SIGNE ET OBJET (II)

QUESTIONS RELATIVES À L'ANALYSE DE LA CONNAISSANCE

Raymond DUVAL

There are now two classical, sometimes opposite, approaches in order to analyse mathematical knowledge acquisition: the epistemological one and the didactical one. They are very difficult to link together and they leave the cognitive archictecture and the awareness of learners aside. In fact, we must distinguish three basic standpoints: the scientific one, the cognitive one and the phénomenological one. The undersanding of knowledge acquisition processes depends theses three standpoints taken into account.

We compare the specific requirements of these standpoints according to the main criteria for knowledge analysis. We can see some misleading similaraties or parallelisms between the distinctions usually made in each standpoint. And, above all, we can see where and how the processes described in each of them can be articulated. Thus we sketch out a model for knowledge analysis in order to developp mathematical understanding in learning contexts.

Dès que l'on cherche à analyser la connaissance dans le but de **découvrir les conditions de la formation et de l'acquisition des connaissances**, on se trouve très vite pris dans le conflit entre deux points de vue souvent présentés comme exclusifs: le point de vue scientifique et le point de vue psychologique. Ce conflit a surgi au XIXème siècle à propos des premières analyses des processus psychologiques susceptibles de sous-tendre la pensée logique. Elles ont été rejetées sous l'accusation de «psychologisme», c'est-à-dire de réduction entraînant la méconnaissance des conditions d'une démarche logique valide. Ainsi c'est cette accusation que Frege a reprise contre l'ouvrage de Husserl *La philosophie de l'arithmétique* (1891) ouvrage qui présentait une genèse phénoménologique de la notion de nombre. Et Piaget, dans des conférences à l'université de Manchester en 1952, éprouvait encore le besoin de défendre la possibilité et l'intérêt de tels essais :

> La question de savoir si les structures et les opérations de la logique correspondent à quelque chose dans les processus réels de notre pensée et si ceux-ci sont conformes à de lois logiques est encore une question actuelle
> Piaget 1953, p.XVII.

Plus récemment ce conflit a resurgi à propos de l'enseignement des mathématiques, avec les problèmes nouveaux que la «massification» de l'enseignement secondaire a soulevés. A l'approche psychologique, renouvelée par Piaget, on a opposé une approche purement épistémologique qui, au nom du principe piagetien de parallélisme entre les phases du développement intellectuel au plan individuel et les étapes historiques du développement de la pensée mathématique et physique, prend l'histoire comme repère pour analyser les problèmes d'apprentissage ou d'enseignement. Il ne s'agit pas là d'un débat purement théorique, car, sous le point de vue épistémologique, ce que l'on défend c'est que les élèves «apprennent ou fassent vraiment des mathématiques» et, sous le point de vue psychologique, c'est l'acquisition effective de «savoirs» mathématiques par des individus en formation initiale que l'on essaie d'analyser. L'enjeu de ce débat est donc important. Il s'agit de l'apprentissage des mathématiques par tous les enfants et par tous les adolescents scolarisés: à quelles conditions peuvent-ils s'approprier les démarches de la pensée mathématique et accéder aux différents objets mathématiques enseignés ? Toute tentative de réponse à cette question fondamentale

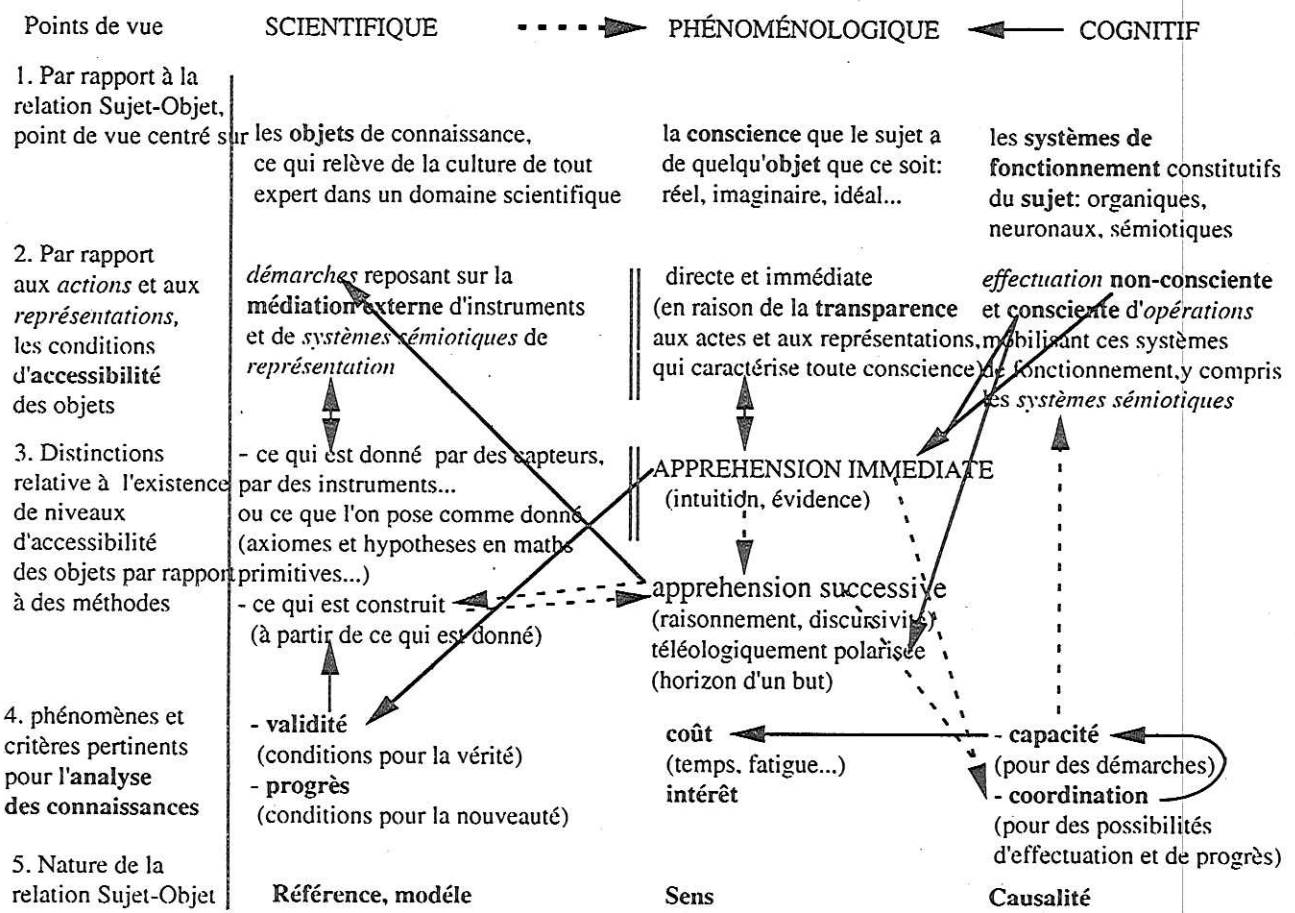
©
Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
6 (1998) (p. 165-196) - IREM de Strasbourg

d'un point de vue éducatif semble piégée par ce conflit thématisé en un dilemme : ou bien on s'intéresse d'abord aux mathématiques et alors l'apprentissage ne peut que suivre la présentation de «situations» mathématiques devant être «riches» «fondamentales» «intéressantes»... sans que l'on ait à se préoccuper du fonctionnement cognitif humain que l'activité mathématique requiert et des facteurs de développement de ce fonctionnement cognitif, ou bien on essaie de comprendre et de prendre en compte ce fonctionnement et alors on ne pourrait qu'être étranger à des situations d'apprentissage des mathématiques !

