une rupture entre les représentations, le sujet et les objets.** Cette rupture conduit à séparer les représentations mentales du sujet et les représentations sémiotiques, dont le fonctionnement ne dépend pas de l'activité du sujet et qui sont les seules pertinentes pour la connaissances scientifique. **Le rapport des représentations aux objets** n'est plus analysé en termes de causalité mais **en termes de référence.** Toute cette période est celle du développement conjoint de la logique mathématique et d'une réflexion sur les fondements des mathématiques en tant que celles-ci se constituent par la démonstration. La recherche est alors celle d'une adéquation entre les objets et le discours sur les objets. Elle a conduit à construire des systèmes sémiotiques spécifiques (idéographie, notations logiques d'une langue formelle) autres que celui des langues naturelles. Elle a conduit également à s'interroger sur les rapports entre l'utilisation de la langue naturelle et celle de langues formelles ainsi que sur le rôle des signes dans le fonctionnement de la pensée. Nous présenterons les problématiques de Bolzano et de Frege, les deux grands précurseurs dans cette recherche qui a conduit à l'émergence des axiomatiques de structure et à celle des problèmes de décision (Hilbert 1928).

La troisième période survient avec la **rupture entre les représentations sémiotiques et les objets** : il y a un primat formel des signes et de leurs organisations sur les contenus de connaissance. En effet, l'idée s'impose qu'il n'y a pas de signe en dehors d'un système de signes et surtout qu'un système sémiotique est un système de traitement d'information, et pas seulement un moyen de communication : il permet des créations de sens par delà les vécus phénoménologiques du sujet et par delà l'expérience apparemment directe qu'il peut avoir de certains objets. **Les systèmes sémiotiques deviennent des «systèmes de production» d'information ou de sens. Le rapport des représentations aux objets** n'est plus analysé en termes de référence mais **en termes d'interprétation :** les objets apparaissent comme des interprétations possibles d'organisations sémiotiques considérées comme des modèles. Dans cette perspective, une catégorie particulière de représentations sémiotiques est mise en avant, celles qui permettent des traitements analysables en termes de «calculabilité». Mais la problématique de cette période est plus large, elle concerne tous les systèmes sémiotiques, que leur fonctionnement ait ou non cette propriété de calculabilité. Elle a surgi de façon indépendante dans des domaines très différents. D'une part le projet d'une machine universelle à manipuler des symboles, de Turing, et l'architecture cognitive fonctionnelle pour une machine, esquissée par von Neumann (1945), ont ouvert la voie à tous les systèmes de traitement pouvant être implémentés sur ordinateur. D'autre part, l'analyse des signes, ou plus exactement des systèmes de signes (dont la langue est le représentant le plus complexe) par Saussure a conduit à développer une approche structurale de toutes les productions culturelles humaines. C'est à la confluence de ces différents domaines que va naître ce qu'on a appelé les «sciences cognitives».

Problématiques des rapports entre représentation et objet	Analyse des représentations **dans leur rapport aux objets représentés**	Nature des représentations
De DESCARTES à KANT **Du contenu des représentations du sujet aux objets de connaissance scientifique**	Le rapport est analysé en termes **de causalité :** - *hypothèse d'une correspondance entre le contenu de la représentation et l'objet représenté* (Descartes 1641) - *recherche de l'organisation interne du sujet requise pour passer du contenu à l'objet* (Kant 1772, 1781)	Les processus de pensée sont des **processus purement MENTAUX.** Cela implique un lien étroit entre les représentations du sujet et les objets.
De BOLZANO à HILBERT (1904) **Rupture du lien sujet-objet:** accessibilité de l'objet **par invariance de référence** de plusieurs représentations sémiotiques	Le rapport est analysé en termes **de référence** - *méthode des variations par substitution limitée à la langue* (Bolzano 1837: annonce l'analyse structurale) - analyse du *mécanisme d'expansion discursive dans les écritures symboliques* et généralisation à la langue naturelle (Frege 1892)	La proposition étant prise comme unité de base de toute discursivité, les représentations **SÉMIOTIQUES** sont séparées des représentations metnales.
De HILBERT (1922) à TURING et à VON NEUMANN **Rupture du lien signe-objet:** dualisme des signes et des objets comme domaine d'application. **Primat** des organisations de signes sur les contenus de connaissance.	Le rapport est analysé en termes **d'interprétation** - *substitution de la notion d'ensemble à celle d'intuition a priori* de l'espace et du temps (1873-1899) - les *arrangements de signes promus au statut d'objets* (Hilbert 1922) et la machine de Turing (1937) - machine avec une *architecture fonctionnelle* différenciant le rôle des representations (von Neumann 1945)	Les **SYSTÈMES sémiotiques** comme des**«SYSTÈMES DE PRODUCTION»** d'information ou de sens. Privilège aux représentations sémiotiques permettant des traitements analysables en termes de **«calculabilité»**

1. Du contenu des représentations du sujet aux objets de connaissance scientifique : les conditions d'un passage

> Le mot *représentation* est bien compris et employé avec confiance, bien que sa signification ne puisse jamais être explicitée par une définition
> Kant *L'unique fondement possible d'une démonstration de l'existence de Dieu*

L'analyse des représentations a commencé dès que l'on s'est interrogé sur les conditions de validité de la connaissance et que l'on a découvert que toute connaissance est inséparable d'une activité de représentation. La troisième des *Meditationes Metaphysicae* de Descartes est le premier texte où la problématique d'une telle analyse se trouve explicitement développée. Elle est toute entière centrée sur le contenu des représentations. Descartes propose que ce contenu soit examiné sous deux aspects à la fois[1] :

- relativement à l'objet représenté, pour décider s'il y a, ou non, correspondance entre le contenu de la représentation et l'objet représenté,

- relativement au sujet, pour savoir si le sujet peut être, ou ne peut pas être, à l'origine du contenu de la représentation.

Ces deux examens sont étroitement liés, car il s'agit de pouvoir établir des preuves d'existence pour les objets dont le sujet a des représentations. La certitude de la vérité des connaissances est à ce prix.

> J'ignore même si elles sont véritables ou fausses et seulement apparentes, c'est-à-dire si les idées que je conçois de ces qualités sont en effet les idées de quelques choses réelles, ou bien si elles ne **représentent** que des êtres chimériques, qui ne peuvent exister
>
> Descartes 1967, p.442

La démarche cartésienne d'une preuve d'existence repose alors sur le principe suivant : un objet représenté par une «idée en moi» existe, c'est-à-dire est «hors de moi» (1967, p. 434), si je ne peux pas être la seule cause du contenu de ma représentation : «l'être objectif de l'idée doit avoir une cause réelle» (1967, p.925) Deux traits vont donc caractériser cette problématique cartésienne de l'analyse des représentations.

Tout d'abord **la relation entre une représentation et son objet est analysée comme un rapport de causalité et non pas comme un rapport de référence.** Pour Descartes toute représentation est nécessairement produite soit par le sujet lui-même soit par un objet existant en dehors de lui. Analyser les représentations revient alors à déterminer si le sujet peut être la

---

[1] Descartes propose très exactement une analyse du contenu des «idées». Pour lui les «idées» relèvent d'une catégorie de pensées qui se distinguent des autres par le fait qu'elles **représentent quelque chose** : «entre mes pensées, quelques unes sont comme les images des choses, et c'est à celles-là seules que convient le nom d'idée : comme lorsque je me représente un homme, ou une chimère, ou le ciel, ou un ange, ou Dieu même...» (Descartes, 1967, p. 433). La notion cartésienne d'«idée», qui est par nature une représentation, doit être rapprochée de la notion husserlienne d'«acte objectivant» introduite pour l'analyse des contenus des vécus intentionnels (Husserl 1972, p. 289-293).

seule cause de leur contenu ou si, au contraire, il ne peut pas l'être. Dans le premier cas, aucun objet existant ne correspond au contenu de la représentation. Ou, du moins, le sujet ne peut en avoir aucune certitude. Dans le second cas il y a un objet qui non seulement est la cause réelle de la représentation mais qui correspond au contenu de cette représentation. Mais cette correspondance pouvant être plus ou moins grande selon les représentations, Descartes introduit une distinction entre cause formelle et cause éminente (Vuillemin 1962, p. 23-25). Cela lui permet de séparer deux catégories de représentations, celles où la correspondance entre le contenu de la représentation et l'objet représenté est en quelque sorte complète et celles où le contenu de la représentation est déficient par rapport à l'objet représenté :

> Tout ce que nous concevons comme étant les objets des idées, tout cela est objectivement, ou par représentation, dans les idées mêmes. Les mêmes choses sont dites être *formellement* dans les objets idées, quand elles sont en eux telles que nous les concevons; et elles sont dites y être *éminemment*, quand elles n'y sont pas à la vérité telles, mais qu'elles sont si grandes, qu'elles peuvent suppléer à ce défaut par leur excellence.
>
> (Descartes 1967, p. 587)

Ainsi le contenu de toute représentation d'un objet que l'on pense infini est déficient par rapport à l'objet représenté et le rapport entre celui-ci et sa représentation est un rapport de causalité éminente. Cependant cette distinction s'est révélée peu puissante puisqu'elle permet uniquement de séparer les représentations relatives à des objets métaphysiques et celles relatives à des objets mathématiques. Toutefois elle témoigne du projet, central dans la démarche cartésienne, de se donner les moyens d'une analyse systématique des représentations qui s'en tienne au seul contenu des représentations. Car le sujet ne dispose que de ce seul contenu s'offrant à sa conscience actuelle pour construire une connaissance vraie. Et cela explique le deuxième trait de cette problématique cartésienne entièrement centrée sur la détermination de l'origine du contenu des représentations.

Il n'y a **aucune séparation entre les deux «faces», subjective et objective, de la représentation**, comme cela sera le cas à partir de Bolzano et en réaction contre Kant. Cette non-séparation le conduit à prendre **la certitude** et l'évidence comme les critères (subjectifs) du caractère objectif du contenu des représentations, et donc de la vérité de la connaissance : «tout ce que nous apercevons clairement est vrai, et ainsi qu'il existe, ...» (Descartes 1967, p. 925). Notons que cet accent mis sur la certitude, et donc sur la conviction, a retrouvé une certaine actualité dans les propos sur la preuve et sur la démonstration en mathématiques. Mais notons également que cela conduit à privilégier la valeur modale des propositions énoncées et à ne pas se limiter à leur contenu, comme le montre la suite de la citation précédente : «... si nous apercevons qu'il ne puisse pas ne pas exister; ou bien qu'il peut exister, si nous apercevons que son existence soit possible». La **certitude cartésienne** se fonde sur la prise de conscience d'**une nécessité strictement logique**.

Historiquement, c'est le premier trait de la problématique cartésienne qui a d'abord soulevé des difficultés : peut-on véritablement analyser le rapport de la représentation à l'objet comme un rapport de causalité, en attribuant la valeur objective du contenu d'une représentation uniquement à ce qui ne pourrait pas résulter du sujet qui la produit ? C'est Kant qui, dans sa célèbre lettre de 1772 à Marcus Herz, a clairement formulé cette question :

> Je me demandais, en effet, sur quel fondement repose le rapport de ce qu'on nomme en nous représentation à l'objet. Si la représentation ne contient que la façon dont le *sujet* est *affecté* par l'objet, il est facile de voir comment elle lui correspond comme un effet à sa cause... De même si ce qu'on appelle en nous représentation était *actif* vis-à-vis de l'*objet*, c'est-à-dire par là même pouvait être produit... alors la conformité des représentations aux objets serait aussi intelligible... Mais notre entendement n'est pas, par

> ses représentations, la cause de l'objet pas plus que l'objet n'est cause des représentations de l'entendement... Comment donc était possible autrement une représentation qui se rapporte à un objet sans être d'aucune façon affectée par lui, voilà ce que j'avais passé sous silence.
>
> (Kant 1980, p.691-692)

Cette question va conduire Kant à effectuer deux déplacements par rapport à la problématique cartésienne.

Le premier porte sur la manière d'analyser la relation des représentations aux objets. Il ne s'agit plus de regarder le contenu des représentations pour les classer en termes de fiabilité, c'est-à-dire pour déterminer celles pour lesquelles on peut être sûr qu'il y a un objet derrière le contenu qu'elles présentent. Cela doit être exclu puisque la causalité n'est pas toujours la notion adéquate pour analyser cette relation. Il s'agit plutôt de rechercher les conditions qui rendent possibles l'accès aux objets à travers le contenu des représentations :

> De ces connaissances scientifiques, puisqu'elles sont réellement données, il **convient de se demander *comment* elles sont possibles...**
> J'appelle *transcendantale* toute connaissance qui s'occupe en général non pas des objets que de notre mode de connaissance des objets **en tant qu'il est possible.**
>
> (Kant 1980, p. 773, 777)

Le deuxième déplacement résulte du précédent et porte sur le sujet. Le sujet n'est plus considéré comme une nature intellectuelle simple[1] (appelée la pensée, la conscience...) source d'opérations transparentes et homogènes, mais comme une totalité complexe de structures très différentes (Kant les désignant comme les «éléments de la raison pure» Kant 1980 p. 780). Chercher les conditions qui rendent possibles l'accès aux objets revient alors à analyser *les structures qui constituent le sujet de manière à ce qu'il soit capable de produire des représentations scientifiquement fiables* dans le domaine des mathématiques et dans celui de la physique (nous sommes encore dans la seconde moitié du XVIIIème). C'est cette analyse qui est exposée dans la *Critique de la Raison pure*, analyse que Kant présente comme une «architectonique» de la subjectivité transcendantale, c'est-à-dire comme un système complexe de fonctionnement du «sujet épistémique», selon l'expression employée par Piaget.

> La philosophie transcendantale est l'idée d'une science dont la critique de la raison pure doit tracer le plan tout entier de façon *architectonique*,
>
> J'entends par architectonique l'art des systèmes
>
> (Kant 1980, p.778, 1384)

De ce point de vue, la philosophie transcendantale de Kant peut être considérée comme le

---

[1] Descartes identifie le sujet à la conscience immédiate de soi en tant que source de l'acte effectué maintenant. Certes, Gueroult a montré que le Cogito de Descartes n'est pas l'intuition d'un moi empirique mais l'aperception simple de son être comme nature intellectuelle (Guerout 1954, p.57-67). Cette opposition d'inspiration kantienne est trompeuse. Car le terme «empirique» fait se confondre le point de vue phénoménologique d'une analyse sémantique des vécus de la conscience et le point de vue phénoménal d'une psychologie qui se fonde sur l'observation externe. En réalité toute l'originalité de la problématique cartésienne consiste dans le fait qu'elle est à la fois épistémologique et phénoménologique. Il suffit de relire les *Méditations cartésiennes* de Husserl pour s'en convaincre. C'est seulement avec Kant que la dissociation des deux points de vue va s'opérer, ces deux points de vue se trouvant d'ailleurs déplacés respectivement vers un point de vue cognitif et un point de vue phénoménal. On peut relire Descartes à la lumière des distinctions introduites par Kant, mais cela conduit à méconnaître les déplacements considérables de problématique survenus entre ces deux démarches de pensée.

premier projet d'une approche cognitive, et non pas épistémologique, de l'acquisition des savoirs. Car elle tente de répondre à la question suivante : quelles sont les sources d'informations nécessaires et quelles sont les structures requises pour qu'un système (ici, le sujet en tant que «raison pure») puisse produire un type de réponse approprié ?

Présenter ainsi la philosophie transcendantale pourra sembler provocateur à un lecteur philosophe comme à un spécialiste d'intelligence artificielle, tellement la *Critique de la Raison pure* est éloignée de toute préoccupation d'élaboration d'un système-expert susceptible de fonctionner sur ordinateur. Mais le projet d'une «architectonique de la raison pure» annonce bien «l'architecture de la cognition» : car il s'agit bien de décrire un système capable de produire des connaissances, système qui doit nécessairement être composé de sous-systèmes remplissant chacun une fonction spécifique comme von Neumann l'indiquait en 1945 dans son *First Draft of a report on the EDVAC*. Et c'est par rapport à ce projet, à la fois en continuité et en rupture, que toute la réflexion épistémologique sur la connaissance mathématique et sur la logique s'est développée au XIXème (Couturat, 1896), réflexion qui a préparé la modélisation, au XXème, de systèmes capables de traiter formellement des symboles. Pour bien comprendre ce développement ultérieur, rappelons d'abord les deux caractéristiques spécifiques de la problématique kantienne de l'analyse des représentations.

La première est **l'assimilation des structures du sujet à des représentations a priori**. Par exemple, les relations d'extériorité et de succession, en tant que représentations a priori de l'espace et du temps, structurent l'intuition sensible c'est-à-dire la réception de toute information d'ordre phénoménal. Pour Kant, les structures du sujet sont de deux types : celles, que nous venons de prendre comme exemple, relatives à l'organisation nécessairement spatiale et temporelle de toute expérience possible, et celles, catégoriales, relatives au jugement.

La seconde caractéristique est une **subordination de la réalité de l'objet**, de son existence, **au respect du fonctionnement représentatif de ces deux types de structure cognitive**. Ce sont les structures cognitives du sujet qui commandent les possibilités de connaissances scientifiques, même si la reconnaissance effective de la validité des connaissances requiert une autre condition que Kant a tenté de formaliser par sa célèbre distinction entre jugement analytique et jugement synthétique (Kant 1980, p. 765-772, 851-852, 866-870). Ainsi il ne peut y avoir de connaissance possible que par les jugements synthétiques, c'est-à-dire par l'application des concepts catégoriaux soit aux structures intuitives a priori de l'expérience soit aux données a posteriori de l'expérience[1]. En d'autres termes, c'est seulement quand il y a coordination entre les systèmes conceptuels et intuitifs de représentation a priori du sujet qu'il peut y avoir un objet de connaissance.

On voit alors toute l'ambiguïté de la problématique kantienne : elle veut apporter une réponse essentiellement cognitive à des problèmes qui sont d'ordre épistémologique. Les oppositions réductrices entre psychologie et logique qui apparaîtront durant la seconde moitié du XIXème siècle ont leur origine dans cette ambiguïté de la problématique kantienne de l'analyse des représentations. Mais retenons en d'abord la conséquence immédiate et souvent dénoncée pour les mathématiques : la connaissance mathématique ne serait possible, ou ne serait valide, que dans la mesure où elle se fonderait sur l'intuition ou, plus précisément, sur ces représentations

[1] Pour bien comprendre l'importance historique de la distinction entre jugement analytique et jugement synthétique, il faut se rappeler que c'est contre la thèse kantienne (les jugements mathématiques seraient des jugements synthétiques) que les mathématiciens du XIX ème ont cherché à mettre en évidence un fondation purement logique de la géométrie (Gauss, Helmoltz, Russell) et de l'arithmétique (Dedekind, Frege).

relationnelles a priori de l'extériorité (l'espace !) et de la succession (le temps !) qui constituent le cadre organisateur de la perception des phénomènes. Il s'agit là d'une restriction cognitive des fondements de la connaissance mathématique. Or cette restriction revient à exclure des mathématiques aussi bien l'algèbre que l'analyse, domaines qui, au temps de Kant, étaient déjà en plein essor[1].

[1] C'est dans le domaine de l'analyse que la remise en cause la plus forte du modèle kantien apparaîtra de la façon la plus radicale. Ainsi la nécessité d'une construction des nombres entiers s'est imposée à partir du moment où le continu linéaire et les grandeurs mesurables ne pouvaient plus servir de référence, c'est-à-dire de fondement intuitif, pour rendre compte des nombres réels et où, pour distinguer les nombres rationnels (densité) et les nombres irrationnels (continuité), il a fallu chercher une autre base (Nichanian. p. 59-62).

2. Rupture du lien sujet-objet : émergence de la nature sémiotique des représentations et détermination de l'objet comme l'invariance de référence de plusieurs représentations sémiotiques

> Il est bien certain que nous avons besoin des signes sensibles pour penser...
> Que personne ne méprise les signes, tant dépend de leur choix pertinent ! Et leur valeur n'est pas amoindrie si après un long usage il n'est plus nécessaire de produire effectivement le signe...On n'en pense pas moins dans les mots et, sinon dans les mots, dans des signes mathématiques, ou d'autres encore...
> Frege *Que la science justifie le recours à une idéographie*

C'est en raison de la restriction kantienne concernant les fondements de la connaissance mathématique que Bolzano a été conduit à postuler **une opposition, et même une rupture, entre la pensée en tant qu'activité du sujet et l'objet** (Sebestik 1992, p.26, 29, 128). Car, pour Bolzano, ce qui est en question dans l'approche cognitive du système du sujet faite par Kant, c'est l'indépendance de l'objet et donc la **vérité** : la vérité ne dépend pas des lois de fonctionnement de la pensée humaine mais de la science, laquelle ne peut être que «démonstration, c'est-à-dire logique» (Sébestik 1992, p.27, 293). Ainsi, à une architectonique de la raison pure, Bolzano va opposer une théorie de la science (*Wissenschaftslehre* 1837) centrée sur les enchaînements objectifs de vérités et sur l'élucidation du fondement des objets, à commencer par celui des objets logiques, les «propositions *en soi* »et les «représentations *en soi*» (Sébestik 1992, p. 21, 115, 287, 478). *La théorie de la science* de Bolzano marque le point de départ d'une réflexion sur les fondements des mathématiques. L'émergence des axiomatiques formelles avec Dedekind, Hilbert et Zermelo, s'inscrit dans ce mouvement dont Bolzano a été l'initiateur[1].

a. La notion bolzanienne d'objet et l'analyse des représentations par la méthode des variations par substitution

Toute l'analyse que Bolzano fait des représentations est commandée par le principe de l'indépendance de l'objet au regard de l'activité par laquelle le sujet en acquiert la connaissance[2]. Or comment reconnaître qu'un objet existe indépendamment de la représentation qui y fait accéder sans recourir au principe de causalité, comme Descartes le faisait, et donc sans se donner la possibilité implicite de caractériser l'existence des objets de la même manière que la réalité des choses physiques ? Pour résoudre ce problème, **Bolzano inverse en quelque sorte la relation sémantique entre la notion objet et celle d'existence,**

---

[1] Au plan de l'histoire factuelle, signalons que Bolzano et Gauss ont suivi les cours de Kästner et, surtout, que Dedekind a utilisé les travaux de Bolzano (Sébestik 1992, p.34, 126, 451-452)

[2] Sur la séparation entre représentation et objet (ou objectualité) voir Brentano 1993 §13.

en faisant de la première une notion plus générale que la seconde. Et cela le conduit à deux des idées directrices de sa *Théorie de la science* (Sebestik 1992, p.131-133):

— la notion d'objet s'oppose à celle de «rien», c'est-à-dire à la négation de «quelque chose».

— il y a deux modes d'existence : la «réalité» (*Wirklichkeit*) et la «subsistence sans prétention à la réalité». Le mode d'existence des choses réelles se caractérise par la possibilité d'agir (*wirken*) : c'est «l'insertion d'un être dans un réseau de relations causales» qui constitue la réalité de quelque chose. La subsistence non réelle, au contraire, se caractérise par le seul fait que l'on puisse référer à quelque chose dans un opération discursive de quantification. Pour la désigner, Bolzano emploie l' expression *es gibt,* «il y a», laquelle correspond au quantificateur existentiel, «∃».

On voit donc que la notion d'objet implique nécessairement l'un de ces deux modes d'existence. A ce titre ce serait une tautologie de considérer l'existence comme un prédicat que l'on pourrait attribuer à un objet. Cependant, le progrès de la connaissance repose sur le fait que l'on peut dire d'un objet s'il existe vraiment ou non. Bolzano en est parfaitement conscient mais pour lui cette formulation est imprécise. **Car, dans ce cas, l'existence n'est pas prédiquée d'un objet mais d'une représentation.** Cela veut dire que l'on affirme qu'un objet (donc par définition quelque chose ayant une existence réelle ou une existence de simple subsistence) correspond au contenu d'une représentation objective ou encore qu'une représentation n'est pas vide, selon la terminologie bolzanienne que nous allons expliquer :

> Un concept (une représentation) est objectuel (*gegenständlich*) s'il représente, s'il dénote un objet, c'est-à-dire s'il y a un objet qui tombe ou qui est subsumé sous ce concept; sinon le concept est sans objet, vide. Un jugement d'existence est donc en réalité une proposition qui énonce l'*objectualité d'un concept.*
>
> Sebestik 1992, p.132.

Cela conduit à introduire deux dichotomies dans l'analyse des représentations.

La première est **une séparation nette entre les représentations subjectives et les représentations *en soi (ou objectives).*** Pour bien comprendre cette séparation il nous faut considérer la distinction entre proposition en soi (*Satz an sich*), jugement et énoncé. Le ***jugement*** est l'acte mental du sujet. L'***énoncé*** est l'expression linguistique affirmant quelque chose et, à ce titre, susceptible d'être vraie ou fausse. La ***proposition en soi***, notion introduite par Bolzano, n'est ni le jugement ni l'énoncé mais est d'une certaine façon le sens de l'énoncé qui peut être saisi par plusieurs personnes ou rester totalement ignoré (Sebestik p.117-119, 123). Ce sont là trois objets, le jugement et l'énoncé ayant un mode réel d'existence, une proposition en soi n'ayant qu'un mode de simple subsistence. Il y a évidemment des relations entre ces trois objets : le jugement est la saisie d'une proposition en soi, et l'énoncé est l'expression d'une proposition en soi que l'on suppose en accord avec le jugement. Mais ces relations sont secondaires par rapport à la différence ontologique qui sépare les jugements et les énoncés d'une part, et les propositions en soi d'autre part. D'un côté il y a les liens réels entre les idées, lesquels relèvent des mécanismes d'ordre causal dans le fonctionnement de la pensée et de l'autre il y a la connexion objective entre les propositions qui relève uniquement des phénomènes de vérité et de sens. La différence des modes d'existence exclut non seulement qu'on puisse les confondre mais également qu'on puisse les subordonner les uns aux autres. Les représentations en soi, ou représentations objectives, sont les parties constituantes des propositions en soi, et les représentations subjectives, ou représentations mentales selon la terminologie couramment utilisée maintenant, sont les représentations qui «existent réellement dans l'esprit d'un être» (Sebestik 1992, p.134, 136, 146). L'oubli de la séparation radicale entre

les représentations mentales et les représentations objectives ne peut conduire qu'à de graves confusions.

Reste alors la question essentielle, celle du rapport entre une représentation en soi et l'objet mathématique représenté par elle ou subsumé par elle. **La grande originalité de Bolzano est d'avoir utilisé, pour analyser les représentations en soi et les propositions, la méthode des variations qu'il venait d'employer pour définir les fonctions** (Sebestik 1992, p. 27, 195). De même que l'on peut étudier une fonction en substituant successivement les valeurs de sa (ou de ses) variable(s) indépendante(s), de même on peut étudier une représentation en soi ou une proposition en considérant certains de leurs constituants comme des variables pour lesquels on substitue différentes représentations déterminées. Par exemple:

> Déclarer le constituant «homme» comme variable dans la représentation «un homme sage» revient donc à considérer toutes les représentations formées à partir de celle-ci par substitution à «homme» : «un philosophe sage», «un élève sage», «un animal sage» etc.
>
> (Sebestik 1992, p. 189 (Wissenschaftlehre I §69))

Cependant cette méthode des variations est soumise à une condition stricte qui nous renvoie à la seconde dichotomie : ne pas transformer une représentation objectuelle, c'est-à-dire dénotant un objet, en une «**représentation vide**» c'est -à-dire une représentation «sans objet» (Sebestik 1992, p. 205). Ce qui serait le cas si à «homme», dans la représentation «un homme sage», on substituait «table», on aurait la représentation «une table sage» qui est une représentation vide au même titre que «une vertu verte». Il faut en d'autres termes que les représentations obtenues par substitution restent des expressions acceptables en respectant au moins les contraintes sémantiques de la langue. **On aura reconnu dans cette application de la méthode des variations par substitution celle même qui, à la suite de Saussure, sera mise en oeuvre dans l'analyse structurale de la langue tant au plan phonétique qu'au plan sémantique.** Mais ce n'est pas dans cette direction de l'analyse des systèmes de représentation que Bolzano oriente l'application de sa méthode des variations. Il propose qu'ensuite on «examine la valeur de vérité des propositions ainsi obtenues à partir de la forme propositionnelle initiale» (Sebestik 1992, p.204). Pour Bolzano la vérité et, par suite, les conditions de vérificabilité, restent les seuls critères acceptables du sens. On aura remarqué que le seul fait d'utiliser cette méthode des variations par substitution implique qu'il y ait entre les représentations en soi et les énoncés une liaison intrinsèque alors que la liaison entre les énoncés et les jugements est extrinsèque, car elle peut changer selon les individus

Ce que Bolzano appelle les «représentations vides» mérite une attention toute particulière. Il ne s'agit pas d'un phénomène accidentel qui concernerait les représentations subjectives, c'est-à-dire les représentations mentales d'un individu. Il s'agit d'**un phénomène essentiel qui tient à la nature sémiotique des représentations objectives**. Pour le comprendre il suffit de se rappeler la méthode des variations par substitution : elle permet de générer tout aussi bien des représentations objectuelles que des représentations vides par le seul fait qu'elle repose sur les possibilités de combinaisons syntaxiques et sémantiques qu'offre un système sémiotique. Cela veut dire, pour reprendre une distinction de Brentano, que les représentations vides ne sont pas liées aux jugements mais aux énoncés et à la possibilité d'une discordance entre jugement et énoncé. On peut ainsi avoir des représentations vides aussi bien dans une langue naturelle (expressions contradictoires «carré rond», termes indéterminés «rien», «qui»...) que dans le développement de notations symboliques (les représentations «0»et de «$\sqrt{}$—1» parce qu'«*il ne saurait y avoir de grandeur représentée par 0 ou par* $\sqrt{}$*—1*»). Même si, comme Sebestik le remarque : « les représentations «0»et «$\sqrt{}$—1» ne sont pas vides

pour nous; ces deux représentations désignent des objets abstraits, mais parfaitement déterminés et uniques» (p. 184), l'analyse bolzanienne de ces symboles pointe le rôle fondamental et prioritaire que les signes jouent, par rapport aux «concepts», dans le développement des connaissances mathématiques. Mais citons ici Bolzano lui-même dans l'un de ses derniers textes, qui est aussi l'un de ses rares textes traduits en français :

> Il est indiscutable que le concept associé par tous les mathématiciens au symbole 0 est tel qu'il vérifie les deux équations :
>
> $$A - A = 0 \qquad A \pm 0 = A$$
>
> où A est une expression de grandeur quelconque, qui peut correspondre à une grandeur réelle ou être absolument sans objet.
> On concédera qu'une telle définition n'est viable que si le symbole 0 n'est pas considéré comme une grandeur réelle, mais comme une simple absence de grandeur... De toute évidence, il existe en mathématique d'autres symboles usuels de grandeur qui sont **des symboles vides**. Ainsi en Analyse, le symbole $\sqrt{-1}$ devenu si extraordinairement important. *Ce n'est cependant pas là une raison suffisante pour considérer et traiter tous ces symboles comme équivalent à 0*
>
> Bolzano 1993 § 34

b. De Bolzano à Frege : la recherche d'une représentation sémiotique non linguistique des opérations discursives constituant la démonstration

C'est avec Frege que la problématique d'une théorie de la science centrée sur les enchaînements objectifs de vérités va conduire à une analyse systématique des énoncés, en tant qu'ils sont intrinsèquement liés aux représentations et aux propositions en soi, de façon à **contrôler méthodiquement les conditions du passage de l'un à l'autre et la continuité de ce passage** :

> Das ideal einer streng wissenschaftlichen Methode der Mathematik, das ich hier zu verwirklichen gestrebt habe, und das wohl nach Euclid benannt werden könnte, möchte ich so schildern. Dass Alles bewiesen werde, kann zwar nicht verlangt werden, weil es unmöglich ist; aber **man kan fordern, dass alle Sätze, die man braucht, ohne sie zu beweisen, ausdrücklich als solche ausgesprochen werden**, damit man deutlich erkenne, worauf der ganze Bau beruhe. Es muss danach gestrebt werden, die Anzahl dieser Urgesetze möglichst zu verringern, indem man Alles beweist, was beweisbar ist. **Ferner, und darin gehe ich über Euklid hinaus, verlange ich, dass alle Schluss-und Folgerungsweisen, die zur Anwendung komme, voher aufgeführt werden.** Sonst ist die Erfüllung jener ersten Fordering nicht sicher zu stellen...
>
> Duch die Lükenlosigkeit der Schlussketten wir erreicht, dass jedes Axiom, jede Voraussetzung, oder wie man es sonst nennen will, auf denen ein Beweis beruht, ans Licht gezogen wird; und so gewinnt man eine Grundlage für der erkenntnisstheorischen Natur der bewiesenen Gesetzes..
>
> Frege 1893, p. VI-VII.

Cet idéal d'une démarche de connaissance scientifique **qui ne soit que démonstration**, Frege a tenté de le réaliser en cherchant à établir l'arithmétique **sur des bases exclusivement logiques** sans aucun recours à l'intuition, fût-ce celle de succession :

> In meine *Grundlagen der Arithmetik* habe ich wahrscheinlich zu machen gesucht, dass die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und weder der Erfahrung noch der Anschauung irgendeinen *Beweisgrund* zu entnehmen brauche. In diesm Buche soll dies nun dadurch bewährt werden, dass **allein mit logischen Mitteln die einfachsten Gesetze der Anzahlen abgeleitet werden.** Damit dies aber überzuge, müssen erheblich höhere Ansprüche *an die Beweisführung* gestellt werden, als in der Arithmetik üblich ist. Ein Kreis von wenigen Schluss und Fogerungsweisen muss voher abgegrenzt werden, und ***kein Schritt*** darf

> geschehen , der nicht einer von diesen gemäss wäre. Man darf sich also ***beim Uebergange zu einem neuen Urtheil*** nicht daran genügen lassen, wie es die Mathematiker bis jetzt wohl fast immer thun, dass er als richtig einleuchte, **sondern man muss ihn in die eindachen logischen Schritte zerlegen**, aus denen er besteht, und das sind oft gar nicht wenige.
>
> Frege 1893 p. I

Et, pour réaliser cet idéal, Frege a franchi **le pas que Bolzano s'était finalement refusé à faire : ne pas se limiter à ce registre de représentation qu'est la langue naturelle.**

> Malgré l'effort de séparer la forme linguistique des propositions et de représentations de leur sens, Bolzano ne met pas en question la fonction catégorielle du langage, le découpage du réel que chaque langue opère à sa manière... Pour Bolzano le langage est un système quasi-transparent d'expression et de communication qui reproduit la composition des représentations et leur enchaînement dans les propositions. le langage ne fait que révéler les structures signifiantes qui constituent un domaine théorique absolu..
>
> Sebestik 1992, p.168-169

Au contraire, avec sa *Begriffsschrift*, Frege a tenté de créer **un registre de représentation différent de celui des langues naturelles**. Et cela dans le but de pouvoir effectuer, de façon totalement transparente et totalement contrôlable, **par la seule appréhension visuelle**, les opérations discursives nécessaires à la démonstration[1]:

> **Die Beweise selbst enthalten keine Worte, sondern sind allein mit meinen Zeichen gefürht. Sie stellen sich dem Auge** dar als eine Reihe von Formel, die durch ausgezogene oder unterbrochene Striche oder andere Zeichen getrennt sind. Jede dieser Formeln ist ein vollständiger Satz mit allen Bedingungen, die zu seiner Gültigkeit nothwendig sind. Dieser Vollgständigkeit, welche stillsschweigend hinzuzudenkende Voraussetzungen nicht duldet, scheint mir für die Strenge der Beweisführung unentbehrlich zu sein.
>
> Frege 1893 p. V-VI

c. la distinction frégéenne ou la dualité sens/objet constitutive des représentations sémiotiques

Si l'entreprise frégéenne pour fonder l'arithmétique sur des bases exclusivement logiques a échoué, elle a cependant ouvert la voie à une approche à la fois logique et cognitive du fonctionnement discursif de la démonstration. Elle a permis en particulier de dégager des principes communs pour ce fonctionnement discursif, que celui-ci se fasse dans le registre de la langue naturelle ou dans celui des écritures symboliques. Ces principes expliquent à la fois la fécondité et la rigueur de ce qu'on désigne génériquement sous le terme de «raisonnement» et qui recouvre aussi bien des démarches de type calcul que de type déduction ou de type argumentation. La célèbre distinction entre *Sinn* et *Bedeutung* permet de formuler l'un de ces principes. Elle a donné lieu à de nombreux débats de nature sémantique sur la référence, qui en ont fait oublier l'intérêt au profit de problèmes techniques particuliers (Russell 1905, Quine 1972, Strawson 1971, Ducrot 1972). Aussi est-il important de rappeler la question qui a conduit Frege à introduire cette distinction : comment rendre compte de la fécondité d'égalités du type $a = b$ par rapport à $a = a$? Citons le début de l'article qui n'a été connu qu'à partir de la critique que Russell en fit (1905) !

---

[1] Même si le système d'écriture conceptuelle de Frege ne s'est pas imposé, il a contribué de façon décisive à l'instauration des langues formelles qui s'est réalisée avec Peano et Russell.

> La notion d'égalité propose à la réflexion quelques questions irrémissibles auxquelles il n'est pas aisé de répondre. Est-ce une relation ? Une relation entre des objets, ou entre des noms ou signes d'objets ? Cette dernière hypothèse fut la mienne dans la *Begriffsschrift*. Diverses raisons semblent parler en ce sens : $a = a$ et $a = b$ **sont des propositions qui n'ont pas, la chose est évidente, même valeur de connaissance** : $a = a$ est *a priori* et, selon Kant, analytique, tandis que **les propositions de la forme $a = b$ ont bien souvent un contenu fort précieux pour le progrès de la connaissance**, et elles n'ont pas toujours une fondement *a priori*. La découverte que chaque matin se lève **le même** soleil, **et non pas un nouveau** soleil, a bien été **une découverte les plus fécondes de l'astronomie.** Aujourd'hui encore, l'identité d'une petite planète ou d'une comète ne va pas toujours de soi. Or si l'on voulait voir dans l'égalité une relation entre ce que dénotent respectivement les noms «a» et «b», $a = b$ ne pourrait pas, semble-t-il, différer de $a = a$, à supposer que la proposition $a = b$ soit vraie.
>
> Frege 1971, p.102

Il s'agit donc là d'un problème cognitif et épistémologique avant d'être une simple question de logique. C'est déjà le problème que Kant avait tenté de résoudre en distinguant les jugements analytiques et les jugements synthétiques. Et c'est ce même problème que, par exemple, Piaget considère comme «la question cruciale de toute théorie de l'intelligence» (1968, p. 364) et qu'il cherche à résoudre par un mécanisme d'équilibration entre les deux fonctions adaptatives de tout organisme, celle d'assimilation et celle d'accommodation. Or, pour résoudre ce problème, Frege se réfère à la fois au domaine des mathématiques (en prenant comme situation typique les égalités de la forme $a = b$) et à un domaine non mathématique (en prenant comme exemple l'identification d'un même objet astronomique dans les observations de deux phénomènes différents...). On voit donc que Frege considère comme **un progrès de la connaissance, aussi bien mathématique que non mathématique, le fait de reconnaître deux représentations différentes comme deux représentations d'un même objet.** Précisons la portée de la réponse frégéenne. Toute représentation peut se référer à un objet, du moins pour le sujet qui la produit. Mais si le sujet ne dispose que de cette seule représentation, l'objet qu'il pense identifier à travers elle ne peut pas être dissocié de cette représentation : l'objet se confond avec la représentation que l'on en a et il y a alors autant d'objets qu'il y a de représentations. La connaissance, scientifique ou non, ne commence que lorsque que le sujet devient capable d'identifier un même objet sous des représentations différentes, c'est-à-dire lorsqu'il dispose de plusieurs représentations possibles pour un même objet. Et cela se traduit par le fait que le sujet peut passer d'une représentation à l'autre, selon les besoins d'un traitement à effectuer. Et on pourrait donner d'autres exemples en s'en tenant aux mathématiques.

> Qu'est-ce qui permet de «voir» dans une droite dessinée dans un système d'axes de coordonnées et dans une relation $y = ax + b$ deux représentations d'un même objet, si ce n'est que je sais déjà que ces objets, la droite dessinée et la relation algébrique, peuvent être des représentations d'un même objet. Autrement dit l'objet commun aux deux «représentations» n'est pas un donné... mais une construction historiquement datée (l'invention de la géométrie analytique par Descartes et Fermat)...
>
> R. Bkouche *Lettre*

La célèbre distinction entre *Sinn* et *Bedeutung* n'est que la formulation de cette réponse de Frege au problème cognitif et épistémologique qui, depuis Kant, n'a cessé d'être abordé dans des cadres théoriques différents, celui de la nature et des conditions du progrès ou du développement des connaissances :

> Si l'on admet que le signe «a» se distingue du signe «b» en tant qu'objet seulement (ici, par sa seule forme) et non en tant que signe, en tant qu'il désigne quelque chose, alors la valeur de connaissance de a = a serait essentiellement identique à celle de a = b, à supposer que la proposition a = b soit vraie. On ne saurait les distinguer **que si la différence des signes correspond à une différence dans la manière dont l'objet désigné est donné....**

> Or il est naturel d'associer à un signe (nom, groupe de mots, caractères) outre ce qu'il désigne et qu'on pourrait appeler sa dénotation, ce que je voudrais appeler le sens du signe, **où est contenu le mode de donation de l'objet**..
>
> Frege 1971 p.103

Comme on le voit, Frege distingue soigneusement deux plans concernant l'objet.

— le plan de l'objet en soi, lequel est indépendant des multiples désignations que l'on peut en faire, des multiples représentations que l'on peut en donner ...

— le plan des désignations, des représentations ou des manifestations multiples de l'objet, chacune pouvant se faire en fonction de caractéristiques ou de propriétés différentes de l'objet et n'ayant donc pas le même contenu que les autres. (Rappelons, au risque d'être fastidieux, qu'il ne faut pas confondre l'objet et le contenu d'une représentation. Deux représentations d'un même objet peuvent avoir des contenus très différents...)

Or ce qui est essentiel est le fait qu'**un seul de ces deux plans est accessible** : celui des désignations, des représentations ou des manifestations multiples. L'objet en soi n'est pas accessible indépendamment de représentations ou de désignations multiples qui permettent d'y référer, ou de manifestations qui le rendent «présent» (*prae sensibus*). *Si nous avions la possibilité d'un accès direct à l'objet indépendamment du plan des représentations ou des manifestations multiples, il n'y aurait pas réellement d'acquisition et de progrès dans la connaissance*. Car, dès la première représentation, l'objet serait d'emblée distingué du contenu particulier de sa représentation et il serait alors instantanément reconnu dans une autre représentation. Découvrir que deux représentations différentes renvoient au même objet ne constituerait pas une découverte. Autrement dit «la découverte que chaque matin se lève le même soleil, et non pas un nouveau soleil» n'aurait pas été «une découverte les plus fécondes de l'astronomie». Dès le premier jour de leur existence les premiers hommes auraient su que c'est bien la même chose qui, s'étant levée à l'orient et disparaissant dans la direction opposée, va réapparaître le lendemain, et non pas un autre semblable comme, au printemps, ces feuilles nouvelles qui viennent reformer les frondaisons disparues à l'automne. Et de même, il n'aurait pas fallu attendre Descartes et Fermat pour reconnaître dans deux types de représentation déjà bien connues, les formes des sections coniques et celles d'équations du second degré, deux types de représentations des mêmes objets !

On voit alors apparaître la grande nouveauté de l'analyse frégéenne de la connaissance, à travers sa distinction entre sens et référence (dénotation) : **elle relie de façon nécessaire et étroite les signes et les objets dans le processus de la connaissance.** Car celle-ci consiste dans l'interaction entre le plan des objets eux-mêmes et la plan des modes de leur présentation ou de leur donation. Et précisons que pour Frege, ce que nous avons appelé «représentations multiples de l'objet» concerne les descriptions différentes que l'on peut en avoir à travers une langue, un système graphique ou même des instruments. Et cela ne doit pas être du tout confondu avec les représentations subjectives des sujets, c'est-à-dire leurs croyances, leurs associations, leurs impressions, qui elles sont propres à chacun et sont strictement incommunicables (Frege 1971, p. 105-107, 181-183). De ce point de vue Frege reste bolzanien : il sépare radicalement les jugements -subjectifs- de l'individu et les énoncés -objectifs- liés aux possibilités et aux règles constitutives d'un systèmes sémiotique.

d. Interprétations et méprises concernant la distinction frégéenne

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

Pour bien comprendre que la distinction frégéenne permet une approche nouvelle de la notion d'objet, il nous faut d'abord nous arrêter sur l'interprétation classique qui en est faite. Deux hypothèses la commandent :

- (a) la distinction sens/ référence serait entièrement subordonnée à la possibilité d'effectuer l'opération de substitution de façon valide,

- (b) la pertinence de la relation de référence se détermine au niveau **intra**-proprositionnel et non pas au niveau **inter**-propositionnel

C'est sur la base de ces deux hypothèses que les débats autour de la distinction frégéenne se sont développés. On les retrouve explicitement dans l'article de Russell (1905) qui, critiquant cette distinction, a paradoxalement contribué à la faire connaître(1892)[1]. Il faut d'ailleurs reconnaître que ces hypothèses sont en grande partie induites par la présentation que Frege a lui-même fait de cette distinction et par l'exemple à partir duquel il l'a illustrée : une égalité dans le registre d'une écriture formelle. Or ce sont là deux hypothèses restrictives et superfétatoires qui occultent la portée réelle de la distinction de Frege pour la définition de la notion d'objet.

Question concernant la première hypothèse : la distinction sens/référence est-elle entièrement subordonnée à la possibilité d'effectuer l'opération de substitution seulement de façon valide , ou peut-elle être faite aussi sur des critères de pertinence ?

C'est sur cette subordination que Russell s'est appuyé pour rejeter la distinction de Frege en transposant la distinction frégéenne du registre d'une écriture symbolique à celui de la langue naturelle. Cette transposition permet, en effet, de soulever immédiatement une première difficulté due à ce qu'on a appelé depuis Quine (1971) «l'opacité de la référence» :

> A logical theory may be tested by its capacity for dealing puzzles... I shall therefore state three puzzles which a theory as to denoting ought to be able to solve; and I shall show later that my theory solves them.

---

[1] Le filtre russellien dans la lecture de Frege apparaît clairement à travers ce jugement de Brunschvicg dans son ouvrage de 1911 sur *les Étapes de la pensée mathématique* : «Nous n'aurons pas à suivre, chez M. Frege lui-même, les conséquences qu'entraînent cette réforme de la logique et ce rapprochement avec les mathématiques. **Nous les retrouverons, pour ce qu'elles ont d'essentiel, chez M. Russell** qui a été amené, d'une façon indépendante, à des conclusions du même ordre. Seulement au lieu de créer sur de nouveaux frais un algorithme original qui court le risque de n'être manié que par son inventeur, M. Russell s'est donné cet avantage de prendre pour base les résultats atteints par les mathématiciens et les logiciens. Il y a aurait certes injustice à ne pas marquer **la place de M. Frege dans l'histoire; mais il faut ajouter que son oeuvre est à certains égards l'oeuvre d'un précurseur.** La philosophie mathématique qui doit être ici l'objet de notre étude est celle qui a été exposée dans le premier volume de ses *Principles of Mathematics*. Cette philosophie enveloppe et l'*Algèbre de la logique*, au point où l'avait portée l'ouvrage magistral de Schröder, et la mise en forme symbolique des mathématiques, que Peano avait constituée; elle y joint enfin, pour les rapprocher et les dominer, la *Théorie des ensembles* de M. Georg Cantor» (Brunschvicg 1972, p. 382-383). On peut alors se demander pourquoi Brunschvicg, après un tel jugement sur les analyses de Frege, n'hésite pas à les utiliser, et plus particulièrement celles de l'article de 1892 pour justement critiquer les positions de Russell : « comme le dit excellemment M. Frege, «la découverte que c'était un même soleil....»». Brunschvicg voit dans un cet exemple une illustration parfaite de ce qu'est l'activité intellectuelle à l'oeuvre dans le développement de la connaissance. Mais il n'analyse pas ce que ce processus implique épistémologiquement et cognitivement (1972, p. 404).

> If *a* is identified with *b*, whatever is true of the one is true of the other in any proposition without altering the truth or the falsehood of that proposition. Now George IV, wished to know wether Scott was the author of *Waverley*; and in fact Scott *was* the author of *Waverley*. Hence we may substitute *Scott* for *the author of "Waverley,"* and therby prove that George IV, wished to know wether Scott was Scott. Yet an interest in the law of identity can hardly be attribued to the first gentleman of Europe.
>
> Russell 1905, p.485

L'opacité de la référence est une des difficultés qui surgit avec l'emploi des langues naturelles et plus précisément avec les possibilités qu'elles offrent de remplir une fonction de «réflexivité discursive» (Duval 1995, p. 132), c'est-à-dire aux possibilités d'exprimer le degré d'engagement de l'énonciateur dans ce qu'il énonce. Très concrètement l'opacité référentielle surgit dans tous les énoncés construits avec des attitudes propositionnelles: «x croit que...».Et on sait que cette opacité constitue l' une des difficultés majeures pour établir un calcul propositionnel en logique modale. Mais l'opacité de la référence constitue-t-elle réellement une objection à l'intérêt et à la portée de la distinction frégéenne ?

L'opération de substitution *salva veritate*, envisagée par Frege et par ses commentateurs, est un traitement qui n'est véritablement possible au sens strict que dans un registre d'écriture symbolique ou formel. Cette opération est en effet la seule forme d'expansion discursive dans ces types de registre, puisque c'est cette opération qui permet d'effectuer ce qu'on appelle un «calcul». Dans la langue naturelle, cette opération de substitution n'est plus la seule opération, ni même l'opération fondamentale pour l'expansion discursive (Duval 1995, p. 122-132). **Or Russell, aussi bien que Frege, passent d'un registre d'écriture symbolique au registre de la langue naturelle, en oubliant que les traitements effectuables dans un registre ne sont pas directement transposables dans l'autre registre.** D'ailleurs la non pertinence de cette transposition directe a été souvent soulignée (Ducrot 1972, p. 222-224). Est-ce à dire que dans le discours en langue naturelle la distinction sens/référence et plus précisément la référence à des objets ne serait plus des notions fondamentales ou même pertinentes ? Le simple fait que Frege, pour bien convaincre de la nécessité et de l'intérêt de sa distinction, et Russell, pour la rejeter, aient cherché leurs exemples dans le discours en langue naturelle suffirait à rejeter cette hypothèse[1]. Il est essentiel au discours en langue naturelle de parler d'objets dans la mesure où il est essentiel de parler de quelque chose qui appartienne au monde réel, à un monde subjectif ou à un monde possible (Benveniste 1976, p. 126-131). Seulement comme J.B. Grize l'a souligné, il n'est pas nécessaire que l'objet reste strictement et formellement identique à lui-même au fil du discours (Grize 1983, p. 102, 107, 109-111). Et si l'on revient à la problématique cognitive générale évoquée par Frege dans les premières lignes de son article, on voit que la substitution ne renvoie pas nécessairement à un traitement de type calcul ou à une autre forme de raisonnement, mais à **la possibilité d'une conversion** : passer, par exemple, des équations du second degré aux courbes correspondantes en utilisant un système d'axes de coordonnées. Même si cela a été historiquement long, cette identification d'un même objet sous des représentations aussi différentes par leur forme et leur contenu qu'une écriture algébrique et un graphe est une parfaite illustration du processus permettant le progrès des connaissances pour Frege. Il reste cependant que les conditions pour apprendre à reconnaître la conservation d'un objet à travers des changements d'écriture, des changements de désignation,

---

[1] Rappelons à ce propos la théorie médiévale de la supposition, dont on a souligné les analogies avec la distinction frégéenne (Ducrot 1989, pp.13-65). Cette théorie a été developpée dans le registre de la langue naturelle pour contrôler un discours portant sur des objets inaccessibles (les objets de la foi). Cependant la différence entre la théorie médiévale et la distinction frégéenne tient à ce que celle-ci a été élaborée en référence à deux registres (celui d'une écriture symbolique et celui de la langue naturelle) tandis que celle-là est restée liée au seul registre de la langue naturelle.

des changements modaux (sensoriels —visuels ou tactiles, pour les formes par exemple—) ou des changements de registre ne sont pas les mêmes selon la nature du registre dans lequel ils sont effectués, ou selon le fait que l'on change de registre. C'est cet aspect qui a été méconnu et par Frege et par ses commentateurs.