En fait, l'opposition dont ce conflit s'est nourri est trop simple pour correspondre à la réalité de cette activité requise pour pouvoir accéder à une connaissance scientifique. La connaissance est une activité trop complexe pour que l'analyse de ses processus de fonctionnement puisse être réduite à la prise en compte d'un seul point de vue. Contrairement à ce que laisse croire ce débat récurrent, il n'y a pas seulement deux points vue à prendre en compte, le point de vue scientifique et le point de vue psychologique, mais trois. Car, en épistémologie comme en didactique ou en pédagogie, on associe implicitement l'un de ces deux points de vue à un troisième, qui en est pourtant radicalement différent : le point de vue phénoménologique, c'est-à-dire celui de la conscience du sujet. Comment le sujet peut-il avoir accès aux objets de connaissance qui lui sont proposés ? De quels moyens dispose-t-il pour cet accès ? Quel type de transformation consciente, en termes de sens et d'assurance, l'acquisition d'une connaissance entraîne-t-elle ? Ces questions phénoménologiques ne portent pas sur des différences individuelles entre les sujets mais sur **les constantes de ce rapport conscient que tout sujet a concernant l'initiative et le contrôle d'une activité de connaissance.** Ce point de vue phénoménologique ne doit donc être confondu ni avec le point de vue scientifique, ni avec le point de vue psychologique puisque, méthodologiquement, la psychologie ne limite pas la réalité du sujet à sa conscience et qu'elle écarte tout témoignage introspectif c'est-à-dire toutes les auto-observations dans lesquelles les données se confondent nécessairement avec l'interprétation immédiate de celui qui les «vit». Car il n'y a jamais d'accès à la conscience d'un sujet en position de tiers.

Si l'on veut comprendre les conditions de l'acquisition des «connaissances» scientifiques, et en particulier celles des connaissances mathématiques, ces trois points de vue sont également fondamentaux. Aucun ne peut être négligé ou privilégié. C'est ce qui rend si complexe une analyse de la connaissance scientifique ou mathématique conduite dans le but de dégager les conditions de son acquisition par de jeunes élèves. C'est à la distinction et à l'articulation, nécessaires, de ces trois points de vue dans l'analyse de la connaissance que cet article est consacré (les trois colonnes du tableau de la figure 1, ci-après).

Nous allons d'abord montrer la spécificité de ces trois points de vue par rapport à la nature de la relation constitutive de toute connaissance (tableau: lignes 1 et 5). Puis nous examinerons en quoi ils divergent sous des parallélismes apparents. Pour cette comparaison, nous avons retenu trois critères généraux relatifs à l'analyse des connaissances (lignes 2-4): ils nous permettront de mettre en évidence trois oppositions majeures concernant les conditions d'accessibilité aux objets. En effet, chaque point de vue conduit à mettre en avant des contraintes, des conditions de fonctionnement ou des processus hétérogènes. Enfin, nous verrons pourquoi chaque point de vue doit être resitué dans le contexte global du fonctionnement de l'activité de connaissance chez un sujet humain, du moins si l'on veut comprendre comment des élèves en formation initiale peuvent entrer dans des univers de connaissances en continuelle expansion et en continuelle réorganisation. Le schéma construit en prenant comme noeuds certaines cases du tableau (figure 1) représente, à titre d'exemple, certains des processus du fonctionnement global de l'activité de connaissance chez un sujet humain.


Points de vue
SCIENTIFIQUE
PHÉNOMÉNOLOGIQUE
COGNITIF
1. Par rapport à la relation Sujet-Objet, point de vue centré sur
les objets de connaissance, ce qui relève de la culture de tout expert dans un domaine scientifique
la conscience que le sujet a de quelqu'objet que ce soit: réel, imaginaire, idéal...
les systèmes de fonctionnement constitutifs du sujet: organiques, neuronaux, sémiotiques
2. Par rapport aux actions et aux représentations, les conditions d'accessibilité des objets
démarches reposant sur la médiation externe d'instruments et de systèmes sémiotiques de représentation
directe et immédiate (en raison de la transparence aux actes et aux représentations, qui caractérise toute conscience)
effectuation non-consciente et consciente d'opérations mobilisant ces systèmes de fonctionnement, y compris les systèmes sémiotiques
3. Distinctions relative à l'existence de niveaux d'accessibilité des objets par rapport à des méthodes
- ce qui est donné par des capteurs, par des instruments... ou ce que l'on pose comme donné (axiomes et hypotheses en maths primitives...)
- ce qui est construit (à partir de ce qui est donné)
APPREHENSION IMMEDIATE (intuition, évidence)
apprehension successive (raisonnement, discursivité) téléologiquement polarisée (horizon d'un but)
4. phénomènes et critères pertinents pour l'analyse des connaissances
- validité (conditions pour la vérité)
- progrès (conditions pour la nouveauté)
coût (temps, fatigue...)
intérêt
- capacité (pour des démarches)
- coordination (pour des possibilités d'effectuation et de progrès)
5. Nature de la relation Sujet-Objet
Référence, modéle
Sens
Causalité

I. Les trois points de vue possibles dans l'analyse de la connaissance

De nombreux modèles philosophiques, psychologiques ou épistémologiques ont été proposés pour analyser la connaissance. Tous s'appuient sur la même caractérisation du phénomène de la connaissance en tant qu'activité fondamentale propre aux espèces vivantes évoluées et, plus particulièrement, à l'homme : *l'activité de connaissance consiste dans la relation d'un sujet à un objet*. Pour preuve, ces deux déclarations, l'une extraite des *Quaestiones disputatae de Veritate* (1256) de Saint Thomas d'Aquin, ouvrage donnant une synthèse des discussions séculaires du modèle qu'Aristote avait proposé dans le troisième livre du *Περι Ψυχης*, et l'autre extraite d'un ouvrage contemporain *Biologie et connaissance* (1967). Le modèle piagetien est particulièrement représentatif non en raison de sa forte influence en didactique des mathématiques, mais parce que Piaget y a repris, à travers les ouvrages de Brunschvicg, une analyse épistémologique des mathématiques et de la physique, qui est d'inspiration kantienne:

> **res cognita** dicitur esse ***cognitionis objectum***, secundum quod **est extra cognoscentem** in seipsa subsistens, quamvis **de re tali** non sit cognitio ***nisi per id quod de ipsa est in cognoscente***
>
> Thomas d'Aquin 1820, qu. 14 art. 8, ad 5 (traduction et commentaire en annexe)

> **Toute connaissance**, en effet, de quelque nature qu'elle soit, soulève **le problème des relations entre le sujet et l'objet** et ce problème donne lieu à de multiples solutions selon que l'on attribue cette connaissance au sujet seul, à une action de l'objet ou à des interactions de diverses formes. Or ***le sujet étant un aspect de l'organisme*** et ***l'objet un secteur quelconque du milieu***, le problème de la connaissance correspond d'un tel point de vue au problème des relations entre l'organisme et le milieu...
>
> Piaget 1967, p. 65

Naturellement, les différences et les divergences entre les modèles sont plus importantes que cette référence commune à la relation d'un sujet à un objet. Car les modèles ne mettent pas en évidence les mêmes processus de fonctionnement cognitif ou les mêmes processus d'acquisition des connaissances. Mais si l'on examine leurs problématiques et leurs analyses on peut remarquer qu'ils sont centrés, de façon prioritaire voire exclusive :

— sur les objets indépendamment des représentations que les sujets en ont, comme dans le projet antikantien de Bolzano repris par Frege, ou comme dans la partition cartésienne des représentations en fonction du caractère, objectif ou non, de leur contenu,

— sur les structures du sujet, celles-ci déterminant les types d'objets auxquels il est capable d'avoir ou non, accès, comme avec le modèle kantien d'une «architectonique de la raison pure» ou avec les modèles récents d'«architecture de la cognition»,

— sur la nature de relation existant entre le sujet et l'objet. Mais ici une distinction, correspondant à une différenciation historiquement tardive, doit être faite entre représentation et conscience.

Pour désigner cette relation, c'est le terme «représentation» qui s'est d'abord imposé. Déjà attesté au moyen âge1, il a pris à la suite de Descartes une importance primordiale dans l'analyse de la connaissance en tant que science. Mais une scission s'est peu à peu produite entre les *représentations objectives* qui relèvent uniquement d'un système de règles et les *représentations subjectives* qui relèvent d'organisations ou de l'histoire propres aux sujets. De sorte que le terme «représentation» a très vite cessé de désigner la relation entre sujet et objet pour ne plus désigner que des moyens d'accès, valides ou non, du sujet à l'objet ou, au contraire, que des croyances liées à l'age, au

milieu.. **Cette scission a commencé à se produire dès que l'on a cessé d'assimiler implicitement représentation et conscience.**

Si beaucoup de modèles partent de la nature «représentationnelle» de la relation du sujet à l'objet, en revanche la plupart négligent l'importance du caractère ***conscient*** de cette relation. Et cela pour les modèles qui se situent aussi bien dans une perspective épistémologique d'acquisition des connaissances que dans une perspective purement psychologique! Le caractère conscient des représentations serait un caractère secondaire, car la conscience serait un phénomène purement de surface ou renverrait à des particularités strictement individuelles. D'où la question récurrente: la conscience du sujet est-elle fondamentale pour analyser les phénomènes de connaissance scientifique (du moins ceux qui se rapportent à leur développement ou à leur acquisition dans le cadre d'un apprentissage scolaire qui se révèle être long et complexe)? On ne peut pas cependant ignorer le fait irrécusable, comme Descartes l'avait déjà bien compris, que la relation entre un sujet et un objet s'initialise, se contrôle et se modifie au niveau de la conscience que ce sujet en prend. Bien qu'elle ait une dimension représentationnelle, la conscience dépasse toute représentation.

La connaissance est une activité complexe qui présente trois faces différentes, selon ce que l'on privilégie dans l'analyse de la relation sujet-objet. Nous les désignerons respectivement comme le point de vue scientifique, le point de vue cognitif et le point de vue phénoménologique (Fig. 2, ligne 1). Ce que l'on appelle, depuis guère plus d'un siècle, l'«épistémologie» revient à tenter de fusionner le point de vue scientifique, lequel est spécifique à une discipline, avec l'un des deux autres points de vue. La force de séduction de la démarche cartésienne est de se trouver en deçà d'une différenciation des points de vue scientifique et phénoménologique. La particularité de l'épistémologie génétique de Piaget, laquelle repose sur une interprétation de la relation sujet/objet en termes d'«adaptation» et décrit ses processus par une succession de «déséquilibres» et d' «équilibrations», est d'avoir tenté de fonder le point de vue proprement scientifique non sur le point de vue phénoménologique mais sur celui, cognitif, des structures biologiques du sujet.

Les trois points de vue possibles pour l'analyse de la connaissance étant ainsi distingués, nous pouvons maintenant en indiquer brièvement les caractéristiques (Fig.1, lignes 2 et 4).

a. Caractéristiques de la connaissance du point de vue scientifique : les conditions «objectives» d'accès aux objets

Il suffit de regarder l'histoire des sciences, à n'importe quelle période de leur histoire ou de leur développement pour voir les deux caractéristiques majeures qui ont creusé un fossé de plus en plus important entre la connaissance comme science et les différentes formes de connaissances spontanées: la **nécessité d'une médiation externe**, à la fois instrumentale et sémiotique, et la **double exigence de validité et progrès**. Ces deux caractéristiques sont d'une certaine manière complémentaires et déterminent les conditions nécessaires d'accès aux objets.

La médiation externe est instrumentale. Cette médiation instrumentale s'est avérée, et s'avère toujours fondamentale à la fois pour élargir le champ des phénomènes accessibles et pour permettre des observations fondées sur des mesures. Il suffit de rappeler ici le rôle joué par les instruments d'optique dans l'essor des sciences au XVIIème (de Galilée 1609 à Hook 1665 et à Van Leeuwenhoek)! Le progrès des connaissances scientifiques dépend du progrès dans les instruments et les appareils que l'on est mesure de réaliser techniquement.

Mais la médiation externe est aussi sémiotique. Cette médiation sémiotique s'avère fondamentale pour l'organisation des relevés d'observation ou d'expérimentation, et pour leur traitement. Il suffit de rappeler ici le développement, en marge du langage naturel ou par dérivation de ce langage, de systèmes de signes et de nomenclatures qui vont constituer des «langages scientifiques». Ces langages scientifiques sont les moyens nécessaires à la désignation des objets comme à la possibilité de traitements pouvant prendre la forme d'algorithmes, etc. L'écriture, c'est-à-dire la production de signes et de formes selon la modalité visuelle, a été la condition nécessaire pour le développement de ces systèmes sémiotiques de représentation. Ainsi les nombres, en tant qu'objets différents et indépendants des choses dénombrées, n'ont pu devenir accessibles qu'avec la formation d'un système d'écriture de position à base soixante, probablement au début du IIe millénaire avant J.C. : les étapes de la «naissance du nombre»[1] ont été celles de la conquête d'un système d'écriture de position. Que l'on songe aussi à l'importance du développement d'une écriture littérale pour le développement de l'algèbre. Et que l'on songe, également, au développement considérable des notations et des systèmes de représentation en mathématiques de Descartes à Peano.