Question concernant la seconde hypothèse : la pertinence de la relation de référence se détermine-t-elle au niveau intra-propositionnel ou au niveau inter-propositionnel ?

Il y a un fait très révélateur dans la présentation de Frege, comme dans la discussion que Russell développe : la distinction sens/référence et la possibilité de substitution qu'elle permet *salva veritate* sont exclusivement envisagées dans le domaine de propositions, ou dans celui de phrases, prises isolément. Ainsi Russell pour mettre les analyses frégéennes en difficulté compare deux énoncés : «le roi d'Angleterre est chauve»et «le roi de France est chauve» (Russell 1905, p. 483-484). Or si on s'en tient à l'examen de propositions prises isolément, on est automatiquement conduit à subordonner la possibilité de la relation de référence à la **reconnaissance de l'existence préalable de l'objet auquel une représentation** ou une expression réfère[1]. On est donc très loin des raisons qui ont conduit à introduire cette notion de référence : expliquer l'importance, pour le progrès des connaissances, de l'identification d'**un même objet à travers deux expressions, deux désignations différentes,** ou si l'on veut l'identification en un objet des contenus de deux représentations différentes, contenus considérés dans une premier temps comme deux objets différents. Ou encore, pour s'en tenir au seul plan du discours, expliquer que plusieurs expressions et propositions puissent s'articuler dans l'unité et la progression d'un calcul ou d'un raisonnement. En d'autres termes, le problème que pose tout discours n'est pas seulement celui de la vérité de chacune des propositions que son expansion conduit à énoncer, c'est celui de **la cohérence c'est-à-dire de la continuité[1] entre toutes les propositions**, ou encore celui de l'unité de la totalité théorique, démonstrative, descriptive ou explicative qu'elles forment. Naturellement les conditions permettant la continuité ou l'unité de l'expansion discursive ne seront pas les mêmes selon que l'on est dans un registre d'écriture symbolique ou de langue formelle ou de langue naturelle. Parce que les opérations fondamentales d'expansion discursive ne seront pas les mêmes (Duval 1995, p. 129-132). Mais il n'en reste pas moins que la relation de référence au plan de l'expansion discursive ne peut être déterminée *salva veritate* mais *salva cohaerentia.*

S'en tenir à des propositions isolées revient donc à méconnaître le sens de la distinction frégéenne en oubliant les problèmes pour lesquels elle est pertinente. Que devient la notion d'objet dans une telle réduction, c'est-à-dire quand on s'en tient au seul niveau intra-propositionnel ? La réponse se trouve déjà dans les textes de Frege (1972, p.84-85, 166-167): l'objet est seulement ce qui prend le statut d'argument d'une fonction, c'est-à-dire une valeur dont l'attribution transforme une fonction propositionnelle en proposition. L'objet n'est donc plus que ce qui permet de «compléter» la forme d'une expression indéterminée ou non saturée! Cette réduction est souvent renforcée par l'hypothèse suivante venant s'ajouter aux deux

---

[1] N'étant pas anglais, j'ai du consulter des encyclopédies pour savoir que Russell parlait d'Edouard VII lequel régna de 1901 à 1910 ! Russell qui, dans le même article souligne la relativité des énoncés temporels du point de vue de leur validité oublie leur relativité du point de vue de leur compréhension, laquelle implique référence à des objets.

[1] La cohérence d'un discours implique deux aspects, l'un relatif à la non-contradiction et l'autre relatif à la conservation référentielle des objets au cours de l'expansion discursive. Ce sont les problèmes soulevés par ce second aspect que la réflexion de Frege a permis de poser de façon précise.

hypothèses (a) et (b) :

> (c) il y aurait toujours un accès possible aux objets indépendamment du recours à des signes ou à des représentations sémiotiques

Et pour justifier cette hypothèse on met souvent en avant la constatation suivante : s'il n'y a pas d'accès aux objets sans les signes, et donc pas de pensée sans mobilisation d'un registre de représentation, en revanche il n'y a pas de signe déterminé qui s'impose pour désigner ou représenter objet (hormis les contraintes résultants de choix antérieurs) et la liberté demeure donc quant au registre mobilisable (hormis les possibilités et les coûts de traitement propres à chaque registre). Or le plus souvent on ne retient que cette seconde condition pour oublier ou nier la première.

La distinction frégéenne entre sens et référence doit être interprétée **en rejetant les hypothèses (a), (b) et (c)**, sur lesquelles pourtant beaucoup d'analyses des processus de connaissances mathématiques continuent de s'appuyer implicitement ou explicitement. Le rejet de ces hypothèse ouvre la voie à une autre approche de la notion d'objet et conduit à une autre approche dans l'analyse des processus d'acquisition des connaissances mathématiques comme nous le verrons plus loin.

3. Rupture du lien signe-objet : l'autonomie de systèmes de fonctionnement purement sémiotiques

> Pour que le raisonnement logique soit sûr, des objets extra-logiques discrets doivent être donnés en tant que vécu immédiat pour toute pensée... leur présentation, leur différenciation, leur consécution devant être accessibles dans une intuition immédiate... Lorsque j'adopte ce point de vue, *les objets* de la théorie des nombres *sont les signes eux-mêmes dont la configuration peut être reconnue par nous de façon générale et certaine*...Là-dessus repose la position philosophique solide que je tiens pour indispensable à la fondation de la mathématique pure, aussi bien qu'à toute pensée, compréhension et communication scientifiques : au commencement est le signe
> Hilbert 1922 *Neubegründung der mathematik*

Les problématiques de cette troisième période se sont développées à la fois en continuité et en rupture avec celles développées durant la seconde période. En continuité, parce les trois«axiomatisations décisives» (Nichanian 1979, p.58), celle de Dedekind pour l'arithmétique (1881), celle de Hilbert pour la géométrie (1899) et celle de Zermelo pour la théorie des ensembles (1907) se situent dans la perspective des projets de fondation purement logiques dont Bolzano et Frege furent les premiers pionniers (Nichanian, 1979). En rupture, parce que ce projet de refondation logique des mathématiques, malgré son échec, s'est révélé extrêmement fécond. Il a ouvert la voie à l'idée que les systèmes sémiotiques sont des systèmes de traitements cognitifs, indépendants des interprétations diverses que l'on peut en donner selon les domaines d'objets auxquels on rapporte les suites de signes produites. Et cela a conduit à l'idée d'une machine universelle ne travaillant qu'avec et sur des symboles (Turing 1936), et d'une machine organisée selon les différentes fonctions qui sont nécessaires à l'accomplissement d'un acte de connaissance (von Neumann 1945). Les notions de simulation et de modélisation deviennent alors essentielles dans la description de ce qu'est l'activité de connaissance. Et la notion de représentation, avec cette autonomie productrice des systèmes sémiotiques, devient complètement indépendante non seulement de tout lien avec un sujet mais également de toute référence prioritaire à des objets. Et pour mieux se rendre compte de la transformation, apparemment légère mais radicalement révolutionnaire, qui s'est ainsi accomplie en un demi-siècle, il suffit de relire les déclarations de Dedekind **en remplaçant simplement l'expression philosophiquement et subjectivement surdéterminée de «pensée pure» par celle de «système de signes» :**

> lorsque je dis que l'arithmétique (algèbre, analyse) n'est qu'une partie de la logique, j'exprime le fait que je tiens le concept de nombre pour tout à fait indépendant des représentations ou des intuitions de l'espace et du temps, et comme un développement immédiat des règles pures de la pensée
> Dedekind 1881 cité par Nichanian p. 62

Toutefois se fixer sur la réalisation qui a entraîné les changements les plus spectaculaires dans le domaine des outils de connaissance serait une erreur. Cette autonomie de fonctionnement des signes, en tant que justement les signes ne sont pas réduits à leurs manifestations sensibles mais sont envisagés relativement à un système qui les rend «signifiants», c'est-à-dire à ce qui leur donne la propriété de «signifiance» est une idée neuve qui surgit explicitement avec

Saussure (1915) et qui contribuera à analyser autrement ce qu'on appelle le «sens» dans le domaine des discours et plus largement dans le domaine des sciences humaines. Ce serait donc dans des champs disciplinaires très différents qu'il faudrait suivre cette rupture du lien entre signe et objet, le glissement de la notion de signe à celle de système sémiotique et la prise de conscience que les représentations produites dépendent des systèmes sémiotiques mobilisés. Nous nous limiterons ici au domaine des mathématiques et aux transformations de la notion d'objet survenues dans ce moment de transition qu'a constitué l'élaboration des trois axiomatiques décisives que Hilbert (1934) a appelées des «axiomatiques formelles» par opposition aux «axiomatiques de contenu» (*inhaltliche Axiomatik*)) telle celle d'Euclide.

La transformation essentielle qui survient concernant la notion d'objet, en mathématiques à partir des années 1880, est la substitution de la notion d'ensemble à celle d'intuition a priori de l'espace et du temps, comme domaine primitif de référence pour déterminer les objets mathématiques. Avec ce déplacement d'ancrage, d'une part les objets mathématiques perdent tout appui, au moins direct, sur un donné perceptible de formes ou de choses, et d'autre part les énoncés par lesquels on les définit perdent toute fonction de description de quelque chose qui serait préalablement accessible avant même l'énonciation des propositions qui les posent. Cette transformation présente deux aspects que le projet de refondation logique tendait, alors, à faire fusionner mais qui, ensuite, se sont avérés à la fois intimement liés, du moins en mathématiques, et cependant irréductibles l'un à l'autre : **les objets et les propositions. Leur liaison conduit à une notion d'objet qui est celle d'un «objet-structure»** (Nichanian,. p.71,75,92). Mais leur irréductibilité a conduit à des problèmes de nature radicalement différente.

Pour définir un objet-structure «on considère sur *un ensemble* une ***relation*** qui *vérifie les axiomes d'une structure,* celle de groupe par exemple». Ainsi Dedekind considère la relation (fonction) de successeur (Nichanian p 64-65, 75, 92). Hilbert considère les diverses relations (prédicats) «se trouver sur», «se trouver entre», «être congruent» (pour des segments). Zermelo considère la relation «appartenir à...». La définition d'un objet-structure est donc centrée sur une ou plusieurs relations entre des termes-objets dont on a «effacé» en quelque sorte toute propriété qui permettrait de les identifier. Car «ce sont des relations fondamentales qui sont déterminées, et non les objets du domaine sur lesquels portent ces relations» et il n'y a aucune détermination conceptuelle de la nature de ces termes-objets. On peut donc décider de les appeler comme on voudra ainsi que Hilbert l'avait souligné. D'ailleurs, pour désigner ces objets effacés, Dedekind se contentait de parler d'un «système de choses ou d'éléments» (Nichanian p. 63) et Zermelo d'un «domaine d'individus» (Nichanian. p.93; note 111 de la p.112). Préciser la nature de ces objets effacés ne signifie plus fonder ou justifier l'objet-structure dans la réalité mais, au contraire, l'appliquer comme modèle à un domaine d'objets déjà identifiés par d'autres procédures, c'est-à-dire en donner une interprétation possible. On voit donc apparaître une certaine dénivellation à l'intérieur même de la définition d'un objet-structure. **Il y a, d'une part, le niveau de l'objet constitué et il y a, d'autre part, celui des objets effacés. Pourquoi ces objets effacés sont-ils nécessaires à la définition d'un objet-structure ?** Parce qu'il n'y a pas de relation sans référence aux termes de la relation. Il ne s'agit en fait que d'une «référence pure pour l'énoncé» (Nichanian p.19,75) : «la détermination axiomatique d'un objet suppose la notion d'«ensemble» comme référence pure» (N. p.11). On voit alors la difficulté qui est au centre de toute définition d'un objet-structure : elle concerne le statut, le mode de donation et la détermination de cette référence pure (Nichanian. p.67). Dans la pratique on fait comme si la détermination conceptuelle était suffisante pour assurer la constitution originaire des objets mathématiques en tant qu'objets-structures (Nichanian.

p.140, 17). Mais en fait **cette référence pure consacre le primat de signes dont le sens se trouve dissocié de toute désignation d'objet.** Le signe ne viendrait-il pas nécessairement avant l'objet ? C'est Zermelo qui a attiré l'attention sur cette conséquence paradoxale de la transformation de la notion d'objet, résultant de ce déplacement d'ancrage des objets mathématiques, de l'intuition a priori à la notion d'ensemble. Se donner une référence pure de toute dénomination d'objet pose la question de la signification des signes dans les énoncés axiomatiques (Nichanian p.22-24). Zermelo l'a explicitement exposée à propos de la détermination conceptuelle de ce qu'est un «ensemble»[1] :

> **les lettres d'individus** dans les énoncés axiomatiques («si a et b sont deux points, ou deux ensembles, alors il existe c tel que... ») doivent alors avoir une dénotation; d'où reçoivent-ils cette dénotation, sinon du système d'axiomes lui-même? Seulement à moins d'en rester au caractère conditionnel de ces énoncés, une telle dénotation n'est pas encore là au moment où les propositions axiomatiques s'énoncent. Il faut donc fournir à ces lettres d'individus une dénotation au préalable, et on n'échappe pas à cela. C'est la seule fonction de ce que Zermelo appelle ici un "domaine d'individus". Il confond évidemment cette fonction avec celle que nous avons signalée en premier lieu: celle de fournir un domaine d'application, formé d'objets déjà déterminés, au si-alors apophantique.
>
> ...
>
> Que désignent en effet les lettres a, b, dans les premiers axiomes hilbertiens («Si a et b sont des points, il existe une droite e telle que a et b se trouvent sur e» etc)? Ont-elles **une signification, prête avant l'énoncé** des axiomes, s'il est vrai que les axiomes doivent eux-mêmes déterminer les objets? Peut-on dire qu'elles reçoivent **une signification après-coup, dans** le système d'axiomes ?
>
> Nichanian 1979, p.93-94, 200

Il y a là un paradoxe bien mis en évidence par Skolem (1922) et un paradoxe qui ne cesse d'être présent dans l'enseignement des mathématiques dès les premières années. Mais n'anticipons pas. La formalisation va ouvrir une issue à ces difficultés en permettant de traiter la question de la compatibilité des axiomes.

Ce caractère paradoxal de la relation entre signe et objet tient à l'importance nouvelle que les propositions ou, plus exactement, que l'organisation théorique d'un ensemble de propositions prend dans la constitution des objets mathématiques. Avec le projet d'une refondation logique, ce sont les exigences concernant la valeur épistémologique des axiomes et, également, celles concernant les critères d'acceptabilité d'une proposition comme définition qui changent. En effet, pour définir un objet-structure, il n'est plus possible de se limiter à un seule proposition pour comprendre, mais il faut prendre en compte un ensemble de propositions, cet ensemble devant satisfaire à la fois des exigences du point de vue de sa capacité de production déductive de nouvelles propositions et du point de vue de la compatibilité logique de ce qu'il permet de produire. En d'autres termes, les propositions primitives d'une théorie ne peuvent plus être considérées séparément les unes des autres, comme dans les axiomatiques matérielles, mais par rapport au système qu'elles forment. Et l'intérêt de ce système est dans l'ensemble de propositions nouvelles qu'il permettra de produire. C'est cette notion de système de propositions primitives, envisagé du point de vue à la fois de sa capacité à fonctionner de façon autonome et de sa puissance de déduction, indépendamment des objets (objets-structures ou autres) dont il traite, qui va ouvrir la voie à l'autonomie de systèmes purement sémiotiques.

La nécessité de prendre en compte un ensemble de propositions, et non plus seulement chaque proposition pour elle-même, n'est pas apparue immédiatement. Il a fallu la prise de conscience

---

[1] Frege avait déjà soulevé cette question dans ses lettres à Hilbert en 1899-1900 et dans les articles "Uber die Grundlagen der Geometrie" de 1903 et 1906 (N. p.17-18, note 35, 199-207)

de l'importance de la compatibilité des axiomes entre eux. Dans son ouvrage de 1899, Hilbert ne s'était préoccupé de montrer la compatibilité des axiomes que de façon très relative, en supposant le caractère non-contradictoire de l'arithmétique. C'est seulement à partir de 1904, que ce problème est apparu comme le problème central, lorsque la question de la non contradiction des axiomes de l'arithmétique s'est trouvée explicitement posée (Hilbert 1904; Nichanian p.81-82, 100-101). Et cela d'autant plus que pour Hilbert, «l'existence équivaut à la non-contradiction d'un système d'axiomes» (Nichanian. p.110, 80). Cette prise de conscience de la priorité du système des propositions sur chaque proposition considérée isolément va avoir deux conséquences.

Tout d'abord, l'attention portée à l'importance de la compatibilité des axiomes a entraîné une exigence de formalisation qui a conduit directement à la métamathématique (Hilbert 1922, *Neubegründung der mathematik* (Nichanian, p. 113, 148). En effet, pour se donner les moyens d'une telle démonstration, **les signes, ou plus exactement leurs arrangements, ont été promus au statut d'objet** (Nichanian, p.157, 116, 21, 101-102). C'est dans un tel changement de statut que les signes peuvent être dits «sans signification». Tout le problème a alors consisté à «savoir quelles seront les mathématiques qui seront utilisées dans la métalangue, puisqu'il en faut. Ces mathématiques devront être les plus élémentaires possibles, et en particulier ne faire intervenir aucun procédé qui dépasse le point de vue intuitionniste; Hilbert appelle ces procédés "finitistes".» (Nichanian, p.112). Nous sommes alors au seuil de la conception de cette machine universelle de traitement des symboles évoquée plus haut.

Ensuite, cette prise de conscience a conduit à une différenciation plus marquée dans les critères d'acceptabilité d'une proposition comme définition. Les définitions ne fonctionnent plus seulement selon un critère de comparabilité, comme les définitions classiquement utilisées dans les sciences naturelles et dans toutes les disciplines qui accordent une place essentielle à l'observation : là c'est la prise en compte des ressemblances et des différences qui constitue la base de toute définition et cela en vue de pouvoir classer un ensemble très diversifié de données. Elles fonctionnent, au contraire, selon un critère d'antériorité : ce sont les conditions minimale de détermination qui deviennent la base des définitions et cela en vue d'une capacité maximale de productivité déductive (Duval 1995, p.296-301). En effet, la détermination du sens d'une proposition ne se faisant plus seulement au niveau du contenu de cette proposition considérée pour elle-même mais à celui d'un système auquel on la rattache, c'est par rapport aux possibilités de dérivabilité déductive que la valeur épistémologique d'une définition se retrouve retenue. Durant cette troisième période un clivage très net s'instaure donc entre les définitions qui fonctionnent sur ***des critères de comparabilité et d'exhaustivité***, comme dans tous les domaines où c'est l'observation[1] qui joue le rôle fondateur dans la constitution de la science, et celles qui fonctionnent selon ***des critères d'antériorité et de compatibilité***, comme dans ce domaine où c'est la *déduction* qui joue le rôle fondateur dans la constitution de la science. Ces deux types de définition non seulement renvoient à des modes différents de fonctionnement cognitif mais ils conduisent à poser la question du rapport des objets aux représentations en des termes totalement différents, comme nous le verrons dans la seconde partie de cet article.

---

[1] Nous prenons ici le terme «observation» dans une acception très large, en incluant l'expérimentation, pour signifier le recours à une source de données non construites par l'esprit humain, recours dépendant de la «médiation instrumentale externe». L'opposition entre observation et déduction correspond à deux paradigmes différents de la science (cfr. signe et objet IIème partie).

SIGNE ET OBJET (II)

QUESTIONS RELATIVES À L'ANALYSE DE LA CONNAISSANCE

Raymond DUVAL

There are now two classical, sometimes opposite, approaches in order to analyse mathematical knowledge acquisition: the epistemological one and the didactical one. They are very difficult to link together and they leave the cognitive archictecture and the awareness of learners aside. In fact, we must distinguish three basic standpoints: the scientific one, the cognitive one and the phénomenological one. The undersanding of knowledge acquisition processes depends theses three standpoints taken into account.

We compare the specific requirements of these standpoints according to the main criteria for knowledge analysis. We can see some misleading similaraties or parallelisms between the distinctions usually made in each standpoint. And, above all, we can see where and how the processes described in each of them can be articulated. Thus we sketch out a model for knowledge analysis in order to developp mathematical understanding in learning contexts.

Dès que l'on cherche à analyser la connaissance dans le but de **découvrir les conditions de la formation et de l'acquisition des connaissances**, on se trouve très vite pris dans le conflit entre deux points de vue souvent présentés comme exclusifs: le point de vue scientifique et le point de vue psychologique. Ce conflit a surgi au XIXème siècle à propos des premières analyses des processus psychologiques susceptibles de sous-tendre la pensée logique. Elles ont été rejetées sous l'accusation de «psychologisme», c'est-à-dire de réduction entraînant la méconnaissance des conditions d'une démarche logique valide. Ainsi c'est cette accusation que Frege a reprise contre l'ouvrage de Husserl *La philosophie de l'arithmétique* (1891) ouvrage qui présentait une genèse phénoménologique de la notion de nombre. Et Piaget, dans des conférences à l'université de Manchester en 1952, éprouvait encore le besoin de défendre la possibilité et l'intérêt de tels essais :

> La question de savoir si les structures et les opérations de la logique correspondent à quelque chose dans les processus réels de notre pensée et si ceux-ci sont conformes à de lois logiques est encore une question actuelle
> Piaget 1953, p.XVII.

Plus récemment ce conflit a resurgi à propos de l'enseignement des mathématiques, avec les problèmes nouveaux que la «massification» de l'enseignement secondaire a soulevés. A l'approche psychologique, renouvelée par Piaget, on a opposé une approche purement épistémologique qui, au nom du principe piagetien de parallélisme entre les phases du développement intellectuel au plan individuel et les étapes historiques du développement de la pensée mathématique et physique, prend l'histoire comme repère pour analyser les problèmes d'apprentissage ou d'enseignement. Il ne s'agit pas là d'un débat purement théorique, car, sous le point de vue épistémologique, ce que l'on défend c'est que les élèves «apprennent ou fassent vraiment des mathématiques» et, sous le point de vue psychologique, c'est l'acquisition effective de «savoirs» mathématiques par des individus en formation initiale que l'on essaie d'analyser. L'enjeu de ce débat est donc important. Il s'agit de l'apprentissage des mathématiques par tous les enfants et par tous les adolescents scolarisés: à quelles conditions peuvent-ils s'approprier les démarches de la pensée mathématique et accéder aux différents objets mathématiques enseignés ? Toute tentative de réponse à cette question fondamentale

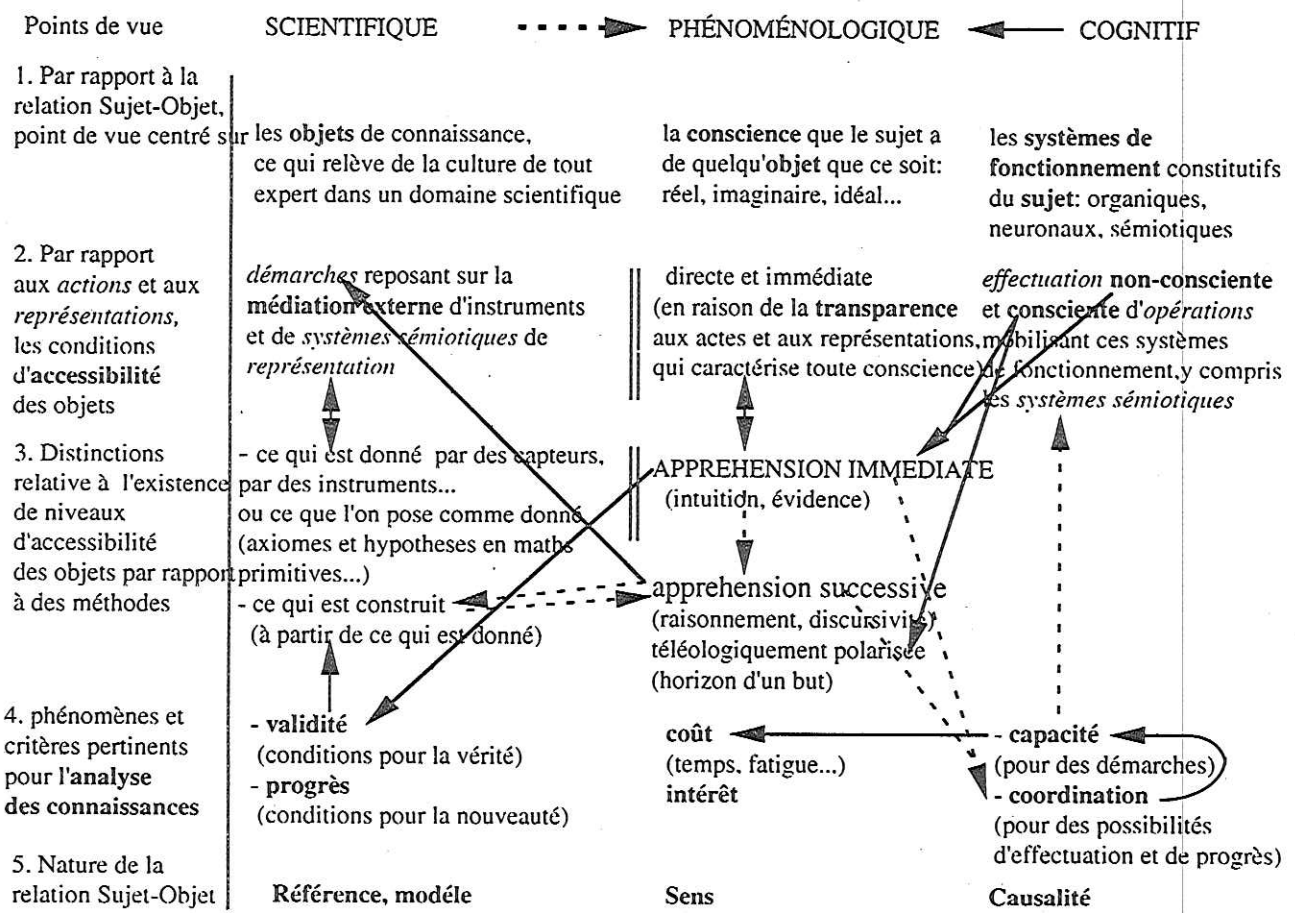
©
Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
6 (1998) (p. 165-196) - IREM de Strasbourg

d'un point de vue éducatif semble piégée par ce conflit thématisé en un dilemme : ou bien on s'intéresse d'abord aux mathématiques et alors l'apprentissage ne peut que suivre la présentation de «situations» mathématiques devant être «riches» «fondamentales» «intéressantes»... sans que l'on ait à se préoccuper du fonctionnement cognitif humain que l'activité mathématique requiert et des facteurs de développement de ce fonctionnement cognitif, ou bien on essaie de comprendre et de prendre en compte ce fonctionnement et alors on ne pourrait qu'être étranger à des situations d'apprentissage des mathématiques !

En fait, l'opposition dont ce conflit s'est nourri est trop simple pour correspondre à la réalité de cette activité requise pour pouvoir accéder à une connaissance scientifique. La connaissance est une activité trop complexe pour que l'analyse de ses processus de fonctionnement puisse être réduite à la prise en compte d'un seul point de vue. Contrairement à ce que laisse croire ce débat récurrent, il n'y a pas seulement deux points vue à prendre en compte, le point de vue scientifique et le point de vue psychologique, mais trois. Car, en épistémologie comme en didactique ou en pédagogie, on associe implicitement l'un de ces deux points de vue à un troisième, qui en est pourtant radicalement différent : le point de vue phénoménologique, c'est-à-dire celui de la conscience du sujet. Comment le sujet peut-il avoir accès aux objets de connaissance qui lui sont proposés ? De quels moyens dispose-t-il pour cet accès ? Quel type de transformation consciente, en termes de sens et d'assurance, l'acquisition d'une connaissance entraîne-t-elle ? Ces questions phénoménologiques ne portent pas sur des différences individuelles entre les sujets mais sur **les constantes de ce rapport conscient que tout sujet a concernant l'initiative et le contrôle d'une activité de connaissance.** Ce point de vue phénoménologique ne doit donc être confondu ni avec le point de vue scientifique, ni avec le point de vue psychologique puisque, méthodologiquement, la psychologie ne limite pas la réalité du sujet à sa conscience et qu'elle écarte tout témoignage introspectif c'est-à-dire toutes les auto-observations dans lesquelles les données se confondent nécessairement avec l'interprétation immédiate de celui qui les «vit». Car il n'y a jamais d'accès à la conscience d'un sujet en position de tiers.

Si l'on veut comprendre les conditions de l'acquisition des «connaissances» scientifiques, et en particulier celles des connaissances mathématiques, ces trois points de vue sont également fondamentaux. Aucun ne peut être négligé ou privilégié. C'est ce qui rend si complexe une analyse de la connaissance scientifique ou mathématique conduite dans le but de dégager les conditions de son acquisition par de jeunes élèves. C'est à la distinction et à l'articulation, nécessaires, de ces trois points de vue dans l'analyse de la connaissance que cet article est consacré (les trois colonnes du tableau de la figure 1, ci-après).

Nous allons d'abord montrer la spécificité de ces trois points de vue par rapport à la nature de la relation constitutive de toute connaissance (tableau: lignes 1 et 5). Puis nous examinerons en quoi ils divergent sous des parallélismes apparents. Pour cette comparaison, nous avons retenu trois critères généraux relatifs à l'analyse des connaissances (lignes 2-4): ils nous permettront de mettre en évidence trois oppositions majeures concernant les conditions d'accessibilité aux objets. En effet, chaque point de vue conduit à mettre en avant des contraintes, des conditions de fonctionnement ou des processus hétérogènes. Enfin, nous verrons pourquoi chaque point de vue doit être resitué dans le contexte global du fonctionnement de l'activité de connaissance chez un sujet humain, du moins si l'on veut comprendre comment des élèves en formation initiale peuvent entrer dans des univers de connaissances en continuelle expansion et en continuelle réorganisation. Le schéma construit en prenant comme noeuds certaines cases du tableau (figure 1) représente, à titre d'exemple, certains des processus du fonctionnement global de l'activité de connaissance chez un sujet humain.


Points de vue
SCIENTIFIQUE
PHÉNOMÉNOLOGIQUE
COGNITIF
1. Par rapport à la relation Sujet-Objet, point de vue centré sur
les objets de connaissance, ce qui relève de la culture de tout expert dans un domaine scientifique
la conscience que le sujet a de quelqu'objet que ce soit: réel, imaginaire, idéal...
les systèmes de fonctionnement constitutifs du sujet: organiques, neuronaux, sémiotiques
2. Par rapport aux actions et aux représentations, les conditions d'accessibilité des objets
démarches reposant sur la médiation externe d'instruments et de systèmes sémiotiques de représentation
directe et immédiate (en raison de la transparence aux actes et aux représentations, qui caractérise toute conscience)
effectuation non-consciente et consciente d'opérations mobilisant ces systèmes de fonctionnement, y compris les systèmes sémiotiques
3. Distinctions relative à l'existence de niveaux d'accessibilité des objets par rapport à des méthodes
- ce qui est donné par des capteurs, par des instruments... ou ce que l'on pose comme donné (axiomes et hypotheses en maths primitives...)
- ce qui est construit (à partir de ce qui est donné)
APPREHENSION IMMEDIATE (intuition, évidence)
apprehension successive (raisonnement, discursivité) téléologiquement polarisée (horizon d'un but)
4. phénomènes et critères pertinents pour l'analyse des connaissances
- validité (conditions pour la vérité)
- progrès (conditions pour la nouveauté)
coût (temps, fatigue...)
intérêt
- capacité (pour des démarches)
- coordination (pour des possibilités d'effectuation et de progrès)
5. Nature de la relation Sujet-Objet
Référence, modéle
Sens
Causalité

I. Les trois points de vue possibles dans l'analyse de la connaissance

De nombreux modèles philosophiques, psychologiques ou épistémologiques ont été proposés pour analyser la connaissance. Tous s'appuient sur la même caractérisation du phénomène de la connaissance en tant qu'activité fondamentale propre aux espèces vivantes évoluées et, plus particulièrement, à l'homme : *l'activité de connaissance consiste dans la relation d'un sujet à un objet*. Pour preuve, ces deux déclarations, l'une extraite des *Quaestiones disputatae de Veritate* (1256) de Saint Thomas d'Aquin, ouvrage donnant une synthèse des discussions séculaires du modèle qu'Aristote avait proposé dans le troisième livre du *Περι Ψυχης*, et l'autre extraite d'un ouvrage contemporain *Biologie et connaissance* (1967). Le modèle piagetien est particulièrement représentatif non en raison de sa forte influence en didactique des mathématiques, mais parce que Piaget y a repris, à travers les ouvrages de Brunschvicg, une analyse épistémologique des mathématiques et de la physique, qui est d'inspiration kantienne:

> **res cognita** dicitur esse ***cognitionis objectum***, secundum quod **est extra cognoscentem** in seipsa subsistens, quamvis **de re tali** non sit cognitio ***nisi per id quod de ipsa est in cognoscente***
>
> Thomas d'Aquin 1820, qu. 14 art. 8, ad 5 (traduction et commentaire en annexe)

> **Toute connaissance**, en effet, de quelque nature qu'elle soit, soulève **le problème des relations entre le sujet et l'objet** et ce problème donne lieu à de multiples solutions selon que l'on attribue cette connaissance au sujet seul, à une action de l'objet ou à des interactions de diverses formes. Or ***le sujet étant un aspect de l'organisme*** et ***l'objet un secteur quelconque du milieu***, le problème de la connaissance correspond d'un tel point de vue au problème des relations entre l'organisme et le milieu...
>
> Piaget 1967, p. 65

Naturellement, les différences et les divergences entre les modèles sont plus importantes que cette référence commune à la relation d'un sujet à un objet. Car les modèles ne mettent pas en évidence les mêmes processus de fonctionnement cognitif ou les mêmes processus d'acquisition des connaissances. Mais si l'on examine leurs problématiques et leurs analyses on peut remarquer qu'ils sont centrés, de façon prioritaire voire exclusive :

— sur les objets indépendamment des représentations que les sujets en ont, comme dans le projet antikantien de Bolzano repris par Frege, ou comme dans la partition cartésienne des représentations en fonction du caractère, objectif ou non, de leur contenu,

— sur les structures du sujet, celles-ci déterminant les types d'objets auxquels il est capable d'avoir ou non, accès, comme avec le modèle kantien d'une «architectonique de la raison pure» ou avec les modèles récents d'«architecture de la cognition»,

— sur la nature de relation existant entre le sujet et l'objet. Mais ici une distinction, correspondant à une différenciation historiquement tardive, doit être faite entre représentation et conscience.

Pour désigner cette relation, c'est le terme «représentation» qui s'est d'abord imposé. Déjà attesté au moyen âge1, il a pris à la suite de Descartes une importance primordiale dans l'analyse de la connaissance en tant que science. Mais une scission s'est peu à peu produite entre les *représentations objectives* qui relèvent uniquement d'un système de règles et les *représentations subjectives* qui relèvent d'organisations ou de l'histoire propres aux sujets. De sorte que le terme «représentation» a très vite cessé de désigner la relation entre sujet et objet pour ne plus désigner que des moyens d'accès, valides ou non, du sujet à l'objet ou, au contraire, que des croyances liées à l'age, au

milieu.. **Cette scission a commencé à se produire dès que l'on a cessé d'assimiler implicitement représentation et conscience.**

Si beaucoup de modèles partent de la nature «représentationnelle» de la relation du sujet à l'objet, en revanche la plupart négligent l'importance du caractère ***conscient*** de cette relation. Et cela pour les modèles qui se situent aussi bien dans une perspective épistémologique d'acquisition des connaissances que dans une perspective purement psychologique! Le caractère conscient des représentations serait un caractère secondaire, car la conscience serait un phénomène purement de surface ou renverrait à des particularités strictement individuelles. D'où la question récurrente: la conscience du sujet est-elle fondamentale pour analyser les phénomènes de connaissance scientifique (du moins ceux qui se rapportent à leur développement ou à leur acquisition dans le cadre d'un apprentissage scolaire qui se révèle être long et complexe)? On ne peut pas cependant ignorer le fait irrécusable, comme Descartes l'avait déjà bien compris, que la relation entre un sujet et un objet s'initialise, se contrôle et se modifie au niveau de la conscience que ce sujet en prend. Bien qu'elle ait une dimension représentationnelle, la conscience dépasse toute représentation.

La connaissance est une activité complexe qui présente trois faces différentes, selon ce que l'on privilégie dans l'analyse de la relation sujet-objet. Nous les désignerons respectivement comme le point de vue scientifique, le point de vue cognitif et le point de vue phénoménologique (Fig. 2, ligne 1). Ce que l'on appelle, depuis guère plus d'un siècle, l'«épistémologie» revient à tenter de fusionner le point de vue scientifique, lequel est spécifique à une discipline, avec l'un des deux autres points de vue. La force de séduction de la démarche cartésienne est de se trouver en deçà d'une différenciation des points de vue scientifique et phénoménologique. La particularité de l'épistémologie génétique de Piaget, laquelle repose sur une interprétation de la relation sujet/objet en termes d'«adaptation» et décrit ses processus par une succession de «déséquilibres» et d' «équilibrations», est d'avoir tenté de fonder le point de vue proprement scientifique non sur le point de vue phénoménologique mais sur celui, cognitif, des structures biologiques du sujet.

Les trois points de vue possibles pour l'analyse de la connaissance étant ainsi distingués, nous pouvons maintenant en indiquer brièvement les caractéristiques (Fig.1, lignes 2 et 4).

a. Caractéristiques de la connaissance du point de vue scientifique : les conditions «objectives» d'accès aux objets

Il suffit de regarder l'histoire des sciences, à n'importe quelle période de leur histoire ou de leur développement pour voir les deux caractéristiques majeures qui ont creusé un fossé de plus en plus important entre la connaissance comme science et les différentes formes de connaissances spontanées: la **nécessité d'une médiation externe**, à la fois instrumentale et sémiotique, et la **double exigence de validité et progrès**. Ces deux caractéristiques sont d'une certaine manière complémentaires et déterminent les conditions nécessaires d'accès aux objets.

La médiation externe est instrumentale. Cette médiation instrumentale s'est avérée, et s'avère toujours fondamentale à la fois pour élargir le champ des phénomènes accessibles et pour permettre des observations fondées sur des mesures. Il suffit de rappeler ici le rôle joué par les instruments d'optique dans l'essor des sciences au XVIIème (de Galilée 1609 à Hook 1665 et à Van Leeuwenhoek)! Le progrès des connaissances scientifiques dépend du progrès dans les instruments et les appareils que l'on est mesure de réaliser techniquement.

Mais la médiation externe est aussi sémiotique. Cette médiation sémiotique s'avère fondamentale pour l'organisation des relevés d'observation ou d'expérimentation, et pour leur traitement. Il suffit de rappeler ici le développement, en marge du langage naturel ou par dérivation de ce langage, de systèmes de signes et de nomenclatures qui vont constituer des «langages scientifiques». Ces langages scientifiques sont les moyens nécessaires à la désignation des objets comme à la possibilité de traitements pouvant prendre la forme d'algorithmes, etc. L'écriture, c'est-à-dire la production de signes et de formes selon la modalité visuelle, a été la condition nécessaire pour le développement de ces systèmes sémiotiques de représentation. Ainsi les nombres, en tant qu'objets différents et indépendants des choses dénombrées, n'ont pu devenir accessibles qu'avec la formation d'un système d'écriture de position à base soixante, probablement au début du IIe millénaire avant J.C. : les étapes de la «naissance du nombre»[1] ont été celles de la conquête d'un système d'écriture de position. Que l'on songe aussi à l'importance du développement d'une écriture littérale pour le développement de l'algèbre. Et que l'on songe, également, au développement considérable des notations et des systèmes de représentation en mathématiques de Descartes à Peano.

L'exigence de validité est d'une certaine façon plus forte que celle de progrès, cette dernière étant très liée à la contingence historique des découvertes et des innovations techniques. L'exigence de validité procède de la centration exclusive sur les objets tels qu'ils peuvent être atteints ou découverts au terme d'opérations et de démarches indépendantes du fonctionnement cognitif propre aux sujets, c'est-à-dire indépendantes de leurs représentations comme des éventuelles appréhensions directes qu'ils pourraient en avoir. Cette exigence de validité porte sur l'emploi des moyens et des procédures mises en oeuvre pour établir une connaissance: elle requiert à la fois un examen de leur pertinence et un contrôle des différentes phases de leur mise en oeuvre. **C'est pourquoi l'exigence de validité, inhérente à la connaissance comme science, implique une médiation externe à la conscience des sujets.**

b. Caractéristiques de la connaissance du point de vue cognitif : les capacités «subjectives» d'accès aux objets

Le point de vue cognitif porte sur l'activité de connaissance en tant qu'elle est produite, ou devrait pouvoir être produite par un être individuel, c'est-à-dire par un système physique autonome (un organisme, sujet humain ou animal, un robot...), lui permettant ainsi d'accéder à un domaine d'objets, de discriminer des informations et d'élaborer des réponses appropriées. Lorsqu'on se place de ce point de vue, on cherche à répondre à ces deux questions :

— quel est le type spécifique de fonctionnement requis pour qu'un sujet puisse accéder à un domaine d'objets déterminés ?

— quelles sont les structures ou les organisations internes permettant à un sujet d'effectuer les opérations nécessaires pour ce fonctionnement ?

---

[1] Nous reprenons ici le titre d'un article de G. Goldstein dans le numéro de *La Recherche* consacré aux nombres (1995, n°278). On peut mesurer le progrès de la réflexion sur cette question en relisant les pages que Brunschvicg y consacrait dans son ouvrage de 1912 *Les Etapes de la philosophie mathématique*, qui a servi, avec celui paru dix ans plus tard *L'expérience humaien et la causalité physique*, de base théorique aux travaux de *La genèse du nombre chez l'enfant* (Piaget 1924, p. 600-607). Brunschvicg y explique la genèse de la notion de nombre par les seules opérations de mise en correspondance et de sériation (Brunschvicg 1972, p. 8, 10, 16, 403-404, 477-480).

Toutes les recherches ont montré qu'on ne peut pas élaborer un modèle pertinent et opérationnel répondant à ces deux questions sans prendre en compte les deux données fondamentales suivantes : l'activité de connaissance dont un système autonome est capable dépend de son **«architecture fonctionnelle»,** et cette architecture fonctionnelle implique **une coordination des différents systèmes permettant de remplir les fonctions** de cette architecture fonctionnelle.

Un sujet ou un système capable d'un certain type de connaissance est une organisation de plusieurs systèmes de fonctionnements, et il faut autant de systèmes de fonctionnements qu'il y a de fonctions à remplir pour produire le type connaissance souhaité. Il est maintenant classique de citer le document de von Neumann (1945), qui constitue comme une date dans l'invention technique de l'ordinateur :

> Si l'appareil doit être souple, c'est-à-dire aussi général que possible, alors on doit distinguer entre les instructions d'un problème...et les organes de contrôle général qui lisent et exécutent ces instructions, quelles qu'elles soient. Les premières doivent être enregistrées (une fonction mémoire), les secondes sont représentées par un organe dans l'appareil. Nous appelons «contrôle central» cette dernière fonction et elles seule
>
> von Neumann First draft of a report on the EDVAC

Ce serait une erreur de restreindre cette notion d'«architecture fonctionnelle» à la conception même de l'ordinateur. Il s'agit d'une application extrêmement féconde dans l'analyse de la connaissance humaine. Nous avons déjà indiqué dans la première partie de cet article que l'un des sauts dans le passage du point de vue épistémo-phénoménologique de Descartes au point de vue épistémo-cognitif de Kant consistait dans la substitution d'une «architectonique de la Raison pure» à la simple postulation d'un sujet dont le fonctionnement aurait la simplicité de la perception immanente immédiate du *cogito*. Et la psychologie cognitive depuis Broadbent (1958) et Newell et Simon (1963) n'a cessé d'élaborer et de diversifier des modèles d'«architecture fonctionnelle» pour rendre compte des différentes formes de l'activité de la connaissance. Rappelons le titre d'un ouvrage de Fodor qui exprime admirablement la signification de cette première caractéristique de l'analyse cognitive de la connaissance: *La modularité de l'esprit* (1983; tr. 1986).

Si la connaissance dépend d'une «architecture fonctionnelle», les différents systèmes de fonctionnement qu'elle requiert doivent être coordonnés entre eux. L'une des principales différences entre l'architecture fonctionnelle des systèmes experts que l'on implémente sur un ordinateur et celle de l'intelligence humaine tient à ce que **la coordination des systèmes, pour l'être humain, n'est pas donnée au départ : elle doit être progressivement acquise par apprentissage et, lorsqu'elle est réalisée, elle conserve toujours une certaine flexibilité.** En outre, tous le systèmes requis par l'architecture fonctionnelle de l'intelligence humaine ne sont pas donnés au départ. **Certains doivent être transmis par l'environnement.** Tel est le cas des systèmes sémiotiques. Mais cela ne signifie aucunement que les systèmes sémiotiques aient un rôle secondaire dans la formation des connaissances. **Au contraire ils permettent aux individus de s'approprier plus rapidement tous les acquis de générations antérieures** comme le notait Wallon en 1956 à propos du langage:

> C'est là (dans l'emploi du langage) le pas essentiel que l'évolution biologique a fait franchir à l'homme. Il y a dans son système nerveux des centres qui lui permettent l'usage de la parole... *La possibilité est née de civilisations accroissant leur héritage* d'âge en âge. Les individus meurent, mais *le langage acquis demeure et fructifie*... l'homme est lui-même transformé par des réalisations mentales techniques et sociales

> que le langage lui a permis d'élaborer...Tout individu subit l'empreinte de la civilisation qui règle son existence et s'impose à son activité. Le langage qu'il en reçoit est le moule de ses pensées et donne à ses raisonnements leur structure...
>
> Wallon La psychologie génétique Bulletin de Psychologie p.4

Tous les systèmes sémiotiques remplissent ce rôle de mémoire transmissible des démarches de connaissance inventées ou crées par les générations antérieures.

La notion d'une architecture fonctionnelle nous renvoie donc à l'idée de capacité globale d'un sujet pour accéder à un type d'objet et à celle de coordination entre des systèmes hétérogènes, leur synergie permettant, seule, d'accéder à ce type d'objet. On voit donc l'importance du déplacement effectué lorsqu'on passe d'un point de vue scientifique à un point de vue cognitif. L'activité de connaissance n'est plus analysée par rapport à la validité des méthodes et des démarches, ou par rapport au type de médiation instrumentale et sémiotique à mettre en oeuvre, mais par rapport aux capacité du sujet pour effectuer les opérations, sémiotiques ou instrumentales requises. Cela implique non seulement l'appropriation des différents systèmes constitutifs d'une architecture fonctionnelle, mais également la mise en place de leur coordination. C'est cela qui constitue l'enjeu des «apprentissages fondamentaux», y compris dans les disciplines scientifiques.

c. Caractéristiques de la connaissance du point de vue phénoménologique: les exigences «vécues» de certitude et d'accès le plus direct possible aux objets

La connaissance est une activité consciente, c'est-à-dire une activité qui, non seulement, s'accomplit dans le monde d'un sujet mais qui dépend aussi de l'initiative et du contrôle de ce sujet. La conscience se caractérise par une double orientation.

L'une est de nature intentionnelle, définie par cette formule célèbre : toute conscience est d'emblée conscience de quelque chose (Husserl 1972, p.148-150, 178-180). Cela veut dire qu'il n'y a pas de conscience qui ne soit pas dirigée *sur quelque chose qui lui soit immédiatement*[1] *accessible et qui prenne d'emblée statut d'objet*. Et ce qui lui apparaît, et qu'elle remarque, semble se détacher d'*un horizon d'autres objets* vers lesquels elle pourrait tourner son attention. A cette première orientation correspond la première caractéristique phénoménologique de la connaissance: la transparence, c'est-à-dire le fait que l'accès à un objet est vécu comme direct et immédiat. Cela veut dire que **du point de vue du sujet, il n'y a pas de représentation, mais seulement des objets qui lui apparaissent.** Rien d'intermédiaire ne s'interpose entre lui et ce dont il est actuellement conscient. Pour reprendre une terminologie husserlienne, cette relation est vécue, elle n'est pas objectivée : «si nous vivons, pour ainsi dire dans l'acte effectué... le moi comme point de référence n'apparaît pas» (Husserl 1972, p.178). L'acte vécu n'apparaît pas à la conscience, c'est seulement l'objet corrélat de l'acte vécu qui apparaît. L'orientation intentionnelle de la conscience signifie donc ***la transparence de ses actes aux objets qui se manifestent immédiatement à elle***. Et cela indépendamment du fait que l'objet existe vraiment soit un effet d'illusion (Heidegger 1975, p.88-89, 95).

---

[1] Est phénoménologiquement immédiat ce qui ne prend aucun laps de temps perceptible par la conscience (ne fût-ce qu'une seconde). Mais d'un point de vue cognitif ce qui est phénoménologiquement immédiat prend un laps de temps (quelques centièmes de seconde) et résulte d'un ensemble de traitements «automatiques», c'est-à-dire effectués de façon infra-consciente à des échelles où les micro-durées ne sont plus perceptibles. L'automatisation et la «compactification» des traitements de traitements, d'abord effectués consciemment sur des objets immédiats, sont les conditions pour pouvoir accéder à des objets qui autrement resteraient inacessibles au sujet.

L'autre orientation est de nature téléologique : la conscience peut se fixer des buts et organiser ou planifier son activité en fonction de ces buts. Généralement lorsque l'on veut prendre en compte la conscience on ne retient que cette seconde orientation. Mais c'est l'horizon inhérent à la première orientation qui donne la possibilité de cette seconde orientation. A cette seconde orientation de la conscience correspond la seconde caractéristique de la conscience : ***le coût d'une démarche pour atteindre un objectif.***

Lorsqu'un sujet reconnaît ou identifie des objets d'une façon immédiate, au premier coup d'oeil, sans même avoir le temps de le remarquer, le fonctionnement sous-jacent de l'architecture fonctionnelle qui est mobilisée lui est invisible. Il s'agit là d'une **appréhension immédiate**. Transparence des actes accomplis et appréhension immédiate sont étroitement liées. Et cela se traduit pour le sujet, par un coût nul à la fois en temps et en démarches à accomplir.

Mais tout n'est jamais immédiatement accessible à la conscience, quelle que soit l'ampleur des traitements infra-conscients sur laquelle elle s'appuie pour s'ouvrir un monde d'objets immédiatement accessibles. Toute conscience émerge dans un horizon d'objets non immédiatement accessibles, mais qui peuvent cependant être atteint par une **succession d'appréhensions immédiates**. Et c'est par rapport à cette succession que s'imposent le sentiment d'un coût et la nécessité d'un contrôle. Le coût d'une succession augmente non seulement en fonction de la longueur des traitements à effectuer consciemment mais également de la complexité de leur planification pour pouvoir les effectuer dans une ordre efficace. Un contrôle conscient ne peut jamais porter sur une appréhension immédiate, mais sur une succession d'appréhensions immédiates. Et un tel contrôle ne peut se faire qu'en fonction de l'orientation téléologique de la conscience.

Ce point de vue phénoménologique est radicalement différent et du point de scientifique et du point de vue cognitif. Cette différence peut être aisément vérifiée sur la notion même de sujet et sur la nature des relations comme des critères d'explication.