L'exigence de validité est d'une certaine façon plus forte que celle de progrès, cette dernière étant très liée à la contingence historique des découvertes et des innovations techniques. L'exigence de validité procède de la centration exclusive sur les objets tels qu'ils peuvent être atteints ou découverts au terme d'opérations et de démarches indépendantes du fonctionnement cognitif propre aux sujets, c'est-à-dire indépendantes de leurs représentations comme des éventuelles appréhensions directes qu'ils pourraient en avoir. Cette exigence de validité porte sur l'emploi des moyens et des procédures mises en oeuvre pour établir une connaissance: elle requiert à la fois un examen de leur pertinence et un contrôle des différentes phases de leur mise en oeuvre. **C'est pourquoi l'exigence de validité, inhérente à la connaissance comme science, implique une médiation externe à la conscience des sujets.**

b. Caractéristiques de la connaissance du point de vue cognitif : les capacités «subjectives» d'accès aux objets

Le point de vue cognitif porte sur l'activité de connaissance en tant qu'elle est produite, ou devrait pouvoir être produite par un être individuel, c'est-à-dire par un système physique autonome (un organisme, sujet humain ou animal, un robot...), lui permettant ainsi d'accéder à un domaine d'objets, de discriminer des informations et d'élaborer des réponses appropriées. Lorsqu'on se place de ce point de vue, on cherche à répondre à ces deux questions :

— quel est le type spécifique de fonctionnement requis pour qu'un sujet puisse accéder à un domaine d'objets déterminés ?

— quelles sont les structures ou les organisations internes permettant à un sujet d'effectuer les opérations nécessaires pour ce fonctionnement ?

---

[1] Nous reprenons ici le titre d'un article de G. Goldstein dans le numéro de *La Recherche* consacré aux nombres (1995, n°278). On peut mesurer le progrès de la réflexion sur cette question en relisant les pages que Brunschvicg y consacrait dans son ouvrage de 1912 *Les Etapes de la philosophie mathématique*, qui a servi, avec celui paru dix ans plus tard *L'expérience humaien et la causalité physique*, de base théorique aux travaux de *La genèse du nombre chez l'enfant* (Piaget 1924, p. 600-607). Brunschvicg y explique la genèse de la notion de nombre par les seules opérations de mise en correspondance et de sériation (Brunschvicg 1972, p. 8, 10, 16, 403-404, 477-480).

Toutes les recherches ont montré qu'on ne peut pas élaborer un modèle pertinent et opérationnel répondant à ces deux questions sans prendre en compte les deux données fondamentales suivantes : l'activité de connaissance dont un système autonome est capable dépend de son **«architecture fonctionnelle»,** et cette architecture fonctionnelle implique **une coordination des différents systèmes permettant de remplir les fonctions** de cette architecture fonctionnelle.

Un sujet ou un système capable d'un certain type de connaissance est une organisation de plusieurs systèmes de fonctionnements, et il faut autant de systèmes de fonctionnements qu'il y a de fonctions à remplir pour produire le type connaissance souhaité. Il est maintenant classique de citer le document de von Neumann (1945), qui constitue comme une date dans l'invention technique de l'ordinateur :

> Si l'appareil doit être souple, c'est-à-dire aussi général que possible, alors on doit distinguer entre les instructions d'un problème...et les organes de contrôle général qui lisent et exécutent ces instructions, quelles qu'elles soient. Les premières doivent être enregistrées (une fonction mémoire), les secondes sont représentées par un organe dans l'appareil. Nous appelons «contrôle central» cette dernière fonction et elles seule
>
> von Neumann First draft of a report on the EDVAC

Ce serait une erreur de restreindre cette notion d'«architecture fonctionnelle» à la conception même de l'ordinateur. Il s'agit d'une application extrêmement féconde dans l'analyse de la connaissance humaine. Nous avons déjà indiqué dans la première partie de cet article que l'un des sauts dans le passage du point de vue épistémo-phénoménologique de Descartes au point de vue épistémo-cognitif de Kant consistait dans la substitution d'une «architectonique de la Raison pure» à la simple postulation d'un sujet dont le fonctionnement aurait la simplicité de la perception immanente immédiate du *cogito*. Et la psychologie cognitive depuis Broadbent (1958) et Newell et Simon (1963) n'a cessé d'élaborer et de diversifier des modèles d'«architecture fonctionnelle» pour rendre compte des différentes formes de l'activité de la connaissance. Rappelons le titre d'un ouvrage de Fodor qui exprime admirablement la signification de cette première caractéristique de l'analyse cognitive de la connaissance: *La modularité de l'esprit* (1983; tr. 1986).

Si la connaissance dépend d'une «architecture fonctionnelle», les différents systèmes de fonctionnement qu'elle requiert doivent être coordonnés entre eux. L'une des principales différences entre l'architecture fonctionnelle des systèmes experts que l'on implémente sur un ordinateur et celle de l'intelligence humaine tient à ce que **la coordination des systèmes, pour l'être humain, n'est pas donnée au départ : elle doit être progressivement acquise par apprentissage et, lorsqu'elle est réalisée, elle conserve toujours une certaine flexibilité.** En outre, tous le systèmes requis par l'architecture fonctionnelle de l'intelligence humaine ne sont pas donnés au départ. **Certains doivent être transmis par l'environnement.** Tel est le cas des systèmes sémiotiques. Mais cela ne signifie aucunement que les systèmes sémiotiques aient un rôle secondaire dans la formation des connaissances. **Au contraire ils permettent aux individus de s'approprier plus rapidement tous les acquis de générations antérieures** comme le notait Wallon en 1956 à propos du langage:

> C'est là (dans l'emploi du langage) le pas essentiel que l'évolution biologique a fait franchir à l'homme. Il y a dans son système nerveux des centres qui lui permettent l'usage de la parole... *La possibilité est née de civilisations accroissant leur héritage* d'âge en âge. Les individus meurent, mais *le langage acquis demeure et fructifie*... l'homme est lui-même transformé par des réalisations mentales techniques et sociales

> que le langage lui a permis d'élaborer...Tout individu subit l'empreinte de la civilisation qui règle son existence et s'impose à son activité. Le langage qu'il en reçoit est le moule de ses pensées et donne à ses raisonnements leur structure...
>
> Wallon La psychologie génétique Bulletin de Psychologie p.4

Tous les systèmes sémiotiques remplissent ce rôle de mémoire transmissible des démarches de connaissance inventées ou crées par les générations antérieures.