D'un point de vue phénoménologique le sujet est une réalité simple et homogène, un «centre de fonctionnement» inanalysable. D'un point de vue cognitif, le sujet est au contraire une «architecture fonctionnelle» c'est-à-dire un ensemble de systèmes hétérogènes dont la coordination résulte d'un long apprentissage, demeure flexible et passible de défaillances. Nous verrons que l'un des problèmes est celui des rapports et des interactions éventuelles entre le point de vue phénoménologique sur la connaissance avec d'une part le point de vue cognitif et, d'autre part, le point de vue scientifique.

Une analyse phénoménologique se différencie d'une analyse strictement cognitive en ce qu'elle est fondamentalement de type sémantique et non pas de type causal (Fig. 2, ligne 5):. les relations acte→ objet y sont interprétées en termes de référence, et non pas en termes de facteurs dont la présence ou l'absence joueraient sur l'occurrence d'un phénomène. Cette analyse sémantique s'effectue selon la méthode de variation telle qu'elle a été dégagée à la suite de Bolzano et de Frege (*supra* (I)). Précisons qu'une telle analyse phénoménologique n'a rien de commun avec une pratique introspective ou avec le *talking aloud* des intentions, des idées ou des images qui «viennent à l'esprit» quand on exécute une tâche.

II. Les oppositions entre ces trois points de vue possibles

L'opposition entre un point de vue épistémologique et un point de vue psychologique dans l'analyse de l'acquisition des connaissances repose en fait sur l' assimilation implicite de deux points entre eux. Sous le terme de «psychologie» on regroupe souvent les points de vue cognitif et phénoménologique. Et une analyse épistémologique est inévitablement portée à mêler les points de vue scientifique et phénoménologique. Car l'analyse des émergences historiques et des progrès des connaissances scientifiques conduit à réintroduire nécessairement la référence à un sujet ou à des sujets, ne serait-ce que par la mise en perspective d'étapes dans la genèse d'une découverte ou par le biais de sa recontextualisation dans les problématiques culturelles ou sociales d'une époque!

Or, entre le point de vue scientifique et le point de vue phénoménologique, comme entre ce point de vue et le point de vue cognitif, il y a des écarts, des contrastes et des oppositions qui excluent toutes les assimilations qui sont faites dans beaucoup de modèles d'acquisition des connaissances comme dans leur utilisation didactique ou pédagogique.

Les points les plus délicats dans l'analyse de la connaissance ne concernent pas les critères pertinents pour «évaluer» une connaissance (ligne 4 de la figure), c'est-à-dire pour estimer son intérêt scientifique ou son intérêt pour le sujet, sa vérité ou son coût... Ils concernent **les conditions d'accessibilité des objets** (Fig. 2, ligne 2) **et la manière de distinguer des niveaux d'accessibilité des objets** (Fig. 2, ligne 3). En effet, les critères pour «évaluer» une connaissance, pour chacun des trois points de vue, sont trop hétérogènes pour qu'on soit tenté de les confondre ou de les opposer. En revanche, il n'en est plus de même pour les conditions et les niveaux d'accessibilité des objets. Il y a ainsi une tendance naturelle à assimiler les points de vue scientifique et phénoménologique pour ce qui concerne les conditions et les niveaux d'accessibilité des objets. Cette tendance se traduit par l'importance donnée à une compréhension conceptuelle que l'on voudrait indépendante de tout langage, par la valeur d'intuition et de simplicité donnée à l'acte de «voir» en opposition au raisonnement, ou encore par le privilège donnée à la «certitude», c'est-à-dire à une «intime conviction» pour reprendre une expression du code de procédure pénale rappelée aux jurés avant qu'ils ne délibèrent ... Contre cette tendance assimilatrice, une séparation rigoureuse de ces trois points de vue conduit à dégager trois oppositions majeures.

a. Le contraste entre la transparence de la conscience aux opérations qu'elle accomplit dans toutes ses appréhensions immédiates et la nécessité d'une médiation externe pour la connaissance scientifique (fig.2 ligne2)

Cette opposition porte sur les conditions d'accessibilité aux objets considérée d'un point de vue phénoménologique et d'un strict point de vue scientifique.

D'un point de vue scientifique, il n'y a pas d'accès aux objets sans la médiation externe d'instruments permettant d'effectuer des mesures et d'élargir le champ de qui est sensoriellement accessible, et sans la médiation externe d'un système sémiotique, ne serait-ce que pour coder, classer les données recueillies. En mathématiques la médiation externe d'un système sémiotique est fondamentale, puisque les objets mathématiques ne sont pas accessibles sensoriellement. Cette médiation externe des systèmes sémiotiques présente deux particularités fondamentales. D'une part elle ne commence pas avec le langage oral, ou plus

exactement avec la pratique orale prégraphique du langage, mais avec l'appropriation d'un système d'écriture, c'est-à-dire avec une pratique écrite soit du langage soit d'un autre système sémiotique. Pour appuyer ces remarques, rappelons les analyses de Husserl dès 1891 dans son ouvrage *La philosophie de l'arithmétique* :

> **La différence entre les signes oraux et les signes écrits est si essentielle pour l'arithmétique** que le fait d'être borné aux premiers aurait rendu impossible tout développement plus poussé de l'arithmétique
> Husserl 1972 p. 300[1]

D'autre part, à la différence de la médiation externe des instruments, **la médiation sémiotique est «intériorisable»** c'est-à-dire elle peut se transformer, pour une grande part, en des traitements infra-conscients et donc devenir phénoménologiquement transparente.

D'un point de vue phénoménologique, au contraire, la conscience actuelle se définit par un vécu d'accès immédiat aux objets, sans rien d' intermédiaire. Ces objets immédiatement accessibles à la conscience actuelle d'un sujet constituent comme un noyau de connaissance qui se donne comme première, évidente, certaine... **C'est cette transparence qui semble rendre inutile ou secondaire la nécessité des signes**, lesquels semblent alors ne pouvoir donner lieu qu'à une connaissance «aveugle» selon la métaphore de Leibniz.

Cette opposition entre le point de vue scientifique et le point de vue phénoménologique sur les conditions d'accessibilité aux objets est à la fois irréductible et relative. Elle est irréductible, en ce sens que cette opposition subsiste quelque soit le degré de formation ou de développement d'un individu. Et c'est sur l'évidence introspective de ce noyau de connaissance immédiate que l'on s'appuie pour postuler une pensée conceptuelle sans langage et pour réduire l'utilisation du langage à une fonction de communication. Mais elle est également relative, en ce sens que le contenu de ce noyau de connaissance dépend de l'ampleur des traitements devenus infra-conscients, et tout particulièrement de ceux intrinsèquement liés à l'utilisation de registres de représentation sémiotique. Ce qui est immédiatement accessible à la conscience d'un sujet va donc considérablement varier selon que le sujet est un débutant ou un expert, un enfant ou un adulte. En d'autres termes, *les seuls objets qui peuvent être identifiés au premier coup d'oeil par un sujet sont ceux dont les opérations et les représentations sémiotiques permettant de les discriminer sont devenues transparentes par «automatisation» au plan infra-conscient.* C'est ce rapport entre le contenu du noyau de connaissance immédiate et la base des traitements inconscients, que la psychologie cognitive a exploré ces dernières décades. Ce rapport est essentiel pour bien poser le problème des processus d'acquisition des connaissances dans le cadre d'une formation initiale.

b L'impossibilité d'une correspondance entre les démarches scientifiques et le vécu de l'activité consciente des sujets (fig. 2 ligne 3)

Cette opposition porte la manière de distinguer des niveaux d'accessibilité. Pour s'en tenir à une première distinction, il y a les objets qui apparaissent immédiatement accessibles ou originaires et il y a ceux qui ne le deviennent qu'au terme de démarches plus ou moins longues et complexes qui doivent donc être méthodiquement contrôlées et organisées. La célèbre distinction des *Regulae* (1628) entre intuition et déduction (règle III), juste avant la définition de la méthode (règle IV et V) est avancée comme un critère pour distinguer deux niveaux

---

[1] Pour un présentation de ces analyses voir Duval 1976.

d'accessibilité des objets

> Pour ne pas tomber à notre tour dans la même erreur, nous allons maintenant passer en revue tous les actes de notre entendement, par lesquels nous pouvons parvenir à la connaissance des choses sans aucune crainte d'erreur: l'on en admet que deux, l'intuition et la déduction
>
> Descartes 1963, p.87

Mais entre ce qui apparaît originaire et évident d'un strict point de vue phénoménologique et ce qui est pris comme premier d'un strict point de scientifique, **il y a un écart qui historiquement n'a cessé de grandir en raison même de la complexité croissante de la médiation externe**, aussi bien instrumentale que sémiotique! Deux raisons vont nous aider à comprendre cet écart grandissant. La première tient aux critères de hiérarchisation de niveaux d'objets et la seconde aux mécanismes mêmes par lesquels cette hiérarchisation peut-être modifiée.

1. D'un point de vue phénoménologique la différence fondamentale pour distinguer les niveaux d'accessibilité des objets est celle entre appréhension immédiate et appréhension successive, c'est-à-dire la nécessité d'une suite d'appréhension immédiates. Les critères de distinction de niveaux vont donc dépendre alors de la longueur de ces suites et du degré de complexité de leur organisation, cette complexité jouant alors sur l'accessibilité de la planification de la démarche à mettre en oeuvre.

D'un point de vue strictement scientifique, les critères de distinction se révèlent plus complexes. Tout d'abord, il est important de bien distinguer deux paradigmes de la science, l'un constitué par l'idéal mathématique de la démonstration et l'autre par la mise en oeuvre d'une méthode expérimentale[1]. Ce qui est pris, ou ce qui est donné, comme premier, comme point de départ, va changer selon le paradigme choisi. Mais quelque soit le paradigme choisi, **ce qui est posé comme premier ne peut être que postérieur, et non pas antérieur, à une médiation externe, instrumentale ou sémiotique.** Et c'est à partir de ce qui est posé comme premier que peuvent se développer des démarches complexes régulées par les méthodes de classement, de traitement, et d'interprétation qui sont propres à chaque discipline.

Naturellement ce qui est ainsi posé comme premier ou comme donné au départ n'est jamais complètement définitif. Et cela en raison du développement technologique et sémiotique de la médiation externe qui résulte des résultats obtenus dans les étapes antérieures de la recherche. Ce développement impose des réorganisations successives des connaissances acquises, en fonction de nouvelles découvertes ou en fonction de décisions théoriques. De cette manière, il se produit toujours une certaine interaction entre ce qui est pris comme point de départ et ce qui peut être acquis au terme des démarches scientifiques. La hiérarchisation scientifique de niveaux d'objets n'est donc jamais établie une fois pour toute. Elle peut être modifiée, et c'est sur les possibilités de cette modification que se fonde la possibilité d'un accroissement des connaissances tant au plan individuel, et donc phénoménologique, qu'au plan scientifique d'un état de connaissances acquises.

---

[1] L'émergence explicite de ces paradigmes comme paradigmes de la science peut être située respectivement avec la publication simultanée du *Discours de la Méthode* et de la *Géométrie* par Descartes en 1637, et avec l'*Introduction à l'étude la médecine expérimentale* de Claude Bernard en 1853. Cependant, indépendamment de l'émergence de ces paradigmes explicites de la science, on ne saurait oublier que les «sciences» dites expérimentales se distinguent des sciences mathématiques par deux caractéristiques majeures : le rôle fondamental donné à la médiation externe instrumentale (pour les mesures et pour l'extension du champ sensoriellement accessible) et le statut primordial des données recueillies.

2. D'un point de vue phénoménologique le domaine des objets relevant d'une appréhension immédiate peut être élargi ou enrichi. De nouveaux objets antérieurement inaccessibles deviennent directement accessibles sans que ceux qui l'étaient déjà, tels les objets de perception, perdent leur caractère de primitivité. Tout se passe alors comme s'il y avait une compactification en un seul acte conscient de multiples appréhensions successives. N'est-ce pas ce que vise Descartes dans la Règle VII lorsqu'il évoque la récapitulation rétrospective des termes de manière à «diminuer le rôle de la mémoire» et à «accroître dans une certaine mesure la capacité de l'esprit» ?

> passer si rapidement de la première proportion à la dernière que je ne laisse presque plus aucun rôle à la mémoire et qu'il me semble avoir une intuition simultanée du tout; de cette manière, en effet, tout en aidant la mémoire, on remédie ainsi à la lenteur de l'esprit et l'on accroît d'une certaine manière sa capacité
>
> Descartes 1963, p. 109

Mais, comme nous le verrons plus loin **cet enrichissement du domaine des objets relevant de l'appréhension immédiate suppose des processus «d'automatisation»**, c'est-à-dire la transformation de démarches effectuées consciemment, et donc prenant du temps et de l'attention, en traitements infra-conscients.

D'un point de vue scientifique ce qui est considéré comme premier ou comme donné dépend des techniques instrumentales utilisées pour recueillir les observations ou de choix théoriques. En ce sens les modifications résultant d'innovations ou de révolutions techniques, ou encore de réorganisations théoriques complètes peuvent constituer de véritables ruptures avec ce qui était considéré antérieurement comme premier. Et c'est sur cette base que l'utilisation de méthodes et de procédures de preuves permet d'accéder à de nouveaux objets. Comme on le voit **la détermination et la modification des niveaux d'objets en terme d'accessibilité se fait, du point de vue scientifique, par une construction théorique.** Le constructivisme se fonde sur l'extrapolation de ce processus du progrès des connaissances scientifiques en lois d'apprentissage et en règles d'une réinvention nécessaire au plan du vécu de la conscience de chaque sujet. Le constructivisme reprend comme un défi didactique la nostalgie husserlienne d'un apprentissage qui, pour la géométrie, coïnciderait avec l'accès de chacun, lecteur ou élève, aux «évidences originaires» :

> La déduction suit dans son progrès l'évidence logique-formelle; mais sans le pouvoir effectivement exercé des activités originaires enfermées dans les concepts fondateurs, donc aussi sans le Quoi et le comment de leurs matériaux pré-scientifiques, la géométrie serait une tradition devenue vide de sens... Mais c'est, hélas, notre situation et celle de tous les temps modernes
>
> Husserl (1936) 1962, p. 195

Il ne peut donc pas y avoir de correspondance entre l'accessibilité des objets d'un point de vue phénoménologique et la manière dont elle se détermine d'un point de vue scientifique. Et il n'y a pas davantage de similitudes dans la manière dont se développe l'accessibilité aux objets scientifiquement et phénoménologiquement. Postuler cette correspondance comme, par exemple, dans l'usage de la distinction entre intuition et raisonnement ne peut être que fallacieux et réducteur quant à la complexité de cette activité qu'est la connaissance.

***c. Les conditions différentes de fonctionnement des représentations sémiotiques du point de vue scientifique et du point de vue cognitif** (fig. 2 ligne 2).*

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler ce que montre l'évolution des problématiques de l'analyse de la connaissance depuis Descartes (première partie de cette article) évolution qui évidemment reflète l'essor et les bouleversements successifs du développement des connaissances scientifiques depuis le début du XVIIème: il n'y a pas de connaissance sans activité de représentation et, surtout, il n'y a pas d'activité de représentation sans mobilisation de systèmes sémiotiques. La médiation externe sémiotique s'est imposée et développée au même titre que la médiation externe instrumentale. Et il est ainsi devenu difficile d'imaginer que l'acquisition des connaissances puisse faire l'économie de l'appropriation des systèmes sémiotiques dont le développement a étroitement accompagné le progrès des connaissances. Sans nier l'importance des systèmes sémiotiques, le véritable problème qu'ils soulèvent est donc celui de leur appropriation par des sujets en situation d'apprentissage : se fait-elle «naturellement», par imprégnation dans un bain de pratiques sémiotiques, à travers des activités de recherche ou d'exploration directement centrées sur les objets ou, au contraire, requiert-elle des activités spécifiques centrées sur la découverte du fonctionnement représentationnel propre à chaque registre ? Le problème réel de l'apprentissage ne se laisse peut-être pas enfermer dans une alternative aussi tranchée, mais il suppose que l'on ait pris conscience que les conditions de «productivité» d'un système sémiotique ne sont pas les mêmes selon que l'on se place du point de vue scientifique ou du point de vue cognitif.

Du point de vue scientifique, on insiste inconditionnellement sur la nécessité de ne pas confondre un objet et sa représentation même si ce sont des représentations que l'on présente explicitement et même si les représentations présentées peuvent à leur tour être traitées comme des objets ! Mais en même temps on développe les «langages scientifiques» c'est-à-dire les moyens d'une médiation sémiotique externe. Et cela non à des fins de communication mais à des fins de traitement, que les traitements consistent dans des opérations de classification ou dans des opérations de calcul. Cela veut dire que les systèmes sémiotiques sont toujours organisés en fonction des types de traitement que l'on veut pouvoir développer. D'où leur caractère monofonctionnel ou spécialisé dont va dépendre leur puissance et leur productivité (Duval 1996, p. 373). Les exigences auxquels ils doivent répondre ne sont pas seulement des exigences d'économie mais également des exigences d'exhaustivité. D'une certaine façon un système sémiotique doit permettre à une démarche d'être systématique. C'est ainsi que Descartes justifiait la méthode de représentation qui permet de convertir des formes géométriques en des expressions symboliques et de résoudre ainsi «tous les problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites». Il explique à propos des procédures utilisées par ses prédécesseurs pour résoudre ces problèmes :

> .... ce que je ne crois pas que les anciens aient remarqué. Car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire autant de gros livres, où le seul ordre de leur propositions nous fait connaître qu'ils n'ont point eu la vraie méthode **pour les trouver toutes**, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontré
>
> Descartes 1954, p.304

D'un point de vue cognitif, le problème est plus complexe car il y a d'une part cette dualité primitive representationnelle que l'on désigne par l'opposition entre langage et image. Cette dualité primitive se manifeste à travers deux registres de représentation sémiotique qui sont fonctionnellement polyvalents, celui de la langue naturelle parlée et celui permettant la représentation graphique des formes («figures», silhouettes...) 2D, 3D/2D. Mais l'acquisition des connaissances d'une part impose le développement d'une spécialisation fonctionnelle de

ces deux registres (Duval 1995, p.174) et, d'autre part, l'appropriation de registres de représentation monofonctionnels. Autrement dit, **c'est une donnée fondamentale de l'activité humaine de connaissance que de fonctionner selon plusieurs registres de représentation sémiotique.** Mais pour que chacun des registres puisse être cognitivement «productif», c'est-à-dire pour qu'il permette au sujet de développer l'activité de connaissance ou de compréhension qu'il rend objectivement possible, il faut qu'il soit coordonné avec au moins un autre registre. **La coordination des registres est la condition de leur mobilisation effective par les sujets à des fins d'exploration, de traitement ou de contrôle**[1]. Si d'un point de vue scientifique, il est essentiel d'avoir des expressions ou des représentations «bien formées», c'est-à-dire respectant les règles permettant aux productions sémiotiques d'avoir un «sens», il est non moins essentiel, d'un point de vue cognitif, que le sujet puisse les convertir en des expressions ou des représentations d'un autre système en conservant la référence aux mêmes objets.

D'un point de vue phénoménologique, il faut se rappeler qu'il n'y a pas de représentation mais seulement des objets qui apparaissent. Cette formulation, simple paraphrase de la définition de la nature intentionnelle de la conscience, peut apparaître pour le moins abrupte dans la mesure où elle semble effacer toute séparation entre les choses et leurs images (tableaux, photos...) ou entre les mots et les choses. Et, surtout, elle semble évacuer la question cruciale pour toute phénoménologie : qu'est-ce qui conduit à reconnaître les signes, mots ou symboles, comme des signes, c'est-à-dire comme des marques faites pour signifier et non pas comme des empreintes de choses ? Ou encore, comment la discrimination des signes et de leurs organisations peut-elle surgir de l'identification perceptive de formes parmi d'autres formes non nécessairement «signifiantes» ? Plus largement, la reconnaissance d'une «intention de signification» suffit-elle à comprendre ce que représente une représentation ? Ces questions nous renvoient, en réalité, au caractère irréductiblement ambivalent des représentations sémiotiques pour la conscience, que ce soit les représentations qu'un sujet produit de lui-même pour lui-même ou que ce soit celles que les autres sujets lui communiquent.

Cette ambivalence des représentations sémiotiques tient au fait que, toute représentation peut, phénoménologiquement, être traitée

— soit comme un objet et réduite à sa forme perceptible signifiante, obéissant ou non à des règles d'emploi ou, au contraire,

— soit comme signification et, dans ce cas, les mots, les expressions deviennent immédiatement transparents à la «chose visée» dans la signification.

Il est intéressant de rappeler ici que les premières analyses des *Recherches Logiques* de Husserl portent sur cette ambivalence phénoménologique des signes (Husserl R.L. I. 1969, p. 46-47, 78-79, 86-87). Or c'est **cette ambivalence phénoménologique des signes qui permet, au choix,** soit de les oublier jusqu'à pouvoir nier leur rôle soit, au contraire, d'en faire des objets en soi de traitement et d'interprétation. Et c'est généralement à cette ambivalence phénoménologique des signes que l'on s'en tient dans la réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Et cela, le plus souvent, dans le seul but de relativiser, ou même de nier l'importance des représentations sémiotiques, dans l'activité de connaissance tant d'un point de vue scientifique que cognitif. Mais les paradoxes et les difficultés d'une telle position apparaissent avec tous les problèmes rencontrés ne serait-ce que pour l'enseignement de l'algèbre !

---

[1] Nous ne prenons ici en compte que la coordination des registres sémiotiques. Mais il est important de rappeler qu'il y a une coordination préalable des registres sémiotique avec des systèmes effecteurs comme la voix ou la main. La prise en compte de ces coordination est essentielle si l'on veut étudier les phénomènes d'expression orale ou écrite.

III. Conséquences pour un modèle d'acquisition des connaissances à l'échelle temporelle de la scolarité obligatoire

Il faut pouvoir prendre en compte de façon cohérente ces trois points de vue pour comprendre comment des individus en formation initiale peuvent accéder au niveau de connaissances considéré comme l'acquis culturel d'une discipline, par exemple en mathématiques. Comment une telle prise en compte peut-elle se faire ? Nous l'avons partiellement représenté par un réseau de liaisons orientées sur la figure (Fig. 2) Le point de départ pour comprendre les mécanismes d'acquisition des connaissances est évidemment l'appréhension immédiate. Car celle-ci correspond au domaine des objets qui sont accessibles à la conscience du sujet apprenant sans médiation externe et sans coût temporel, c'est-à-dire au domaine de ce qu'un sujet est en mesure de discriminer sans avoir besoin de mettre en oeuvre quelque chose (un instrument, l'algorithme d'une opération, un schéma...) ou de reconnaître avant toute activité exigeant un peu de temps ou un «effort» d'attention. **Tout le problème de l'acquisition des connaissances est de comprendre par quelles transformations des objets inaccessibles à un sujet peuvent non seulement lui devenir accessibles** (comme nous le formulions dans l'introduction) **mais devenir objets de son appréhension immédiate.** Ce sont les données de ce problème que nous allons maintenant examiner sous leur forme générale.

Pour cela nous allons tout d'abord examiner le rôle central et régulateur de l'appréhension immédiate dans le déroulement de toute activité de connaissance. Et nous pourrons alors voir pourquoi l'ouverture de cette appréhension immédiate à des objets de connaissance scientifique, et plus particulièrement de nature mathématique, ne suit ni une voie parallèle au cheminement historique des découvertes ni aux étapes d'une stricte construction scientifique, mais implique un détour cognitif. Et ce détour se révèle d'autant plus important que les connaissances à acquérir sont éloignées de l'appréhension immédiate du sujet apprenant. Nous illustrons ces points par l'analyse d'un acte «cognitif» souvent considéré comme un acte simple et riche, du moins en mathématiques, «voir».

a. Le rôle central de l'appréhension immédiate et le niveau cognitif des objets «phénoménologiquement» accessibles à un sujet

La notion d'objet est d'abord une notion phénoménologique: c'est le ***«ce sur quoi»*** porte l'orientation intentionnelle de la conscience à un instant donné. L'objet en tant que «ce sur quoi» est corrélatif d'un acte qui le discrimine de tout ce qui apparaît, simultanément et à son voisinage, et qui l'identifie comme étant tel ou tel (qualité, substance, forme, occurrence, etc.). Or cet acte, phénoménologiquement simple, est cognitivement complexe. Il est simple dans la mesure où il y a transparence des opérations cognitives effectuées au niveau infra-conscient : c'est immédiatement et directement que le sujet remarque telle ou telle chose. Il est cognitivement complexe dans la mesure où son accomplissement relève de l'ensemble des opérations effectuées au niveau infra-conscient. La notion phénoménologique d'objet étant ainsi précisée, nous pouvons maintenant analyser le champ, le contenu possible ainsi que les fonctions de l'appréhension immédiate d'un sujet. Trois données fondamentales doivent être retenues :

1. **Il y a une limitation attentionnelle du champ de l'appréhension immédiate,** tous les objets directement accessibles à la conscience d'un sujet ne pouvant pas l'être en même temps. D'où la nécessité d'une succession d'appréhensions immédiates dont l'horizon est

mémoriellement limité. Cette donnée est à la base des nombreuses recherches de psychologie cognitive, centrées sur le traitement de l'information, depuis les travaux de Broadbent (1958).

2. **Il y a une variation considérable du contenu de l'appréhension immédiate** par rapport au niveau des objets de connaissance scientifique. Il suffit de comparer les objets immédiatement accessibles à la conscience d'un novice (un étudiant qui, après le lycée ou la licence, éprouve encore des difficultés devant des problèmes additifs) et à celle d'un expert, (un mathématicien). C'est cet écart, non strictement génétique ou développemental, qui doit être analysé si l'on veut comprendre les processus d'acquisition de connaissances en formation initiale.

3. **L'appréhension immédiate remplit deux fonctions importantes** pour qu'un sujet puisse avoir l'initiative et le contrôle d'une activité de connaissance scientifique : le contrôle référentiel et la planification des démarches à effectuer.

Toute activité de connaissance scientifique implique un contrôle de l'activité à chacun des différents moments de son déroulement. D'un point de vue phénoménologique, la possibilité d'un contrôle requiert que le sujet ait un accès direct aux objets sur lesquels va porter son activité de connaissance qu'elle doit mobiliser à titre d'«objet». Ce contrôle, que nous appellerons référentiel, ne doit pas être confondu avec le contrôle de validité nécessaire d'un point de vue scientifique. En effet, c'est ce contrôle référentiel qui permet au sujet de «s'ancrer» dans le domaine des objets qui lui sont immédiatement disponibles, et cela sans aucune médiation externe et sans avoir à effectuer des vérifications demandant ne serait-ce qu'un minime laps de temps : la perception, par exemple, est une appréhension immédiate qui permet un contrôle référentiel et non pas un contrôle de validité.

Il ne peut pas y avoir de connaissance scientifique sans la mise en oeuvre de démarches méthodologiquement organisées. D'un strict point de vue phénoménologique cela veut dire que la connaissance s'élabore à travers une appréhension successive. Or de ce point de vue, l'appréhension successive peut être «libre» ou, au contraire, téléologiquement polarisée. Elle est «libre» lorsqu'elle procède de proche en proche comme dans les activités de tâtonnement ou d'exploration spontanée. Elle est téléologiquement polarisée lorsqu'elle suit une planification de la démarche à effectuer, cette démarche étant déterminée par les objets sur lesquels l'attention devra successivement se fixer, soit à titre de cible soit à titre d'outils[1] à mettre en oeuvre, et par les choix à effectuer lors du déroulement de la démarche. Il ne s'agit donc pas simplement d'une simple anticipation mais d'une véritable organisation anterospective de l'activité à accomplir. Il apparaît donc que la capacité d'un sujet à planifier une démarche va entièrement dépendre des objets auxquels il a accès par appréhension immédiate.
Ce sont ces deux fonctions qui montrent le rôle central de l'appréhension immédiate dans l'initiative et dans le contrôle qu'un sujet peut avoir sur une activité de connaissance. Et on voit alors qu'**une réelle acquisition de connaissance, pour un sujet, se joue sur l'élargissement ou sur la transformation du contenu possible de son appréhension immédiate.** Car c'est ce contenu qui conditionne le type de démarche qu'il peut être en mesure de comprendre et

[1] Pour pouvoir être intentionnellement effectuées, les différentes opérations constitutives d'une démarche doivent pouvoir apparaître à la conscience comme des objets. Autrement dit *quand le sujet accomplit un acte, il a un rapport d'«ustensilité» à l'acte qu'il accomplit ainsi qu'à ses phases* (Heidegger 1964, § 15, p.92-96). Ce n'est pas par hasard si la métaphore de l'«outil» s'est spontanément imposée pour parler de théorèmes ou de théories mathématiques : ils prennent la fonction d'objet intentionnellement utilisé ***à titre de moyen*** ou de procédures pour atteindre un but.

d'effectuer. On ne peut donc pas espérer que le fait de faire effectuer à un élève une démarche dont les objets d'ancrage ne lui seraient pas immédiatement accessibles puisse lui faire découvrir ces objets! Pour comprendre comment le domaine des objets immédiatement accessibles à un sujet peut être élargi ou transformé, il nous faut donc revenir à la complexité cognitive infra-consciente qui est sous-jacente à toute transparence phénoménologique.

b. Les trois conditions cognitives nécessaires pour un accès «phénoménologiquement» immédiat à des objets de connaissance scientifique

Si d'un point de vue phénoménologique la notion d'objet apparaît indépendante de toute opération ou de toute représentation, il n'en va plus de même d'un point de vue scientifique ou d'un point de vue cognitif. Quand on se place à l'un ou l'autre de ces deux points de vue, il ne peut y avoir d'objet que relativement à des opérations ou à des représentations : **un objet est toujours le terme de l'un des deux couples suivants :**

{opération, ...} ou {représentation, ...}.

La raison de cette liaison tant d'un point de vue scientifique que cognitif est relativement simple. D'un point de vue scientifique, **l'étude des objets est toujours subordonnée à la prise en compte des moyens d'accès aux objets, c'est-à-dire à la nature de la médiation externe qui peut être instrumentale ou seulement sémiotique.** Car ce sont les moyens d'accès aux objets qui déterminent ce qu'une démarche de connaissance scientifique peut avoir de spécifique (l'astronomie, la biologie et les mathématiques n'utilisent pas les mêmes moyens d'accès). Et c'est la manière dont ces moyens sont mis en oeuvre qui détermine la validité d'une connaissance. D'un point de vue cognitif, la relation à un objet va dépendre de l'«architecture fonctionnelle» des systèmes constituant les capacités du sujet: permet-elle le fonctionnement requis pour que le sujet ait cet accès immédiat aux objets d'ancrage pour une médiation externe et pour la planification d'une démarche ? Autrement dit, d'un point de vue scientifique comme d'un point de vue cognitif, la connaissance des objets est inséparable des opérations et des représentations qui permettent d'y avoir accès. Mais du point de vue cognitif, les opérations et les représentations doivent être analysées en fonction des systèmes sans lesquels elles ne pourraient ni être effectuées ni produites. C'est dans cette perspective que trois conditions cognitives apparaissent nécessaires pour qu'un sujet puisse avoir un accès direct aux objets requis pour entrer dans une activité de connaissance scientifique et plus particulièrement mathématique : l'automatisation de traitements, l'appropriation et la coordination de registres de représentation sémiotique, et une rupture par rapport à la procédure spontanée de discrimination et d'identification des objets.

1. L 'automatisation d'un traitement est la condition de la transparence phénoménologique dans l'accès immédiat aux objets. Elle est la condition nécessaire en raison même de la limitation attentionnelle du champ de l'appréhension immédiate que nous avons évoquée dans le paragraphe précédent. Cela constitue l'un des apports majeurs de la psychologie cognitive, au cours de ces trente dernières années, que d'avoir mis en évidence le caractère fondamental de cette condition cognitive. Par rapport à la question des apprentissages scolaires cet apport implique que l'on prenne en compte l'existence de **deux modes selon lesquels une opération ou un traitement peuvent être effectués par un sujet.**

— le mode «intentionnel» c'est-à-dire conscient : c'est celui qui est pris en compte dans l'organisation didactique de séquences d'activité, et c'est celui que nous avons envisagé dans l'analyse de la connaissance du point de vue phénoménologique.

— le mode «automatique». L'effectuation automatique d'un traitement ou d'une opération

est antérieure à toute initiative et à tout contrôle conscients: seul son résultat émerge à la conscience du sujet comme quelque chose d'immédiat. Tout ce qui s'impose au premier coup d'oeil résulte en fait de traitements infra-conscients. L'intérêt de l'automatisation d'un traitement n'est pas seulement de libérer l'activité consciente, il est aussi d'ouvrir l'accès à des objets complexes par la «compactification», en un seul acte de visée, d'un diversité de traitements qui ont du être appris ou acquis indépendamment les uns des autres en raison de leur hétérogénéité ou de leur nombre. La compactification infra-consciente est aussi essentielle que la compréhension.

2. L'appropriation des registres de représentation sémiotique et leur coordination (Duval 1995, 1996). Un point doit être souligné pour situer l'importance de la prise en compte des registres de représentation dans le cadre général d'une analyse de l'activité de connaissance : les registres de représentations sémiotiques apparaissent à la fois comme ***des systèmes constitutifs de «l'architecture fonctionnelle» requise*** pour qu'un sujet soit capable d'effectuer une démarche de connaissance scientifique et comme ***des moyens d'accès nécessaires aux objets mathématiques***. En ce sens ils jouent un rôle de médiation externe avec cette particularité, par rapport à la médiation instrumentale, de pouvoir et de devoir être en partie «intériorisés» par le sujet. C'est pour cela que l'on retrouve les registres de représentation sémiotique à la fois dans une approche cognitive et dans une approche scientifique de la connaissance.

La grande majorité des travaux en psychologie cognitive étudie la connaissance en tant que processus de traitement des informations reçues par une organisation fonctionnelle de systèmes et production de réponses appropriées. **Les systèmes pris en compte sont des systèmes dont les modes de fonctionnement sont déterminés par des substrats organiques et dont les fonctions sont communes à toutes les types d'activité de connaissance : perception** (capter les données), **mémoire** (organiser et conserver les données façon à ce qu'elles demeurent constamment accessibles pour un traitement), **attention** (orienter l'activité par rapport à un but fixé ou par rapport à l'occurrence d'un perturbation)... Les systèmes dont les modes de fonctionnement sont purement sémiotiques ne sont pas réellement pris en compte ou, s'ils le sont, c'est uniquement par rapport à leur «implémentation» dans ces systèmes dont le mode de fonctionnement est organique. Les recherches sur la mémoire sémantique et la compréhension du langage naturel depuis 1972 sont à cet égard révélateurs de cette problématique.

Si l'on veut étudier l'acquisition des connaissances scientifiques ou mathématiques, l'appropriation des registres de représentation sémiotique par chaque individu comme leur coordination progressive sont aussi fondamentales que les systèmes à substrat organique. Car si la possibilité d'une dualité représentationnelle langage /image, c'est-à-dire d'un fonctionnement représentationnel en modalité discursive ou en modalité synoptique, est comme prédéterminée dans l'organisation du cerveau humain, cette potentialité ne peut être actualisée que dans la formation culturelle de langues naturelles et de codes analogiques. Mais cela n'a pas été suffisant. Le développement des connaissances et, en particulier celui des connaissances mathématiques, a impliqué la différenciation de ces premiers registres de représentation sémiotique en plusieurs autres registres, chacun se trouvant spécialisé pour un type d'appréhension et pour un type de traitement. Que l'on pense aux système d'écriture décimale, à l'écriture littérale ou algébrique, aux langues formelles, aux représentations graphiques, aux matrices... Bien que transmis par l'environnement ces registres de représentation sémiotique font partie de l'«architecture fonctionnelle cognitive» maintenant requise pour une activité mathématique ou pour l'acquisition de connaissances mathématiques. D'ailleurs la plupart sont devenus des *instrument culturels généraux de connaissance* et l'appropriation de leur mode de fonctionnement fait maintenant partie d'une alphabétisation

nécessaire. Il suffit de feuilleter n'importe quel journal, n'importe quel magazine ou même n'importe quel manuel scolaire dans d'autres champs disciplinaires que les mathématiques.

3. Une rupture par rapport à la procédure spontanée de discrimination et d'identification des objets. Il y a ce que l'on pourrait appeler le niveau zéro d'accessibilité des objets. Il concerne l'appréhension perceptive des objets (choses, changements, signaux...) «peuplant« l'environnement du sujet. Ce qui caractérise cette modalité d'appréhension immédiate est que l'identification des objets s'y effectue **en fonction d'une seule propriété, celle qui suscite le grand effet de contraste** par rapport à d'autres objets ou d'autres catégories d'objets, et pas seulement celle qui est la plus fréquente. A ce niveau une propriété peut ne correspondre pour un sujet qu'à une valeur de contraste ou à une valeur d'opposition, pourvu qu'il ait acquis, par l'observation de variations, la capacité de la discriminer.

Mais d'un point de vue scientifique, cette procédure spontanée d'identification n'est ni suffisante ni pertinente. Un objet ne peut être identifié que par **le «croisement» de plusieurs propriétés**, chacune n'étant plus seulement discriminée par une **valeur contrastive, mais également par une valeur extensive** laquelle est déterminée par l'application potentielle d'un critère de partage dichotomique (c'est «*p* ou non *p*»). Cependant, le saut cognitif le plus important pour passer d'une procédure spontanée à une procédure scientifique d'identification concerne moins la correction de la valeur contrastive par la valeur extensive que la prise en compte du croisement de plusieurs propriétés. On peut facilement montrer, par exemple, que la difficulté de compréhension des énoncés de problèmes en mathématiques, y compris les énoncés de problèmes additifs, tient à ce saut. Pour une compréhension ordinaire de la situation extramathématique décrite dans l'énoncé, la procédure spontanée en fonction d'une seule propriété est suffisante. Pour voir le traitement mathématique instancié par des valeurs numériques et dont la description est donnée comme «en surimpression» à celle de la situation extramathématique («sélectionner les informations pertinentes»), il faut la procédure scientifique d'identification. C'est pour cela que n'importe quelle représentation de type schéma, image ou autre ne peut pas être pertinente et efficace (Duval 1998).

D'un point de vue phénoménologique, l'identification d'un objet est neutre : elle peut aussi bien résulter d'une procédure spontanée que d'une procédure scientifique. Car tout objet est simplement le «ce sur quoi...» se dirige actuellement la conscience. La possibilité pour un sujet de l'identification scientifique d'un objet, en appréhension immédiate, dépend de la compactification, infra-consciente, des multiples traitements requis par le croisement des propriétés. Nous retrouvons ici les processus évoqués plus haut à propos de l'automatisation.

c Un thème épistémologique impliquant la fusion des points de vue scientifique et phénoménologique: l'intuition

La notion d'intuition a été une notion philosophique clé dans l'analyse de la connaissance comme science. Et c'est une notion également surdéterminée dans la mesure où non seulement elle a d'abord été définie par opposition au raisonnement, avec Descartes, puis par opposition à toute forme de représentation, avec Husserl, mais où, en analogie avec l'acte de «voir», on lui a attribué un rôle fondamental dans les processus d'invention en mathématiques.

Qui dit «intuition», dans l'héritage des deux approches philosophiques de Descartes et de Husserl, dit **une appréhension complète des objets, tels qu'ils sont en eux-mêmes, en un seul acte vécu comme simple par la conscience du sujet**. La simplicité de l'acte exclut le laps temporel et la multiplicité des opérations qui sont inhérentes à toute discursivité. L'accès

aux objets tels qu'il sont en eux-mêmes exclut le recours nécessaire à des représentations sémiotiques ou non. Et la complétude de l'appréhension ne justifie pas seulement la simplicité de l'acte mais elle lui donne sa puissance heuristique, sa fécondité. Une telle intuition existe-t-elle ou serait-elle impossible à l'esprit humain comme Kant l'expliquait dans sa célèbre Lettre à Marcus Herz ? Il ne s'agit pas ici de rouvrir un débat qui, à bien des égard, apparaît daté, mais d'interroger, à travers cette question, ce recours à l'intuition, au «voir» que beaucoup de mathématiciens considèrent comme une caractéristique de l'activité mathématique. Ainsi R. Thom, se référant non plus à Descartes mais à Platon (1972) n'hésitait-il pas à écrire dans un célèbre article contre les «mathématiques modernes» :

> ...toute démonstration est avant tout la révélation d'une nouvelle structure, dont les éléments gisaient séparés dans l'intuition, et dont le raisonnement reconstruit la genèse progressive. En ce sens, toute démonstration est une «maïeutique» : il s'agit de recréer chez le lecteur les processus psychologiques propres à la manifestation de la vérité implicite, dont il détenait toutes les données mais qui restait voilé dans l'informulé.... c'est dans l'intuition que réside l'*ultima ratio* de notre foi en la vérité d'un théorème — un théorème étant avant tout, selon une étymologie aujourd'hui bien oubliée, l'objet d'une vision.
>
> R. Thom 1972, p. 230

On voit donc l'enjeu réel de la question concernant l'«intuition» et tout recours à l'acte de voir : il s'agit de savoir comment faire acquérir cette intuition à tous les élèves en formation initiale. Car, en admettant qu'une telle intuition existe —et nous n'oserons pas mettre en doute les témoignages d'éminents mathématiciens — est-elle un acte mental simple, spécifique, et alors toute analyse cognitive de l'activité mathématique serait vaine? Ou, au contraire, émerge-telle comme le résultat d'un travail de compactification infra-consciente et de coordination de registres de représentation, travail qui se ferait d'un façon plus ou moins rapide selon les individus et selon les conditions d'apprentissage ? Une chose est sure en tous cas la notion d'«intuition» est une notion essentiellement phénoménologique. Et l'on peut se demander si elle est pertinente pour une analyse de la connaissance scientifique, menée dans avec le souci d'en faire faire des apprentissages.

C'est dans les *Regulae ad directionem ingenii* (règles III et XI) que Descartes a défini l'intuition par opposition à la «déduction» et plus généralement à toute forme de discursivité :

> ... nous allons maintenant passer en revue tous les actes de notre entendement, par lesquels nous pouvons parvenir à la connaissance des choses sans aucune crainte d'erreur: l'on en admet que deux, l'intuition et la déduction...
> ... Nous distinguons donc ici l'intuition intellectuelle et la déduction certaine, en ce que l'on conçoit dans l'une une sorte de mouvement ou de succession , et non pas sans l'autre; et, parce qu'en outre, pour la déduction, il n'est pas besoin comme pour l'intuition d'une évidence actuelle, mais que c'est à la mémoire qu'elle emprunte, d'une certaine manière, sa certitude..
>
> Des cartes Règle III p. 87, 89

> Nous réclamons deux éléments pour parler d'intuition intellectuelle ; d'abord, que la proposition soit comprise clairement et distinctement; ensuite qu'elle soit comprise tout entière en seul moment et non pas successivement.
>
> Descartes Règle XI p. 131

Rappelons que pour Descartes cet acte d'intuition peut être obtenu par un entraînement qui conduit à simultanéiser ce qui relève d'abord d'une appréhension successive et, ainsi, à

éliminer la mémoire ou, plus exactement, le maintien en mémoire de travail de tout ce qui a été pensé antérieurement (Descartes p. 133).

C'est dans la VI[e] des *Recherches Logiques* (1901) que Husserl a systématiquement opposé intuition et représentation en tant qu'expression mobilisant des signes. Mais pour bien comprendre la portée de sa problématique, il faut revenir à ce qu'il écrivait en 1890 sur «la logique des signes», c'est-à-dire quand il ne prenait pas encore la perception visuelle comme le modèle de l'intuition:

> Les concepts, les contenus en général, peuvent nous être donnés d'une double manière. Premièrement d'une manière propre, c'est-à- dire tels qu'ils sont. Deuxièmement d'une manière impropre ou symbolique, c'est-à-dire par la médiation des signes, qui sont eux-mêmes donnés de façon propre.
> ..... tous les signes mathématiques de niveau élevé sont indirects; ce sont des signes de signes de signes, entassés à un degré élevé les uns sur les autres...
>
> Husserl 1975, p.415

C'est en fonction de cette opposition (1972, p. 237) que Husserl s'est efforcé de reconstruire la genèse phénoménologique du nombre, dans la *Philosophie de l'Arithmétique*. Pour lui cette genèse ne peut être que celle d'une sémiotisation de la pensée et d'une manipulation de signes (1972, p. 233, 310, 317-320, 330, 336). La logique, comme les mathématiques, étaient pour lui comme le champ où la prédominance de l'intuition des objets eux-mêmes était impossible et où seule l'organisation des signes en un système restait la seule manière d'accéder à des objets qui ne peuvent pas être appréhendés en eux-mêmes (1975, p.439). Mais, avec ses*Recherches logiques,* Husserl opère une rupture: il abandonne le domaine des registres discursifs formels et symboliques nécessaires aux mathématiques, pour ne plus considérer que la «grammaire» des expressions linguistiques quand elles sont employées pour désigner les objets directement accessibles dans la perception, c'est-à-dire accessibles indépendamment de tout signe. Car, pour Husserl, le fondement ultime de la connaissance ne pouvait être que dans l'intuition, celle-ci étant antérieure à toute représentation «signitive».

Cette fusion entre science et conscience, qui est à la base de la notion d'intuition, se retrouve avec des connotations plus psychologiques qu'épistémologiques ou logiques dans l'emploi le plus courant du terme «intuition», celui qui a été popularisé par Poincaré pour les mathématiques (Brunschvicg 1972, 449): «intuition» renvoie de façon large non à la seule perception mais aussi à l'imagination et à l'invention en tant qu'acte de «voir». Ici «intuition» cesse d'être un terme philosophique pour signifier la visualisation de ce qui n'est pas perceptivement visible ou de ce qui n'a pas encore été réalisé. Ce que Brunschvicg a résumé dans cette formule: «autant dire que sous le nom d'intuition, on désigne le travail profond de l'intelligence» (Brunschvicg 1972, 451).

Le terme «intuition» noue donc plusieurs oppositions problématiques qui sont hétérogènes entre elles :

— (1) l'opposition entre appréhension complète d'un objet en un seul acte et appréhension complète de l'objet en une séquence d'actes,

— (2) l'opposition entre appréhension directe de l'objet lui-même et appréhension purement représentative, la représentation résultant soit d'une action de l'objet lui-même (par exemple la «trace» mémorielle ou non) soit d'un construction nécessairement sémiotique,

— (3) l'opposition entre l'appréhension anticipante avant l'effectuation d'une démarche et son effectuation laquelle doit prendre en compte les contraintes d'une réalisation sémiotique (pour un calcul) ou d'une réalisation physique (pour la construction d'une machine qui «marche»),

— (4) l'opposition entre une appréhension dont le contenu «ressemble» à l'objet lui-même (représentation «icônique») et une appréhension dont le contenu est arbitraire par rapport à l'objet lui-même (représentation «symbolique»).

Naturellement personne n'assimilera entre elle les oppositions (1) et (2) ou (3) et (4). Cela renvoie à des processus cognitifs de nature radicalement différente. Et la première question qu'il faut se poser est celle de savoir quels sont ceux impliqués dans le «travail profond de l'intelligence» en mathématiques. Seulement les processus relatifs à l'opposition (1) comme l'implique toute référence à l'épistémologie cartésienne, ou aussi ceux relatifs à l'opposition comme l'implique les analyses husserliennes antérieures aux *Recherches logiques* (2)? Ce sont là des questions qui ne sont pas négligeables dès que l'on veut étudier l'apprentissage des mathématiques par les élèves. Ce sont là des oppositions différentes dont l'oubli mine bien des débats ou même des recherches sur les «figures» en géométrie ou encore sur le rapport entre raisonnement et figure. Mais limitons nous ici à la première opposition dont l'enjeu est le rapport entre les objets d'accessibilité directe et les objets qui ne sont accessibles que sémiotiquement.

Cette première opposition repose sur deux suppositions qui sont loin d'être vérifiées. Tout d'abord l'existence d'une appréhension complète. Toute vision, au plan de la perception, est nécessairement limitée, cette limitation étant déterminée par un point de vue, une perspective. Cette donnée a d'ailleurs été au coeur des analyses husserliennes après les *Recherches Logiques*. **En revanche, les représentations sémiotiques (dessin, formules, phrases...) peuvent faire l'objet d'une appréhension complète.** Ensuite, cette distinction se contente de concevoir le sujet comme un simple «centre de fonctionnement» homogène. Elle laisse dans l'ombre «l'architecture fonctionnelle cognitive» qui rend possible et détermine ce fonctionnement. Or c'est seulement à partir de cette architecture cognitive que l'on peut comprendre les processus par lesquels peut se produire chez un sujet cette simultanéisation du successif, cette transformation de la discursivité en vision, cette transformation qui rend transparentes les représentations sémiotiques. Nous retrouvons ici, à propos de l'intuition, ce que nous disions à propos de l'appréhension immédiate au début de cette troisième section: ce qui, pour un expert, relève d'une appréhension complète en un seul acte est le résultat de sa longue pratique dans la discipline ou d'une formation qui, pour lui, a réussi. **Peut-on analyser les processus d'apprentissage en mathématique en voulant que soit déjà au point de départ ce qui n'en peut émerger qu'à son terme?** Il y a des emplois magiques et inconditionnels des métaphores de la vision et de l'intuition pour décrire l'activité mathématique qui voudraient imposer cette volonté au nom du point de vue scientifique. Mais un tel langage n'a de sens qu'au strict point de phénoménologique, celui de la conscience d'un sujet devenu un professionnel des mathématiques!

CONCLUSION

Dans l'examen des trois points de vue requis pour une analyse de la connaissance en vue de son acquisition par des élèves, le lecteur aura peut-être eu l'impression que nous avons plus parlé du sujet que de l'objet. Cependant ce détour par la conscience et par l'architecture fonctionnelle infra-consciente était nécessaire dans la mesure où l'**on ne peut pas parler d'objet sans parler des conditions de son accessibilité,** non seulement en termes de validité des médiations externes, mais également en termes de sa compréhension par des sujets «apprenants». Que pouvons nous en tirer pour la notion d'objet et, surtout, quel peut en être l'apport pour des recherches «concrètes» sur l'apprentissage des mathématiques ?

Rappelons d'abord que le point vue phénoménologique est le point de vue d'ancrage. De ce point de vue, est objet (physique, mathématique ou imaginaire) tout «ce sur quoi...» la conscience d'un sujet peut se diriger immédiatement. Rappelons aussi que d'un point de vue cognitif l'accessibilité à des objets de connaissance scientifique dépend de l'architecture fonctionnelle des systèmes cognitifs généraux et des systèmes sémiotiques culturellement transmis dont un sujet dispose. Et l'appropriation du fonctionnement d'un système implique à la fois son automatisation infra-consciente et sa coordination avec les autres systèmes. Le domaine des objets immédiatement accessibles à la conscience d'un sujet va donc dépendre de cette appropriation. En quoi la prise en compte du lien entre la conscience du sujet et l'architecture fonctionnelle cognitive infra-consciente dont il dispose peut-elle être décisive pour étudier les problèmes d'acquisition de connaissances scientifiques ou mathématiques par des élèves ? Et quelle méthode pour étudier les problèmes d'acquisition des connaissances dans cette perspective ?

1. Les deux dimensions de l'accessibilité aux objets et les deux types de systèmes cognitifs dont un sujet doit disposer pour être «capable» de connaissance scientifique

Tous les objets de connaissance, à l'intérieur d'une même discipline, et *a fortiori* d'une discipline à l'autre, ne relèvent pas des mêmes conditions d'accessibilité. Cela doit se traduire par un mobilisation différente des systèmes de l'architecture cognitive, autrement dit par des opérations cognitives différentes. Nous pouvons déjà le voir à propos des deux conditions absolument primoridales pour qu'un sujet puisse accéder à un objet quelqu'il soit : pouvoir le remarquer, c'est à-dire pouvoir le séparer d'un autre objet, et pouvoir le reconnaître dans ses différentes occurrences, c'est-à-dire pouvoir l'identifier à travers des manifestations de contenu très différents. **En d'autres termes l'accessibilité d'un objet pour un sujet dépend à la fois de critères de DISCRIMINATION et de critères d'INVARIANCE,** ces deux types de critères relevant de deux dimensions différentes.