La notion d'une architecture fonctionnelle nous renvoie donc à l'idée de capacité globale d'un sujet pour accéder à un type d'objet et à celle de coordination entre des systèmes hétérogènes, leur synergie permettant, seule, d'accéder à ce type d'objet. On voit donc l'importance du déplacement effectué lorsqu'on passe d'un point de vue scientifique à un point de vue cognitif. L'activité de connaissance n'est plus analysée par rapport à la validité des méthodes et des démarches, ou par rapport au type de médiation instrumentale et sémiotique à mettre en oeuvre, mais par rapport aux capacité du sujet pour effectuer les opérations, sémiotiques ou instrumentales requises. Cela implique non seulement l'appropriation des différents systèmes constitutifs d'une architecture fonctionnelle, mais également la mise en place de leur coordination. C'est cela qui constitue l'enjeu des «apprentissages fondamentaux», y compris dans les disciplines scientifiques.

c. Caractéristiques de la connaissance du point de vue phénoménologique: les exigences «vécues» de certitude et d'accès le plus direct possible aux objets

La connaissance est une activité consciente, c'est-à-dire une activité qui, non seulement, s'accomplit dans le monde d'un sujet mais qui dépend aussi de l'initiative et du contrôle de ce sujet. La conscience se caractérise par une double orientation.

L'une est de nature intentionnelle, définie par cette formule célèbre : toute conscience est d'emblée conscience de quelque chose (Husserl 1972, p.148-150, 178-180). Cela veut dire qu'il n'y a pas de conscience qui ne soit pas dirigée *sur quelque chose qui lui soit immédiatement*[1] *accessible et qui prenne d'emblée statut d'objet*. Et ce qui lui apparaît, et qu'elle remarque, semble se détacher d'*un horizon d'autres objets* vers lesquels elle pourrait tourner son attention. A cette première orientation correspond la première caractéristique phénoménologique de la connaissance: la transparence, c'est-à-dire le fait que l'accès à un objet est vécu comme direct et immédiat. Cela veut dire que **du point de vue du sujet, il n'y a pas de représentation, mais seulement des objets qui lui apparaissent.** Rien d'intermédiaire ne s'interpose entre lui et ce dont il est actuellement conscient. Pour reprendre une terminologie husserlienne, cette relation est vécue, elle n'est pas objectivée : «si nous vivons, pour ainsi dire dans l'acte effectué... le moi comme point de référence n'apparaît pas» (Husserl 1972, p.178). L'acte vécu n'apparaît pas à la conscience, c'est seulement l'objet corrélat de l'acte vécu qui apparaît. L'orientation intentionnelle de la conscience signifie donc ***la transparence de ses actes aux objets qui se manifestent immédiatement à elle***. Et cela indépendamment du fait que l'objet existe vraiment soit un effet d'illusion (Heidegger 1975, p.88-89, 95).

---

[1] Est phénoménologiquement immédiat ce qui ne prend aucun laps de temps perceptible par la conscience (ne fût-ce qu'une seconde). Mais d'un point de vue cognitif ce qui est phénoménologiquement immédiat prend un laps de temps (quelques centièmes de seconde) et résulte d'un ensemble de traitements «automatiques», c'est-à-dire effectués de façon infra-consciente à des échelles où les micro-durées ne sont plus perceptibles. L'automatisation et la «compactification» des traitements de traitements, d'abord effectués consciemment sur des objets immédiats, sont les conditions pour pouvoir accéder à des objets qui autrement resteraient inacessibles au sujet.

L'autre orientation est de nature téléologique : la conscience peut se fixer des buts et organiser ou planifier son activité en fonction de ces buts. Généralement lorsque l'on veut prendre en compte la conscience on ne retient que cette seconde orientation. Mais c'est l'horizon inhérent à la première orientation qui donne la possibilité de cette seconde orientation. A cette seconde orientation de la conscience correspond la seconde caractéristique de la conscience : ***le coût d'une démarche pour atteindre un objectif.***

Lorsqu'un sujet reconnaît ou identifie des objets d'une façon immédiate, au premier coup d'oeil, sans même avoir le temps de le remarquer, le fonctionnement sous-jacent de l'architecture fonctionnelle qui est mobilisée lui est invisible. Il s'agit là d'une **appréhension immédiate**. Transparence des actes accomplis et appréhension immédiate sont étroitement liées. Et cela se traduit pour le sujet, par un coût nul à la fois en temps et en démarches à accomplir.

Mais tout n'est jamais immédiatement accessible à la conscience, quelle que soit l'ampleur des traitements infra-conscients sur laquelle elle s'appuie pour s'ouvrir un monde d'objets immédiatement accessibles. Toute conscience émerge dans un horizon d'objets non immédiatement accessibles, mais qui peuvent cependant être atteint par une **succession d'appréhensions immédiates**. Et c'est par rapport à cette succession que s'imposent le sentiment d'un coût et la nécessité d'un contrôle. Le coût d'une succession augmente non seulement en fonction de la longueur des traitements à effectuer consciemment mais également de la complexité de leur planification pour pouvoir les effectuer dans une ordre efficace. Un contrôle conscient ne peut jamais porter sur une appréhension immédiate, mais sur une succession d'appréhensions immédiates. Et un tel contrôle ne peut se faire qu'en fonction de l'orientation téléologique de la conscience.

Ce point de vue phénoménologique est radicalement différent et du point de scientifique et du point de vue cognitif. Cette différence peut être aisément vérifiée sur la notion même de sujet et sur la nature des relations comme des critères d'explication.

D'un point de vue phénoménologique le sujet est une réalité simple et homogène, un «centre de fonctionnement» inanalysable. D'un point de vue cognitif, le sujet est au contraire une «architecture fonctionnelle» c'est-à-dire un ensemble de systèmes hétérogènes dont la coordination résulte d'un long apprentissage, demeure flexible et passible de défaillances. Nous verrons que l'un des problèmes est celui des rapports et des interactions éventuelles entre le point de vue phénoménologique sur la connaissance avec d'une part le point de vue cognitif et, d'autre part, le point de vue scientifique.

Une analyse phénoménologique se différencie d'une analyse strictement cognitive en ce qu'elle est fondamentalement de type sémantique et non pas de type causal (Fig. 2, ligne 5):. les relations acte→ objet y sont interprétées en termes de référence, et non pas en termes de facteurs dont la présence ou l'absence joueraient sur l'occurrence d'un phénomène. Cette analyse sémantique s'effectue selon la méthode de variation telle qu'elle a été dégagée à la suite de Bolzano et de Frege (*supra* (I)). Précisons qu'une telle analyse phénoménologique n'a rien de commun avec une pratique introspective ou avec le *talking aloud* des intentions, des idées ou des images qui «viennent à l'esprit» quand on exécute une tâche.

II. Les oppositions entre ces trois points de vue possibles

L'opposition entre un point de vue épistémologique et un point de vue psychologique dans l'analyse de l'acquisition des connaissances repose en fait sur l' assimilation implicite de deux points entre eux. Sous le terme de «psychologie» on regroupe souvent les points de vue cognitif et phénoménologique. Et une analyse épistémologique est inévitablement portée à mêler les points de vue scientifique et phénoménologique. Car l'analyse des émergences historiques et des progrès des connaissances scientifiques conduit à réintroduire nécessairement la référence à un sujet ou à des sujets, ne serait-ce que par la mise en perspective d'étapes dans la genèse d'une découverte ou par le biais de sa recontextualisation dans les problématiques culturelles ou sociales d'une époque!