— **discrimination :** un objet doit pouvoir être distingué aussi bien d'un autre objet que du champ dans lequel il est situé. La ressemblance, l'homogénéité ou le recouvrement sont des facteurs qui s'opposent au fait qu'un objet puisse être distingué. La séparation locale et les contrastes qualitatifs relatifs à l'intensité, à la forme (contours) ou à la taille (grandeur) sont, au contraire, des facteurs qui permettent de détacher des objets à partir d'un fond ou d'un champ homogènes : les notions d'acuité, de pouvoir séparateur, de seuil sont ici des notions fondamentales pour l'étude de ces facteurs qui portent sur la discrimination perceptive «immédiate». Mais ce ne sont pas les seuls facteurs. D'autres

objets peuvent être distingués sans pouvoir être perceptivement séparés. Cela implique une procédure de dissociation par l'observation de variations : certaines propriétés ou qualités restent constantes quand les autres, avec lesquelles elles paraissent se confondre, changent. Autrement dit, tout ce qui est visible ne peut pas être montré, c'est-à-dire ne peut pas «faire l'objet» d'un geste d'indication ou d'ostension, comme Wittgenstein l'avait déjà souligné à propos des couleurs. **Ce qui est discernable sans être séparable échappe à toute communication directe** : on ne peut que le dire et non pas le montrer même si c'est «sous les yeux». Celui conduit donc à distinguer plusieurs critères de discrimination (Figure 2)

— **invariance** : un objet doit pouvoir être rencontré, et donc reconnu, plusieurs fois par un sujet. Or à chacune de ses occurrences la manière dont l'objet se présente peut varier. Les facteurs de variation, pour les objets relevant de données sensorielles, sont nombreuses. Rappelons en quelques uns parmi les plus étudiés : les déplacements (qui entraînent un changement de perspective et souvent un changement de forme ou de contour ou plus simplement disparition par masquage), les déformations sans fractionnements (étirements) ou avec coupures. Avec ces différents types de variation la manière dont l'objet apparaît n'a pas le même contenu et la même apparence. C'est par rapport à ces différents types de variations que Piaget a introduit la notion de structure opératoire pour la conservation de l'objet. D'une façon plus générale, l'invariance ne se détermine pas par rapport à un champ mais par rapport à une «multiplicité»[1] d'occurrences présentant des contenus différents. Ce sont Frege et Piaget qui ont mis en évidence l'importance de l'invariance pour la constitution des objets à partir des multiplicités représentationnelles (Frege cfr. (I)) ou des multiplicités phénoménales (Piaget : les célèbres épreuves de conservation).

Il ne suffit pas cependant de séparer les critères de discrimination et ceux d'invariance, il faut également prendre en compte la différence entre les systèmes cognitifs généraux relatifs à la réception et à la mise en mémoire d'informations et les systèmes sémiotiques (*supra* III.). Car la discrimination et la reconnaissance d'un objet ne dépend pas du même type d'activité s'il s'agit de phénomènes ou de formes de l'environnement ou s'il s'agit d'unités de sens et d'organisations formelles constitutives de représentation sémiotiques (figure 2).

La seule activité commune à tous les types d'objets concerne le premier critère de d'invariance, celui de l'identité du contenu de deux occurrences : sont identiques deux occurrences dont les contenus respectifs se confondent par superposition ou par *mapping* Le caractère général de ce critère tient au fait qu'il porte essentiellement sur la valeur qualitative de forme: contour d'une silhouette, contour d'un tracé (caractère, suite de caractères, figures...) modulo les variations de grandeur dus à la distance ou à des choix de reproduction. On remarquera que toute prise en compte exclusive de ce critère d'invariance équivaut à considérer les signes, les symboles et toute espèce de représentation sémiotique comme de simples objets : cela équivaut encore à se restreindre à un regard purement formel sur les signes. Comme nous avons pu le voir dans la première partie de cet article, un tel regard en mathématique a été relativement tardif. L'apprentissage de la lecture en tant qu'elle repose sur l'automatisation d'un «code phonético-graphique» implique que l'on privilégie à la fois le premier critère de discrimination, le contraste, et le premier critère d'invariance, l'identité.

En revanche, le premier critère de discrimination (le contraste) ne relève pas du même

[1] «multiplicité» est la traduction du terme *Mannigfaltikeit* employé par Cantor pour nommer la notion d'«ensemble».

type d'activité pour les objets et phénomènes de l'environnement, et pour les unités signifiantes des représentations. De même le second critère de discrimination (la séparation locale) ne dépend pas de la même activité et du même type de fonctionnement pour les données perceptives et pour les productions représentatives (discursives ou non discursives). Car, pour être comprise, toute suite de signes ou de symboles ***doit être segmentée*** en des expressions ***formant un tout*** (désignatif, référentiel, propositionnel, algorithmique) chacune à leur niveau. Ce sont donc autant d'unités spécifiques sur lesquelles la conscience du sujet doit pouvoir se porter immédiatement. Leur discrimination est donc essentielle pour la compréhension ou la maîtrise d'un discours (démonstration, argumentation, explication, description), d'un calcul, d'une représentation figurale en géométrie... ***Ainsi l'utilisation de systèmes sémiotiques à lexique réduit ou à lexique vide, comme les écritures en «0, 1», pose des problèmes particuliers de discrimination*** : elles induisent des ressemblances perceptives globales entre des suites de symboles qui pourtant réfèrent à des objets très différents.

L'hétérogénéité des activités est encore plus frappante pour les autres critères d'invariance. Les productions sémiotiques n'admettent qu'une *invariance référentielle* entre des expressions différentes (Frege) ou entre des représentations de registres différents. Cette invariance est fondamentale pour toutes les activités d'expansion discursive, pour tous les traitements de type calcul... Au contraire, les multiplicités phénoménales n'admettent qu'une «*invariance opératoire*[1] (Piaget), c'est-à-dire une invariance liée au système de comportements d'un être vivant qui découvre son environnement (déplacements, gestes ou manipulations qu'il effectue sur des objets physiques ou sur un «matériel»). Cela veut dire que l'acquisition d'un invariant opératoire piagetien ne peut pas faciliter l'acquisition d'un invariant référentiel, car elle est d'un autre ordre : cela a d'ailleurs été le point d'achoppement de beaucoup de recherches sur l'apprentissages des mathématiques depuis 1970!

[1] On ne saurait oublier que la notion d'«invariant opératoire» est une extrapolation de l'utilisation que Poincaré avait faite de la notion de groupe pour expliquer la notion d'espace. Piaget en a fait le mécanisme unique de l'intelligence et de son développement. Soulignons l'illusion sémantique induite par cette expression «invariant opératoire». Elle tend à lier la notion d'opération aux seuls comportements d'action sur les objets de l'environnement et fait oublier qu'il y a des opérations purement sémiotiques (un calcul par exemple), complètement indépendantes des «opérations concrètes» sur des objets physiques. Il est donc équivoque de parler d'action sans la rapporter au système permettant d'effectuer l'action.

Détachement *d'une totalité continue et homogène*	critères de **DISCRIMINATION** relativement aux données des **systèmes sensoriels**	aux productions des **systèmes sémiotiques**
1. Contraste	émergence immédiate et primitive au plan de la perception déterminant des *différenciations au sein d'un champ homogène:* coexistence des ***valeurs constrastives***	la valeur d'un signe ou d'un suite de signes est déterminée par ***opposition à un autre signe pouvant lui être substitué:*** incompatibilité des ***valeurs alternatives*** pour un choix. Cela relève en fait d'une procédure de variation analogue à celle nécessaire pour pouvoir discerner des qualités, visuelles ou autres, non séparables
2. Séparation locale	possibilité de ***montrer par un geste indicateur*** (main, doigt..) : tout ce qui est visible n'est pas séparable (les couleurs...)	implique la mise en oeuvre de règles syntaxiques propres au systèmes pour effectuer la ***segmentation*** des unités signifiantes composant un discours ou une figure
3. Discernabilité	implique ***une procédure de variation*** et de comparaison des différents résultats des variations effectuées	implique ***une procédure d'interprétation*** par croisement d'unités déjà discriminées (propriétés, informations) ou par leur combinaison en un nouvel objet (discernabiltié des plans dans la représentation plane d'un solide)

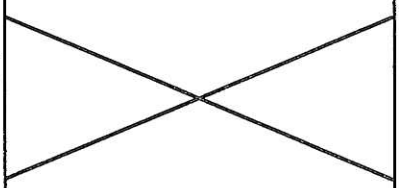
Reconnaissance *d'un objet par rapport à une occurrence antérieure*	critères d' **INVARIANCE** relativement aux **multiplicités phénoménales** (issues des données sensorielles)	**multiplicités représentationnelles** (issues des productions sémiotiques)
1. Identité : *(par mapping:)*	issues de la reproduction d'une forme : l'identité résulte de la superposaibilté de deux occurences externes ou d'une occurrence externe et d'une trace interne (mémoire) servant de prototype	issues de répétitions de formes (caractères, tracés...)
2. Conservation *(par compensations)*	issues de modifications du contenu perçu, par suite de changements de position ou par suite de changements physiques (déformation, fragmentation)	
3. Equivalence *(par substitution ou par choix d'une correspondance descriptive)*		issues de modificatons du contenu des représentations: soit en raison de la «générativité» du système sémiotique (les règles de formation) permettant de produire un ensemble illimité de phrases ou de formules, soit par changement de système sémiotique. On distinguera donc ***une équivalence «logique» et une équivalence «référentielle»***

Figure 2. Diversité des opérations cognitives permettant l'accessibilité à un objet

SIGNE ET OBJET (II) : ANALYSE DE LA CONNAISSANCE

Tous les objets de connaissance ne relèvent pas des mêmes critères de discrimination et d'invariance. Une analyse des connaissances scientifiques qui veut dégager les conditions de leur acquisition par des élèves en formation initiale impliquera donc que l'on respecte les trois principes directeurs suivants :

(1) La distinction et la reconnaissance des objets de connaissance scientifique, et plus particulièrement celles des objets mathématiques, impliquent des critères de discrimination et des critères d'invariance spécifiques aux systèmes sémiotiques et aux multiplicités représentationnelles

(2) il y a un fonctionnement cognitif propre à la mise en oeuvre de chacun des critères de discrimination et d'invariance respectivement pour les informations issues des données sensorielles et pour celles produites à l'aide des systèmes sémiotiques.

(3) Un sujet ne peut accéder à des objets de connaissance scientifique et, plus particulièrement, de connaissance mathématique que lorsqu'il est en mesure d'effectuer les activités cognitives lui permettant de distinguer et de reconnaître ces objets

Force est de constater que tous les modèles psychologiques ou didactiques d'apprentissage actuellement utilisés pour organiser, ou simplement pour justifier, des «activités» et des «séquences» d'enseignement, ne retiennent que l'une des deux dimensions d'accessibilité des objets (discrimination ou invariance) et privilégient les systèmes cognitifs généraux au détriment des systèmes sémiotiques. Cela a pour conséquence que l'on prend un type particulier de fonctionnement cognitif, un critère d'invariance par exemple, comme le modèle du fonctionnement général et commun pour tous les types de connaissance

En insistant sur l'aspect phénoménologique de l'objet, le «ce sur quoi...», et sur l'architecture fonctionnelle infra-consciente qui en détermine ***les conditions cognitives d'accessibilité, nous avons privilégié l'appréhension immédiate*** au détriment de l'appréhension successive. Ce faisant, ***n'aurions nous pas oublié ou même exclu les conditions scientifiques d'accessibilité,*** lesquelles dépendent de la mise en oeuvre de médiations externes et ***impliquent donc que l'on privilégie phénoménologiquement l'appréhension successive*** et non pas l'appréhension immédiate ? Car les conditions scientifiques d'accessibilité aux objets se font à l'intérieur même de démarches que l'on contrôle.

Rappelons la définition générale de la notion d'objet (*supra* IIIb) : un objet est toujours le terme de l'un des deux couples suivants : {opération, ...} ou {représentation, ...}. C'est seulement dans l'appréhension immédiate, en raison de la transparence de la conscience, que l'objet semble apparaître tel quel, indépendamment de toute opération ou de toute représentation sémiotique. Et toute mise en oeuvre d'une appréhension successive, méthodologiquement planifiée, repose sur les objets qui sont immédiatement accessibles à la conscience du sujet (*supra* IIIa3). Cela veut dire que l'accès à des objets mathématiques par des élèves ne peut se faire qu'en fonction des objets qui leur sont déjà immédiatement accessibles. Or, en vertu de la définition générale de la notion d'objet, ces objets peuvent être aussi bien des opérations ou des représentations que les objets qui en sont les corrélats[1]. En

---

[1] Phénoménologiquement il y a deux entrées possibles dans le «sens» d'une démarche : soit l'objet-cible que la démarche doit rendre accessible soit les actes constitutifs de cette démarche. L'organisation anteroceptive d'une démarche requiert une appréhension immédiate à la fois de l'objet-cible et des actes constitutifs des pas de cette

d'autres termes, pour tous les objets dont l'accessibilité requiert une démarche de la part du sujet, un part importante des objets d'ancrage et des objets outils requis pour effectuer la démarche, sont des opérations sémiotiques. **La découverte et la prise de conscience de ces opérations sémiotiques constitue le détour cognitif nécessaire à l'entrée dans la plupart des démarches mathématiques.** C'est pourquoi la prise en compte des registres de représentation sémiotique, du fonctionnement spécifique à chacun et de leurs coordinations. est si décisive pour l'apprentissage des mathématiques.

2. Les deux points de vue possibles dans l'analyse d'un problème : en aval ou en amont.

On accorde généralement une grande place, dans l'acquisition des connaissances scientifiques et plus particulièrement dans celle des connaissances mathématiques, à la résolution de problème. Comment la pluralité des points de vue, phénoménologique et cognitive et scientifique peut-elle se traduire dans l'analyse de la résolution de problème ?

Regarder un problème du point de vue mathématique, c'est regarder d'emblée la (les) solution(s) de ce problème. Analyser le problème c'est alors regarder les différents traitements possibles et leur mise en oeuvre dans la (les) solution(s). Toute l'analyse est ainsi faite en aval de l'énoncé du problème.

Mais un problème peut aussi être regardé en amont. On regarde alors le choix des informations qui sont données dans l'énoncé relativement à la situation mathématique, ou extramathématique (pour les problèmes de modélisation), ainsi que les contraintes éventuellement imposées pour l'acceptabilité de la solution. Analyser le problème c'est alors inventorier les autres choix possibles parmi toutes les informations nécessaires à une description complète de la situation (supprimant donc toute possibilité de problème), et inventorier également les différentes manières dont les informations choisies peuvent être données. Cela revient à rechercher toutes les variations possibles de l'énoncé qui conservent, pour la résolution du problème, la mise en oeuvre de la même méthode mathématique ou des mêmes types de traitement mathématique.

Naturellement de telles variations peuvent rendre la résolution cognitivement plus complexe ou plus longue à trouver. Car le type de traitement mathématique à mettre en oeuvre sera plus moins «facile» à reconnaître ou à trouver, son application devenant plus ou moins «triviale» selon les variations intrinsèques de l'énoncé. L'ensemble des variations qui respectent ces conditions vont constituer ce que nous appellerons un «champ d'énoncés de problème». On peut ainsi définir un champ d'énoncés de problèmes additifs, un champ d'énoncés de problèmes de pourcentage, un champ d'énoncés de problèmes de mise en équations , un champ d'énoncés de problèmes d'aire ou de périmètre... ***Ce champ d'énoncés est donc défini par un ensemble de variations rédactionnelles intrinsèques.***. Un problème doit être énoncé. Un telle problématique requiert donc une analyse en amont et non point en aval et elle revient à ne jamais considérer un problème isolément pour lui même mais, si l'on préfère un autre terminologie, à le resituer d'emblée dans une famille de problèmes. Mais pour définir une famille de problèmes, il est nécessaire de recourir à un point de vue en amont et pas seulement en aval. Car c'est seulement en travaillant explicitement sur un champ d'énoncés ainsi définis qu'un réel apprentissage de la résolution de problèmes de modélisation est

---

démarche. Mais l'appréhension immédiate de l'objet-cible, à la différence de celle des actes constitutifs des pas de la démarche **ne peut être qu'une appréhension vide tant que la démarche n'est pas effectuée.**

possible.

On retrouve, par exemple, cette différence entre les deux points de vue à propos des discussions sur l'introduction de démonstrations dans l'enseignement Le point de vue en aval revient à souligner le fait qu'il peut y a avoir plusieurs démonstrations différentes pour un théorème. Ainsi un même théorème de géométrie élémentaire peut être démontré par différentes méthodes (analytique, vectorielle, les transformations...). Le point de vue en amont consiste, au contraire, à regarder pour chaque méthode de démonstration comment fonctionne le raisonnement en relation avec les registres mobilisés et à regarder comment un sujet en vient à reconnaître qu'une démonstration prouve.

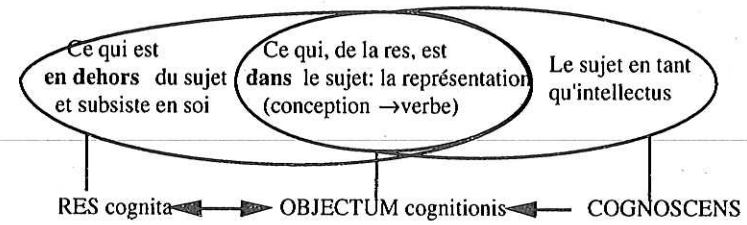
On aura facilement reconnu que les points de vue en aval et en amont dans l'analyse d'un problème correspondent respectivement aux points de vue scientifique et au point de vue cognitif dans l'analyse des connaissances. Et dans une préoccupation didactique d'acquisition des connaissances, il ne saurait être question de les opposer comme les termes d'une alternative mais au contraire de les articuler. Mais qu'en est-il du point de vue phénoménologique dans l'analyse d'un problème ? On réintroduit donc ici le point de vue de la conscience du sujet, et comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises au cours de cet article, ce point de vue d'ancrage est toujours plus ou moins explicitement associé soit au point de vue scientifique soit au point de vue cognitif. Cela nous renvoie à un autre aspect fondamental pour l'activité de la connaissance : les questions en tant qu'auto-interrogations, lesquelles sont d'un certain point de vue toujours plus précieuses que les réponses ou les solutions ! Mais cet aspect phénoménologique ne recouvre pas exactement la notion mathématique de problème.

Références

Aristote (1966) *De l'âme* (tr. Barbotin). Paris : Les Belles Lettres
Aristote (1970) *Seconds Analystiques* (tr. Tricot). Paris : Vrin
Benveniste E. (1976) *Problèmes de linguitique générale*, 1. Paris : Gallimard.
Bkouche R. (1988) *Quelques grandes problématiques de l'histoire de la géométrie.* Lille: IREM.
Brunschvicg L. (1912, 1972) *Les étapes de la philosophie mathématique.* Paris : Blanchard.
Brunschvicg L.
Bolzano B. (1993) *Les paradoxes de l'infini* (tr. H. Sinacoeur). Paris : Seuil.
Coururat L. (1896) *De l'infini mathématique.* Paris: Alcan.
Descartes R. (1954) *La géométrie.* New York : Dover Publications.
Descartes R.(1963) *Oeuvres philosophiques* , I (Ed. F. Alquié). Paris : Garnier.
Descartes R.(1967) *Oeuvres philosophiques* , II (Ed. F. Alquié). Paris : Garnier.
Ducrot O. (1972) *Dire et ne pas dire.* Paris : Hermann.
Ducrot O. (1989) *Logique, structure, énonciation.* Paris : Editions de minuit.
Duval R.(1976) Parole, expression, silence *R. S. P.T.* 60, 2, 226-260
Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine.* Berne : Peter Lang
Duval R. (1996) «Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques» *R.D.M.* ,16, 3, p. 349-382
Frege G. (1893, 1962) *Grundgesetze der Arithmetik* I Hidelsheim : Olms
Frege G. (1971) *Ecrits logiques et philosophiques* (tr. Cl. Imbert). Paris : Seuil
Golstein C. (1995) La naissance du nombre *La Recherche* n° 278 p. 732-735

Granger G.G (1994) *Formes, opérations, objets*. Paris : Vrin.
Granger G. G. (1995) Objet *Encyclopédia Universalis* p. 670-674. Paris
Grize J. B. (1983). Schématisation et logique naturelle. *Essai de logique naturelle* (p. 97-147) Berne : Peter Lang.
Guéroult M. (1954) *Descartes selon l'ordre des raisons* I. Paris : Aubier.
Husserl E. (1929, 1969) *Méditations cartésiennes* (tr. E. Lévinas) Paris: Vrin.
Husserl E. (1901, 1972) *Recherches Logiques* 2, deuxième partie (tr. Elie, Kelkel, Schérer) Paris : P.U.F.
Husserl E. (1936, 1962) *L'origine de la géométrie* (tr. J. Derrida). Paris :P.U.F.
Husserl E. (1891, 1972) *La philosophie de l'arithmétique* (tr. J. English). Paris: P.U.F.
Heidegger M. (1929, 1964) *L'être et le temps* (tr. Boehm et de Waehlens). Paris : Gallimard.
Heidegger M. (1975) *Grundprobleme der Phänomenologie, Gesamt ausgabe 24*. Frankfurt : Klostermann
Hilbert (1904) *Uber die Grundlagen der Logik und der arithmetic* " in From Frege to Gödel p.129-139)
Kant E. (1980) *Oeuvres philosphiques* I. (Ed. F. Alquié). Paris : Gallimard.
Noirfalise R. et Perrin-Glorian M.J. (Ed.) (1995) *Actes de la VIII^e Ecole et Université d'Eté de Didactiques des Mathématiques.* IREM de Clermont-Ferrand.
Nichanian M. (1979) La *question générale du fondement : écriture et temporalité*. Strasbourg : Thèse de l'université des lettres et des sciences humaines.
Piaget J. (1924) L'expérience humaine et la causalité physique de L Brunsschvicg, *Journal de Psychologie*, 21, p.586-607.
Piaget J. (1953). *Logic and Psychology*. Manchester: Manchester University Press.
Piaget J. (1967) *Biologie et connaissance*. Paris : Gallimard :
Piaget J. (1937, 1968) *La naissance de l'intelligence dhez l'enfant*. Neuchatel : Delachaux et niestlé
Quine W. V.O. (1971) Reference and modality in Linsky
Quine W. V.O. (1972) (1959) *Le mot et la chose* (tr. Dopp et Gochet). Paris : Flammarion
Quine W. V.O. (1977) Relativité de l'ontologie et autres essais. Paris : AubieMontaigne
Russell B. (1905) On Denoting. *Mind*, 14, p.478-493
Russell B. (1940, 1969))*Signification et vérité* (tr. Devaux). Paris : Flammarion.
Sebestik J. (1992) *Logique et mathématique ches Bernard Bolzano*. Paris : Vrin.
Skolem (1922, Quelques remarques sur la fondation axiomatique de la théorie des ensembles" *From Frege to Gödel* pp. 290-301.
Thom R. (1972) Les mathématiques «modernes» : une erreur pédagogique et philosophique ? *L'age de la science*, III, n°3, p. 225-242
Thomas d'Aquin (1820) *Quaestiones disputatae de Veritate*. Rome : Marietti.
Vuillemin J., (1962) *La philosophie de l'algèbre*. Paris: P.U.F.

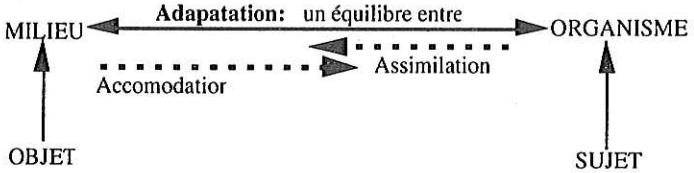
Annexe



La chose connue est dite objet de connaissance, selon ce qu'elle est en dehors du sujet connaissant, subsistant en elle-même, bien que de la chose, telle qu'en elle-même, il ne puisse pas y avoir de connaissance si ce n'est par ce qui d'elle sen trouve (re-formé) dans le sujet connaissant.

La notion d'«**objet**» ne doit donc pas être confondue avec celle de «**res**». L'objet est le produit d'un acte de l'esprit se con-formant à la réalité. **C'est en tant que l'objet est réel que la connaissance est vraie** : «veri enim ratio consistit in adaequatione rei et intellectus... intellectus incipit aliquid proprium habere quod res extra animam non habet sed aliquid ei correspondens, inter quae adaequatio attendi potest» (*De veritate* qu. I art. 3, ad Resp.).

L'objet est comme l'intersection de l'activité productrice de l'esprit et de l'accessibilité de la réalité : «conceptio intellectus est media inter intellectum et rem intellectam, quia ea mediante operatio intellectus pertingit ad rem: et ideo conceptio intellectus non solum est quod intellectum est, sed etiam id quo res intelligitur; ut sic id quod intellligitur, possit dici et res ipsa et conceptio intellectus» (*De Veritate* qu. IV art. 2, ad 3).



C'est pour pouvoir «étendre la notion d'adaptation vitale » à l'intelligence et à la «raison» que Piaget (1968, p.12-14) a postulé l'équivalence entre les interactions d'un organisme avec son milieu et la relation du sujet à l'objet. Ce faisant Piaget ne tient plus compte de la différence entre objet, c'est-à-dire ce qui est connu de la réalité, et réalité, c'est-à dire ce qui est indépendant des processus de connaissance ou ce qui leur est antérieur (les données telles qu'elles ont captées et enregistrées). Cette distinction est essentielle comme Granger le rappelle au début de son article sur la notion d'objet :

> ce que l'on nomme objet, à quelque niveau que ce soit, immédiat ou élaboré, de l'exercice de la pensée, ne peut être confondu sans plus, avec des données, considérées indépendamment de leur assemblage et organisées en unités distinctes, que l'on nommera phénomènes «ce qui apparaît
>
> Granger 1995, p. 670

Piaget ne s'est pas posé la question de la vérité des connaissances, il ne s'est intéressé qu'à leur développement en tant qu'elles constitueraient ce par quoi se poursuivraient les processus de l'évolution.