Or, entre le point de vue scientifique et le point de vue phénoménologique, comme entre ce point de vue et le point de vue cognitif, il y a des écarts, des contrastes et des oppositions qui excluent toutes les assimilations qui sont faites dans beaucoup de modèles d'acquisition des connaissances comme dans leur utilisation didactique ou pédagogique.

Les points les plus délicats dans l'analyse de la connaissance ne concernent pas les critères pertinents pour «évaluer» une connaissance (ligne 4 de la figure), c'est-à-dire pour estimer son intérêt scientifique ou son intérêt pour le sujet, sa vérité ou son coût... Ils concernent **les conditions d'accessibilité des objets** (Fig. 2, ligne 2) **et la manière de distinguer des niveaux d'accessibilité des objets** (Fig. 2, ligne 3). En effet, les critères pour «évaluer» une connaissance, pour chacun des trois points de vue, sont trop hétérogènes pour qu'on soit tenté de les confondre ou de les opposer. En revanche, il n'en est plus de même pour les conditions et les niveaux d'accessibilité des objets. Il y a ainsi une tendance naturelle à assimiler les points de vue scientifique et phénoménologique pour ce qui concerne les conditions et les niveaux d'accessibilité des objets. Cette tendance se traduit par l'importance donnée à une compréhension conceptuelle que l'on voudrait indépendante de tout langage, par la valeur d'intuition et de simplicité donnée à l'acte de «voir» en opposition au raisonnement, ou encore par le privilège donnée à la «certitude», c'est-à-dire à une «intime conviction» pour reprendre une expression du code de procédure pénale rappelée aux jurés avant qu'ils ne délibèrent ... Contre cette tendance assimilatrice, une séparation rigoureuse de ces trois points de vue conduit à dégager trois oppositions majeures.

a. Le contraste entre la transparence de la conscience aux opérations qu'elle accomplit dans toutes ses appréhensions immédiates et la nécessité d'une médiation externe pour la connaissance scientifique (fig.2 ligne2)

Cette opposition porte sur les conditions d'accessibilité aux objets considérée d'un point de vue phénoménologique et d'un strict point de vue scientifique.

D'un point de vue scientifique, il n'y a pas d'accès aux objets sans la médiation externe d'instruments permettant d'effectuer des mesures et d'élargir le champ de qui est sensoriellement accessible, et sans la médiation externe d'un système sémiotique, ne serait-ce que pour coder, classer les données recueillies. En mathématiques la médiation externe d'un système sémiotique est fondamentale, puisque les objets mathématiques ne sont pas accessibles sensoriellement. Cette médiation externe des systèmes sémiotiques présente deux particularités fondamentales. D'une part elle ne commence pas avec le langage oral, ou plus

exactement avec la pratique orale prégraphique du langage, mais avec l'appropriation d'un système d'écriture, c'est-à-dire avec une pratique écrite soit du langage soit d'un autre système sémiotique. Pour appuyer ces remarques, rappelons les analyses de Husserl dès 1891 dans son ouvrage *La philosophie de l'arithmétique* :

> **La différence entre les signes oraux et les signes écrits est si essentielle pour l'arithmétique** que le fait d'être borné aux premiers aurait rendu impossible tout développement plus poussé de l'arithmétique
> Husserl 1972 p. 300[1]

D'autre part, à la différence de la médiation externe des instruments, **la médiation sémiotique est «intériorisable»** c'est-à-dire elle peut se transformer, pour une grande part, en des traitements infra-conscients et donc devenir phénoménologiquement transparente.

D'un point de vue phénoménologique, au contraire, la conscience actuelle se définit par un vécu d'accès immédiat aux objets, sans rien d' intermédiaire. Ces objets immédiatement accessibles à la conscience actuelle d'un sujet constituent comme un noyau de connaissance qui se donne comme première, évidente, certaine... **C'est cette transparence qui semble rendre inutile ou secondaire la nécessité des signes**, lesquels semblent alors ne pouvoir donner lieu qu'à une connaissance «aveugle» selon la métaphore de Leibniz.

Cette opposition entre le point de vue scientifique et le point de vue phénoménologique sur les conditions d'accessibilité aux objets est à la fois irréductible et relative. Elle est irréductible, en ce sens que cette opposition subsiste quelque soit le degré de formation ou de développement d'un individu. Et c'est sur l'évidence introspective de ce noyau de connaissance immédiate que l'on s'appuie pour postuler une pensée conceptuelle sans langage et pour réduire l'utilisation du langage à une fonction de communication. Mais elle est également relative, en ce sens que le contenu de ce noyau de connaissance dépend de l'ampleur des traitements devenus infra-conscients, et tout particulièrement de ceux intrinsèquement liés à l'utilisation de registres de représentation sémiotique. Ce qui est immédiatement accessible à la conscience d'un sujet va donc considérablement varier selon que le sujet est un débutant ou un expert, un enfant ou un adulte. En d'autres termes, *les seuls objets qui peuvent être identifiés au premier coup d'oeil par un sujet sont ceux dont les opérations et les représentations sémiotiques permettant de les discriminer sont devenues transparentes par «automatisation» au plan infra-conscient.* C'est ce rapport entre le contenu du noyau de connaissance immédiate et la base des traitements inconscients, que la psychologie cognitive a exploré ces dernières décades. Ce rapport est essentiel pour bien poser le problème des processus d'acquisition des connaissances dans le cadre d'une formation initiale.

b L'impossibilité d'une correspondance entre les démarches scientifiques et le vécu de l'activité consciente des sujets (fig. 2 ligne 3)

Cette opposition porte la manière de distinguer des niveaux d'accessibilité. Pour s'en tenir à une première distinction, il y a les objets qui apparaissent immédiatement accessibles ou originaires et il y a ceux qui ne le deviennent qu'au terme de démarches plus ou moins longues et complexes qui doivent donc être méthodiquement contrôlées et organisées. La célèbre distinction des *Regulae* (1628) entre intuition et déduction (règle III), juste avant la définition de la méthode (règle IV et V) est avancée comme un critère pour distinguer deux niveaux

---

[1] Pour un présentation de ces analyses voir Duval 1976.

d'accessibilité des objets

> Pour ne pas tomber à notre tour dans la même erreur, nous allons maintenant passer en revue tous les actes de notre entendement, par lesquels nous pouvons parvenir à la connaissance des choses sans aucune crainte d'erreur: l'on en admet que deux, l'intuition et la déduction
>
> Descartes 1963, p.87

Mais entre ce qui apparaît originaire et évident d'un strict point de vue phénoménologique et ce qui est pris comme premier d'un strict point de scientifique, **il y a un écart qui historiquement n'a cessé de grandir en raison même de la complexité croissante de la médiation externe**, aussi bien instrumentale que sémiotique! Deux raisons vont nous aider à comprendre cet écart grandissant. La première tient aux critères de hiérarchisation de niveaux d'objets et la seconde aux mécanismes mêmes par lesquels cette hiérarchisation peut-être modifiée.