LES PROBLEMES DE POURCENTAGE : UNE APPLICATION DES PROBLÈMES DE CONVERSION PROPORTION-QUANTITÉ

Werner L. DAMM

La difficulté importante des problèmes de modélisation porte sur l'analyse et la compréhension de l'énoncé. C'est par rapport à cette difficulté que des représentations non-discursives peuvent être essentielles. Nous avons expérimenté avec des élèves un type de représentation qui peut être utilisé aussi bien pour les problèmes de conversion proportion-quantité, les problèmes de mélange et les problèmes de pourcentage. C'est l'élaboration et le fonctionnement de ce type de représentation que nous décrivons dans cet article.

Les problèmes de pourcentage, comme les problèmes de conversion proportion-quantité et les problèmes de mélange sont des problèmes élémentaires de mathématisation, qui peuvent être résolus par des opérations portant sur les données de l'énoncé. Dans un travail antérieur (Damm, 1991) nous avions établi une classification de ces types de problème en fonction du texte de l'énoncé, de la question posée, et de la présence ou l'absence de l'effectif de référence dans le texte. Ainsi en partant de la distinction classique dans tout énoncé de problème, entre la partie informative proprement dite (toutes les expressions décrivant une situation et fournissant des données), et la question (ce par rapport à quoi des solutions sont attendues), on voit deux sources différentes de variation des énoncés : on peut modifier la partie informative sans changer la question ou conserver la partie informative et changer la question. Les problèmes qui en résultent ne sont pas de difficultés équivalentes comme nous le verrons.

Tout énoncé de problème de conversion proportion-quantité doit, implicitement ou explicitement, faire référence à trois types d'objets constitutifs des termes d'une «proportion» au sens le plus commun du terme : une quantité totale qui constitue l'univers de référence, une ou plusieurs quantités partielles obtenues par partage ou prélèvement sur cette quantité totale et la comparaison entre chaque quantité partielle et la quantité totale. Ces objets renvoient évidemment aux éléments pertinents d'une situation extra-mathématique et ils peuvent être décrits par des valeurs numériques interprétables en termes de grandeurs, mais ils ne doivent pas être confondus avec des nombres. Avec ces objets nous avons comme une interface entre les traitements numériques proprement dits et les traitements sémantiques impliqués dans l'interprétation des situations auxquelles on applique les traitements numériques. Nous appellerons respectivement ces trois types d'objets : quantité de référence, quantité partielle et proportion au sens mathématique. Les problèmes les plus simples de conversion proportion-quantité peuvent alors être représentés par un schéma sémantique élémentaire, **qui n'utilise, pour la liaison entre deux noeuds, que des opérations de multiplication ou de division dans un sens défini.**

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
6 (1998) (p.197- 212) - IREM de Strasbourg

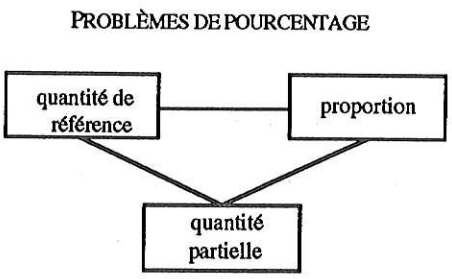


Figure 1 Schéma sémantique élémentaire

Les problèmes plus complexes de conversion proportion-quantité utilisent une combinaison de 2 (ou plus) schémas élémentaires[1]. Les problèmes de conversion proportion-quantité ne requièrent, pour leur résolution, que des opérations de multiplication et division.

Un problème de mélange diffère des problèmes de conversion proportion quantité par le seul fait qu'il requiert la création, par addition, d'une nouvelle quantité de référence à partir de deux autres quantités de référence données, directement ou indirectement, dans l'énoncé. Nous avons montré comment les situations de mélange peuvent être également représentées à partir d'une combinaison de schémas sémantiques élémentaires (Damm, Dupuis, 1992).

Les problèmes de pourcentage peuvent être vus comme une extension des problèmes de conversion proportion-quantité. Pour cela il suffit de considérer un pourcentage comme une proportion ramenée à une quantité de référence standard, 100. Dans cette perspective, les problèmes de pourcentage peuvent facilement être introduits après les problèmes de conversion proportion-quantité, lorsque l'on s'est assuré que les élèves maîtrisent bien ce type de problèmes (et bien sûr les additions !). Ils apparaissent alors comme un lieu de transfert des idées acquises lors de la résolution des problèmes de conversion proportion-quantité. Cela veut dire que les problèmes de pourcentage peuvent être introduits à l'aide de schémas dérivés de ceux que nous avons utilisés pour les problèmes de conversion proportion-quantité.

Dans cet article, nous présentons des énoncés de problème de pourcentage ne comportant qu'une question, mais dont la résolution requiert une, deux ou trois opérations. Nous verrons que la résolution des problèmes de pourcentage à une opération peut être représentée par le même type de schéma élémentaire triangulaire de conversion. La résolution des problèmes de pourcentage à deux ou trois opérations peut aussi être représentée par ce même type de schéma.

Il existe une grande variété de problèmes de pourcentage, mais leurs différences ne se situent pas au niveau des opérations nécessaires à leur résolution. En d'autres termes, on pourrait dire que les différences sont sémantiques et non pas mathématiques.

[1] C'est ce type de problèmes qui a été présenté dans (Damm, 1991).

I. Caractéristisation des problèmes de pourcentage

Dans l'énoncé d'un problème de pourcentage on peut trouver quatre éléments distincts, à savoir :

qi : quantité initiale, c'est la valeur de référence ;

qt : quantité de transformation, c'est la valeur qui transforme la quantité initiale pour obtenir la quantité finale ;

qf : quantité finale, c'est la valeur obtenue par addition (soustraction) de la quantité initiale avec la quantité de transformation ;

p : pourcentage : $p = \frac{qt \times 100}{qi}$

On trouve ces éléments directement ou indirectement dans tous les énoncés de problèmes de pourcentage. En prenant pour base ces éléments, nous avons classé les problèmes de pourcentage en neuf catégories, en fonction

- des deux quantités qui sont données dans la partie informative,

- la quantité qui est demandée dans la question[1] .

Ces deux critères sont nécessaires pour caractériser les problèmes de pourcentage et comprendre les résultats obtenus dans différentes enquêtes. Et ils sont suffisants pour classer tous les énoncés de problèmes de pourcentage, comme on peut le voir dans le tableau de la page suivante. Et Cette double dimension de classement nous montre qu'il n'est pas possible d'obtenir une classification hiérarchique.

[1] On trouve quelques énoncés, où seule la quantité de transformation est demandée, mais cela ne veut pas dire qu'il s'agisse de la quantité finale.

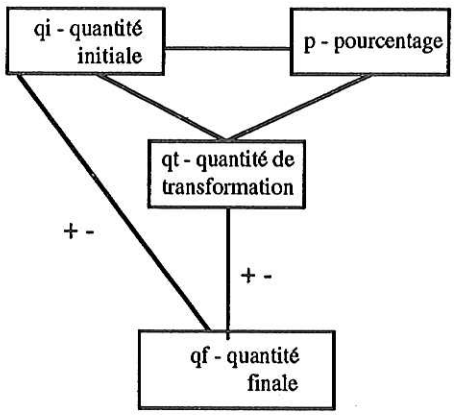
PROBLÈMES DE POURCENTAGE

		1		2		3	
		1 opération		2 opérations		3 opérations	
	données	question	traitement	question	traitement	question	traitement
1	qi p	qt	$\frac{qi \times p}{100} = qt$	q f	$\frac{qi \times p}{100} = qt$ $qi \pm qt = qf$		
2	qi qt	p	$\frac{qt \times 100}{qi} = p$				
3	qt p	qi	$\frac{qt \times 100}{p} = qi$	q f	$\frac{qt \times 100}{p} = qi$ $qi \pm qt = qf$		
4	qi qf			p	$qf - qi = qt$ ou $qi - qf = qt$ $\frac{qt \times 100}{qi} = p$		
5	qf qt			p	$qf \pm qt = qi$ $\frac{qt \times 100}{qi} = p$		
6	qf p			qi	$100 \pm p$ $\frac{qf \times 100}{100 \pm p} = qi$	qt	$100 \pm p$ $\frac{qf \times 100}{100 \pm p} = qi$ $qf - qi = qt$ ou $qi - qf = qt$

Comme on le voit, la résolution d'un problème de pourcentage à une question peut se faire par une, deux ou trois opérations. Dans ce décompte des opérations, nous n'avons pas tenu compte de la conversion de proportion-pourcentage, qui est, pour nous, un changement de registre d'écriture de nombres : $40\% = \frac{40}{100} = 0{,}40$.

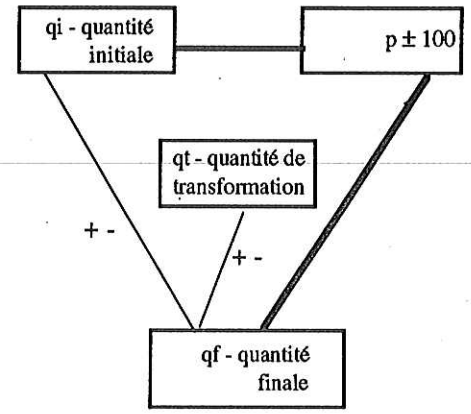
Il y a d'autres traitements, qui donnent le même résultat, pour la résolution des problèmes de pourcentage (par exemple, les tableaux de proportionnalité).

Les problèmes classés dans les cinq premières lignes du tableau constituent le champ classique des problèmes de pourcentage. Ils peuvent être représentés par le schéma sémantique ci-dessous. on l'obteint en modifiant le schéma sémantique élémentaire des problèmes de conversion proportion-quantité (figure 1) pour y faire apparaître l'opération d'addition.



Si la quantité finale n'est pas demandée (problèmes à une seule opération), une partie du schéma (+ -) est inutile.

La ligne 6 du tableau constitue en fait un autre champ de problèmes de pourcentage, non classique, où les données sont le pourcentage et la quantité finale. Le schéma doit être modifié pour faire apparaître la liaison directe entre la quantité finale et le pourcentage p ¶ 100. Suivant les cas, la quantité de transformation peut être présente (problèmes à trois opérations) ou absente (problèmes à deux opérations).



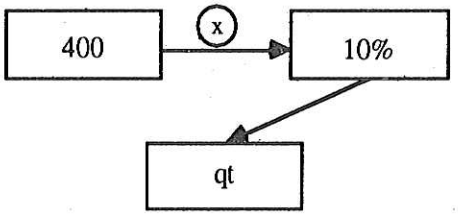
II.Exemples de problèmes de pourcentage classés par type.

Problème de type 1.1.

Un objet qui valait 400 francs a subi une augmentation de 10%. De combien le prix a-t-il augmenté ?

	donnée numérique	type des données numériques
données de	400	qi = quantité initiale
l'énoncé	10	p = pourcentage
question	?	qt = quantité de transformation

Chemin sur le schéma :

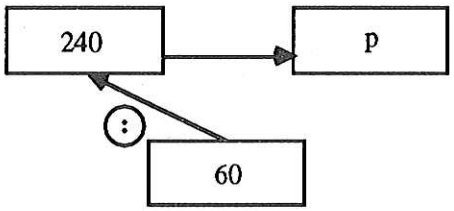


Problème de type 2.1.

Jean achète un radioréveil. Le prix affiché est 240 francs. Le commerçant lui fait une remise de 60 francs. Exprime cette remise en pourcentage.

	donnée numérique	type des données numériques
données de	240	qi = quantité initiale
l'énoncé	60	qt = quantité de transformation
question	?	p = pourcentage

Chemin sur le schéma :

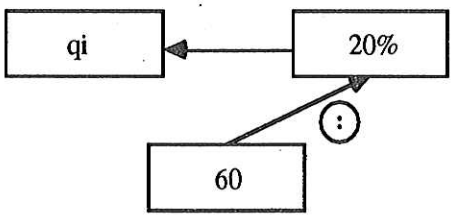


Problèmes de type 3.1.

20% du prix d'un pull est 60 francs. Quel est la valeur du pull ?

	donnée numérique	type des données numériques
données de	20	p = pourcentage
l'énoncé	60	qt = quantité de transformation
question	?	qi = quantité initiale

Chemin sur le schéma :



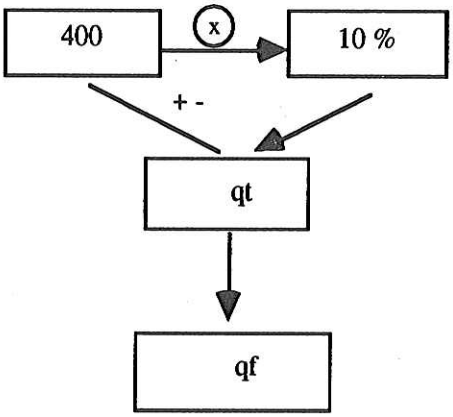
Remarquons que dans ces problèmes à une opération, on n'utilise jamais la quantité finale.

Problème de type 1.2.

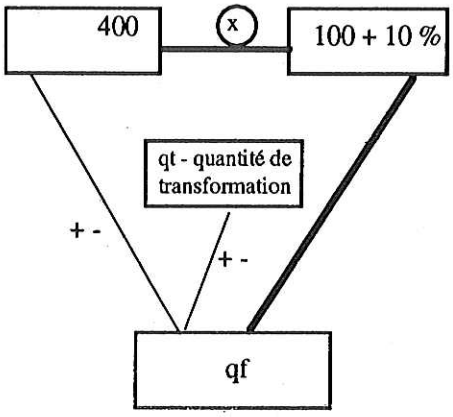
Un objet qui valait 400 francs a subi une augmentation de 10%. Quel est le nouveau prix de cet objet après l'augmentation ?

	donnée numérique	type des données numériques
données de	400	qi = quantité initiale
l'énoncé	10	p = pourcentage
question	?	qf = quantité finale

Chemin sur le schéma :



Chemin sur le schéma :



Remarquons que cette représentation peut être faite avec ou sans la présence de la quantité de transformation, laquelle n'est ni donnée ni explicitement demandée.

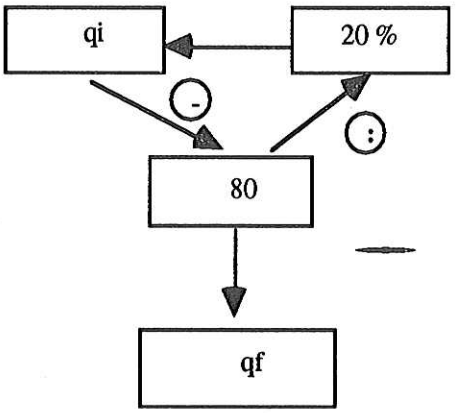
Mais pour pouvoir traiter ce problème de cette façon, il faut déjà avoir la maîtrise du champ non classique des problèmes de pourcentage (ligne 6 du tableau).

Problème de type 3.2.

Paul a obtenu une remise de 80 francs pour l'achat d'une radio. Cette remise correspond à 20% du prix total de la radio. Combien a-t-il payé pour cet appareil ?

	donnée numérique	type des données numériques
données de	80	qt = quantité de transformation
l'énoncé	20	p = pourcentage
question	?	qf = quantité finale

Chemin sur le schéma :

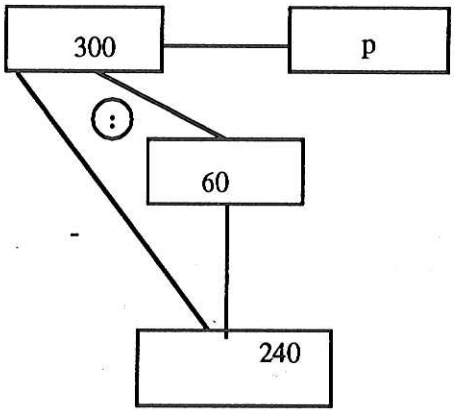


Problème de type 4.2.

Un pull valant 300 francs est soldé à 240 francs. Quel est le pourcentage de réduction ?

	donnée numérique	type des données numériques
données de	300	qi = quantité initiale
l'énoncé	240	qf = quantité finale
question	?	p = pourcentage

Chemin sur le schéma :

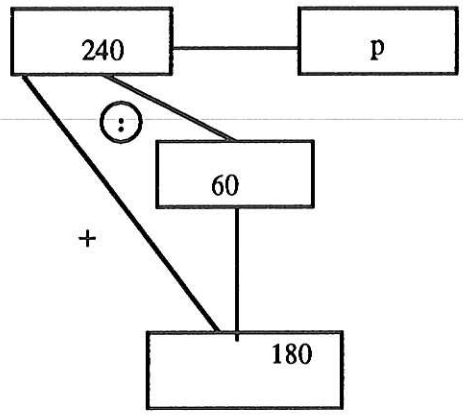


Problème de type 5.2.

Jean a acheté un radioréveil pour 180 francs. En sachant que le commerçant lui a fait une remise de 60 francs, exprime cette remise en pourcentage.

	donnée numérique	type des données numériques
données de	180	qf = quantité finale
l'énoncé	60	qt = quantité de transformation
question	?	p = pourcentage

Chemin sur le schéma :



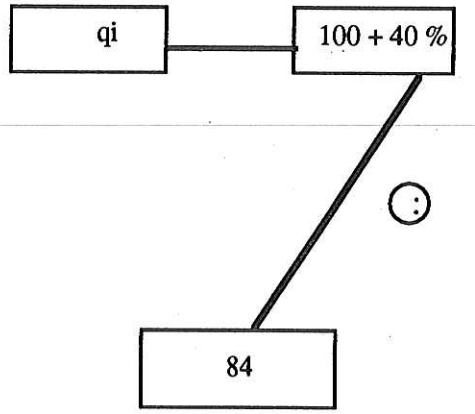
Problème de type 6.2.

La ligne 6 du tableau constitue le champ non classique des problèmes de pourcentage.

Après une augmentation de 40%, un objet vaut 84 francs. Combien valait-il avant cette augmentation?

	donnée numérique	type des données numériques
données de l'énoncé	40 84	p = pourcentage qf = quantité finale
question	?	qi = quantité initiale

Chemin sur le schéma :

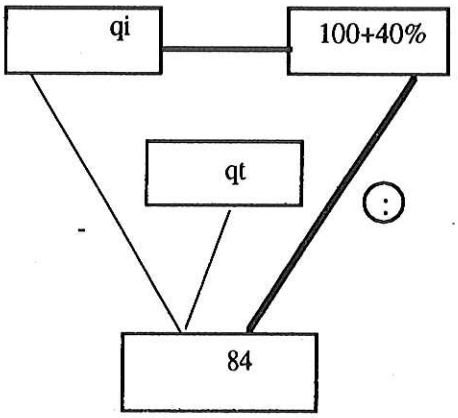


Problème de type 6.3.

Après une augmentation de 40%, un objet vaut 84 francs. De combien de francs, cet objet a-t-il augmenté ?

	donnée numérique	type des données numériques
données de	40	p = pourcentage
l'énoncé	84	qf = quantité finale
question	?	qt = quantité de transformation

Chemin sur le schéma :



III. Quelques résultats d'enquêtes

Des questionnaires comportant quelques problèmes de pourcentage ont été passés en 1987 (Évaluation du programme de mathématique - fin de sixième) et en 1988 (Évaluation du programme de mathématique - fin de cinquième) en France. Dans ces enquêtes on trouve cinq des neuf types de problèmes que nous avons classés. Les pourcentages de réussite observés sont les suivants :

	type 1.1.	type 1.2.			type 2.1.		type 4.2.	type 6.2.
	EXB19	EXA29	EXC27	APPA7	A2	D17	D18	M14
6ème	50%	36%	37%	38%				
5ème		54%			43%	29%	21%	6%

Note : EXA29 (6ème) est appelé B27 en 5ème.

Les résultats obtenus, montrent que le calcul d'une quantité de transformation, à partir de la quantité initiale et le pourcentage, est le type de problème le plus facile (type 1.1).

Les problèmes où la quantité finale est demandée et où la quantité initiale et le pourcentage sont donnés (deux opérations, type 1.2) sont plus faciles que les problèmes où le pourcentage est demandé, à partir de la quantité initiale et la quantité de transformation (une opération, type 2.1).

La création de la quantité de transformation par soustraction est une difficulté supplémentaire (type 4.2. - D18), mais la plus grande difficulté reste l'opération $100 \pm p$ (type 6.2. - M14).

Le questionnaire (version A [2]) figurant dans la brochure I.R.E.M.de Strasbourg (1979) est le suivant :

1) On a placé 1000 francs à la Caisse d'Epargne ; cet argent rapporte 6,5% d'intérêt par an. Calculer les intérêts obtenus au bout d'un an. Combien aura-t-on en tout ?

2) Un objet coûte 30 francs. On fait une remise de 20%. Combien le payera-t-on ?

3) Un objet coûte 200 francs. Si les prix augmentent de 10% par an, combien le payera-t-on dans deux ans ?

4) Dans une classe de 25 élèves, il y a 3 élèves nés en 1963, 8 nés en 1964, 12 nés en 1965, 2 nés en 1966. Calculer les pourcentages suivants : élèves nés en 1963, élèves nés en 1964, élèves nés en 1965, élèves nés en 1966.

---

[2] Deux versions du questionnaire avaient été faites, qui ne différaient que par les valeurs numériques.

5) 4000 élèves se présentent à un examen. 1000 le réussissent. Quel est le pourcentage de réussite ?

6) Le prix du litre de super est 2,75 francs. Sur cette somme, il y a 1,87 F de taxes. Quel est le pourcentage de taxes sur le prix du super ?

On constate que seulement deux types de problèmes différents sont utilisés, les types 1.2 et 2.1. Les pourcentages de réussite observés figurent dans le tableau ci-dessous.

	type 1.2.			type 2.1.		
	q 1	q 2	q 3	q 4	q 5	q 6
6ème	42%	42%	13%	21%	27%	16%
5ème	40%	40%	3%	27%	27%	4%
4ème	40%	50%	8%	26%	32%	6%
3ème	65%	73%	21%	57%	54%	30%

Dans cette enquête, on peut voir que le calcul d'une quantité finale, à partir de la quantité initiale et du pourcentage est plus facile (même avec deux opérations, type 1.2) que le calcul d'un pourcentage à partir de la quantité initiale et de la quantité de transformation (une opération, type 2.1).

La chute très significative du pourcentage de réussite de la question q3, qui est de type 1.2., à notre avis, tient à ce que la question q3 est une question cumulative, c'est à dire, le pourcentage demandé n'est pas sur un an, ce qui est naturel, mais sur deux ans.

Le grande chute du pourcentage de réussite pour la question q6 tient à sa place dans le questionnaire et à son contexte fiscal peu familier pour de jeunes élèves.

Observation :

Les élèves de 6ème et 5ème, qui ont répondu aux questions posées dans "Les pourcentages dans le 1° cycle : 34% de réussite" ont étudié en classe la notion de pourcentage ; par contre, les élèves de 4ème et 3ème dans la même enquête n'ont jamais entendu parler de pourcentage en classe. Ceci est dû au fait que l'enquête a été faite en 1978 à un moment où les programmes de mathématiques de 6ème et 5ème venaient de changer.

Conclusion

Nous avons introduit les schémas sémantiques élémentaires pour résoudre des problèmes de proportion quantité et des problèmes de mélange dans des classes de troisième et de seconde au Brésil. Au termes de séquences d'activité d'environ quatre à cinq heures sur ces problèmes de conversion et de mélange, nous avons rapidement expliqué comment les schémas sémantiques élémentaires pouvaient être utilisés pour analyser les problèmes de pourcentage. Dans notre projet d'expérimentation, la résolution des problèmes de pourcentage devait permettre d'évaluer le transfert et donc l'acquisition du travail d'apprentissage fait sur les problèmes de conversion et de mélange. Nous avons obtenu des résultats spectaculaires que nous présenterons, en même temps que les séquences didactiques, dans un prochain article.

Références

DAMM W. (1991) : "Le choix de la donnée de référence dans un énoncé de problème", *Activités mathématiques* N° 13

DAMM W., DUPUIS C. (1992) "Les problèmes de mélange" , *Activités Mathématiques*, N° 18, pp 1 - 12.

IREM DE STRASBOURG (1979) *Les pourcentages dans le premier cycle : 34%de réussites*, Brochure de l'Irem de Strasbourg

ANNEXE

PROBLÈMES DE POURCENTAGE.

On trouvera ci-dessous un exemple de problème de chacun des 9 types.

1) M. Paul place 5000F dans une banque qui lui propose un taux d'intérêt de 5% (intérêt annuel).

Calculer les intérêts que lui rapportera cette somme au bout d'un an.

2) Lors d'un sondage effectué sur un échantillon de 2345 personnes, 938 personnes ont répondu "OUI".

Quel est le pourcentage de personnes qui ont répondu "OUI" ?

3) Dans une ville, 1200 personnes boivent de café chaque jour, ce qui correspond à 30% des habitants de cette ville.

Combien y a-t-il d'habitants dans cette ville ?

4) M. Michel place 3500F dans une banque qui lui propose un taux d'intérêt de 4,5% (intérêt annuel). De quelle somme disposera-t-il au bout d'un an ?

5) Francis achète une voiture. Le commerçant lui fait une remise de 5%, qui correspond à 1200F.

Quel est la valeur de la voiture ?

6) Dans un championnat de foot, chaque club a fait 32 matchs. Le club champion a gagné 24 fois.

Quel est le pourcentage de matchs que le club champion n'a pas gagné ?

7) Lundi, dans mon collège, il y avait 741 élèves. On sait que lundi 30 élèves ont manqué les cours.

Quel est le pourcentage des élèves qui ont manqué les cours lundi ?

8) Le prix d'un modèle de voiture, à cause des nombreux accessoires ajoutés, a subi une augmentation de 20%. Le prix de la voiture, avec tous les accessoires, est 54000F.

Quel était le prix de cette voiture sans les accessoires ?

9) Le prix d'un modèle de voiture, à cause des nombreux accessoires ajoutés, a subi une augmentation de 20%. Le prix de la voiture, avec tous les accessoires, est 54000F.

Quel est le prix des accessoires ?