1. D'un point de vue phénoménologique la différence fondamentale pour distinguer les niveaux d'accessibilité des objets est celle entre appréhension immédiate et appréhension successive, c'est-à-dire la nécessité d'une suite d'appréhension immédiates. Les critères de distinction de niveaux vont donc dépendre alors de la longueur de ces suites et du degré de complexité de leur organisation, cette complexité jouant alors sur l'accessibilité de la planification de la démarche à mettre en oeuvre.

D'un point de vue strictement scientifique, les critères de distinction se révèlent plus complexes. Tout d'abord, il est important de bien distinguer deux paradigmes de la science, l'un constitué par l'idéal mathématique de la démonstration et l'autre par la mise en oeuvre d'une méthode expérimentale[1]. Ce qui est pris, ou ce qui est donné, comme premier, comme point de départ, va changer selon le paradigme choisi. Mais quelque soit le paradigme choisi, **ce qui est posé comme premier ne peut être que postérieur, et non pas antérieur, à une médiation externe, instrumentale ou sémiotique.** Et c'est à partir de ce qui est posé comme premier que peuvent se développer des démarches complexes régulées par les méthodes de classement, de traitement, et d'interprétation qui sont propres à chaque discipline.

Naturellement ce qui est ainsi posé comme premier ou comme donné au départ n'est jamais complètement définitif. Et cela en raison du développement technologique et sémiotique de la médiation externe qui résulte des résultats obtenus dans les étapes antérieures de la recherche. Ce développement impose des réorganisations successives des connaissances acquises, en fonction de nouvelles découvertes ou en fonction de décisions théoriques. De cette manière, il se produit toujours une certaine interaction entre ce qui est pris comme point de départ et ce qui peut être acquis au terme des démarches scientifiques. La hiérarchisation scientifique de niveaux d'objets n'est donc jamais établie une fois pour toute. Elle peut être modifiée, et c'est sur les possibilités de cette modification que se fonde la possibilité d'un accroissement des connaissances tant au plan individuel, et donc phénoménologique, qu'au plan scientifique d'un état de connaissances acquises.

---

[1] L'émergence explicite de ces paradigmes comme paradigmes de la science peut être située respectivement avec la publication simultanée du *Discours de la Méthode* et de la *Géométrie* par Descartes en 1637, et avec l'*Introduction à l'étude la médecine expérimentale* de Claude Bernard en 1853. Cependant, indépendamment de l'émergence de ces paradigmes explicites de la science, on ne saurait oublier que les «sciences» dites expérimentales se distinguent des sciences mathématiques par deux caractéristiques majeures : le rôle fondamental donné à la médiation externe instrumentale (pour les mesures et pour l'extension du champ sensoriellement accessible) et le statut primordial des données recueillies.

2. D'un point de vue phénoménologique le domaine des objets relevant d'une appréhension immédiate peut être élargi ou enrichi. De nouveaux objets antérieurement inaccessibles deviennent directement accessibles sans que ceux qui l'étaient déjà, tels les objets de perception, perdent leur caractère de primitivité. Tout se passe alors comme s'il y avait une compactification en un seul acte conscient de multiples appréhensions successives. N'est-ce pas ce que vise Descartes dans la Règle VII lorsqu'il évoque la récapitulation rétrospective des termes de manière à «diminuer le rôle de la mémoire» et à «accroître dans une certaine mesure la capacité de l'esprit» ?

> passer si rapidement de la première proportion à la dernière que je ne laisse presque plus aucun rôle à la mémoire et qu'il me semble avoir une intuition simultanée du tout; de cette manière, en effet, tout en aidant la mémoire, on remédie ainsi à la lenteur de l'esprit et l'on accroît d'une certaine manière sa capacité
>
> Descartes 1963, p. 109

Mais, comme nous le verrons plus loin **cet enrichissement du domaine des objets relevant de l'appréhension immédiate suppose des processus «d'automatisation»**, c'est-à-dire la transformation de démarches effectuées consciemment, et donc prenant du temps et de l'attention, en traitements infra-conscients.

D'un point de vue scientifique ce qui est considéré comme premier ou comme donné dépend des techniques instrumentales utilisées pour recueillir les observations ou de choix théoriques. En ce sens les modifications résultant d'innovations ou de révolutions techniques, ou encore de réorganisations théoriques complètes peuvent constituer de véritables ruptures avec ce qui était considéré antérieurement comme premier. Et c'est sur cette base que l'utilisation de méthodes et de procédures de preuves permet d'accéder à de nouveaux objets. Comme on le voit **la détermination et la modification des niveaux d'objets en terme d'accessibilité se fait, du point de vue scientifique, par une construction théorique.** Le constructivisme se fonde sur l'extrapolation de ce processus du progrès des connaissances scientifiques en lois d'apprentissage et en règles d'une réinvention nécessaire au plan du vécu de la conscience de chaque sujet. Le constructivisme reprend comme un défi didactique la nostalgie husserlienne d'un apprentissage qui, pour la géométrie, coïnciderait avec l'accès de chacun, lecteur ou élève, aux «évidences originaires» :

> La déduction suit dans son progrès l'évidence logique-formelle; mais sans le pouvoir effectivement exercé des activités originaires enfermées dans les concepts fondateurs, donc aussi sans le Quoi et le comment de leurs matériaux pré-scientifiques, la géométrie serait une tradition devenue vide de sens... Mais c'est, hélas, notre situation et celle de tous les temps modernes
>
> Husserl (1936) 1962, p. 195

Il ne peut donc pas y avoir de correspondance entre l'accessibilité des objets d'un point de vue phénoménologique et la manière dont elle se détermine d'un point de vue scientifique. Et il n'y a pas davantage de similitudes dans la manière dont se développe l'accessibilité aux objets scientifiquement et phénoménologiquement. Postuler cette correspondance comme, par exemple, dans l'usage de la distinction entre intuition et raisonnement ne peut être que fallacieux et réducteur quant à la complexité de cette activité qu'est la connaissance.

***c. Les conditions différentes de fonctionnement des représentations sémiotiques du point de vue scientifique et du point de vue cognitif** (fig. 2 ligne 2).*

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler ce que montre l'évolution des problématiques de l'analyse de la connaissance depuis Descartes (première partie de cette article) évolution qui évidemment reflète l'essor et les bouleversements successifs du développement des connaissances scientifiques depuis le début du XVIIème: il n'y a pas de connaissance sans activité de représentation et, surtout, il n'y a pas d'activité de représentation sans mobilisation de systèmes sémiotiques. La médiation externe sémiotique s'est imposée et développée au même titre que la médiation externe instrumentale. Et il est ainsi devenu difficile d'imaginer que l'acquisition des connaissances puisse faire l'économie de l'appropriation des systèmes sémiotiques dont le développement a étroitement accompagné le progrès des connaissances. Sans nier l'importance des systèmes sémiotiques, le véritable problème qu'ils soulèvent est donc celui de leur appropriation par des sujets en situation d'apprentissage : se fait-elle «naturellement», par imprégnation dans un bain de pratiques sémiotiques, à travers des activités de recherche ou d'exploration directement centrées sur les objets ou, au contraire, requiert-elle des activités spécifiques centrées sur la découverte du fonctionnement représentationnel propre à chaque registre ? Le problème réel de l'apprentissage ne se laisse peut-être pas enfermer dans une alternative aussi tranchée, mais il suppose que l'on ait pris conscience que les conditions de «productivité» d'un système sémiotique ne sont pas les mêmes selon que l'on se place du point de vue scientifique ou du point de vue cognitif.

Du point de vue scientifique, on insiste inconditionnellement sur la nécessité de ne pas confondre un objet et sa représentation même si ce sont des représentations que l'on présente explicitement et même si les représentations présentées peuvent à leur tour être traitées comme des objets ! Mais en même temps on développe les «langages scientifiques» c'est-à-dire les moyens d'une médiation sémiotique externe. Et cela non à des fins de communication mais à des fins de traitement, que les traitements consistent dans des opérations de classification ou dans des opérations de calcul. Cela veut dire que les systèmes sémiotiques sont toujours organisés en fonction des types de traitement que l'on veut pouvoir développer. D'où leur caractère monofonctionnel ou spécialisé dont va dépendre leur puissance et leur productivité (Duval 1996, p. 373). Les exigences auxquels ils doivent répondre ne sont pas seulement des exigences d'économie mais également des exigences d'exhaustivité. D'une certaine façon un système sémiotique doit permettre à une démarche d'être systématique. C'est ainsi que Descartes justifiait la méthode de représentation qui permet de convertir des formes géométriques en des expressions symboliques et de résoudre ainsi «tous les problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites». Il explique à propos des procédures utilisées par ses prédécesseurs pour résoudre ces problèmes :

> .... ce que je ne crois pas que les anciens aient remarqué. Car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire autant de gros livres, où le seul ordre de leur propositions nous fait connaître qu'ils n'ont point eu la vraie méthode **pour les trouver toutes**, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontré
>
> Descartes 1954, p.304

D'un point de vue cognitif, le problème est plus complexe car il y a d'une part cette dualité primitive representationnelle que l'on désigne par l'opposition entre langage et image. Cette dualité primitive se manifeste à travers deux registres de représentation sémiotique qui sont fonctionnellement polyvalents, celui de la langue naturelle parlée et celui permettant la représentation graphique des formes («figures», silhouettes...) 2D, 3D/2D. Mais l'acquisition des connaissances d'une part impose le développement d'une spécialisation fonctionnelle de

ces deux registres (Duval 1995, p.174) et, d'autre part, l'appropriation de registres de représentation monofonctionnels. Autrement dit, **c'est une donnée fondamentale de l'activité humaine de connaissance que de fonctionner selon plusieurs registres de représentation sémiotique.** Mais pour que chacun des registres puisse être cognitivement «productif», c'est-à-dire pour qu'il permette au sujet de développer l'activité de connaissance ou de compréhension qu'il rend objectivement possible, il faut qu'il soit coordonné avec au moins un autre registre. **La coordination des registres est la condition de leur mobilisation effective par les sujets à des fins d'exploration, de traitement ou de contrôle**[1]. Si d'un point de vue scientifique, il est essentiel d'avoir des expressions ou des représentations «bien formées», c'est-à-dire respectant les règles permettant aux productions sémiotiques d'avoir un «sens», il est non moins essentiel, d'un point de vue cognitif, que le sujet puisse les convertir en des expressions ou des représentations d'un autre système en conservant la référence aux mêmes objets.

D'un point de vue phénoménologique, il faut se rappeler qu'il n'y a pas de représentation mais seulement des objets qui apparaissent. Cette formulation, simple paraphrase de la définition de la nature intentionnelle de la conscience, peut apparaître pour le moins abrupte dans la mesure où elle semble effacer toute séparation entre les choses et leurs images (tableaux, photos...) ou entre les mots et les choses. Et, surtout, elle semble évacuer la question cruciale pour toute phénoménologie : qu'est-ce qui conduit à reconnaître les signes, mots ou symboles, comme des signes, c'est-à-dire comme des marques faites pour signifier et non pas comme des empreintes de choses ? Ou encore, comment la discrimination des signes et de leurs organisations peut-elle surgir de l'identification perceptive de formes parmi d'autres formes non nécessairement «signifiantes» ? Plus largement, la reconnaissance d'une «intention de signification» suffit-elle à comprendre ce que représente une représentation ? Ces questions nous renvoient, en réalité, au caractère irréductiblement ambivalent des représentations sémiotiques pour la conscience, que ce soit les représentations qu'un sujet produit de lui-même pour lui-même ou que ce soit celles que les autres sujets lui communiquent.

Cette ambivalence des représentations sémiotiques tient au fait que, toute représentation peut, phénoménologiquement, être traitée

— soit comme un objet et réduite à sa forme perceptible signifiante, obéissant ou non à des règles d'emploi ou, au contraire,

— soit comme signification et, dans ce cas, les mots, les expressions deviennent immédiatement transparents à la «chose visée» dans la signification.

Il est intéressant de rappeler ici que les premières analyses des *Recherches Logiques* de Husserl portent sur cette ambivalence phénoménologique des signes (Husserl R.L. I. 1969, p. 46-47, 78-79, 86-87). Or c'est **cette ambivalence phénoménologique des signes qui permet, au choix,** soit de les oublier jusqu'à pouvoir nier leur rôle soit, au contraire, d'en faire des objets en soi de traitement et d'interprétation. Et c'est généralement à cette ambivalence phénoménologique des signes que l'on s'en tient dans la réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Et cela, le plus souvent, dans le seul but de relativiser, ou même de nier l'importance des représentations sémiotiques, dans l'activité de connaissance tant d'un point de vue scientifique que cognitif. Mais les paradoxes et les difficultés d'une telle position apparaissent avec tous les problèmes rencontrés ne serait-ce que pour l'enseignement de l'algèbre !

---

[1] Nous ne prenons ici en compte que la coordination des registres sémiotiques. Mais il est important de rappeler qu'il y a une coordination préalable des registres sémiotique avec des systèmes effecteurs comme la voix ou la main. La prise en compte de ces coordination est essentielle si l'on veut étudier les phénomènes d'expression orale ou écrite.

III. Conséquences pour un modèle d'acquisition des connaissances à l'échelle temporelle de la scolarité obligatoire

Il faut pouvoir prendre en compte de façon cohérente ces trois points de vue pour comprendre comment des individus en formation initiale peuvent accéder au niveau de connaissances considéré comme l'acquis culturel d'une discipline, par exemple en mathématiques. Comment une telle prise en compte peut-elle se faire ? Nous l'avons partiellement représenté par un réseau de liaisons orientées sur la figure (Fig. 2) Le point de départ pour comprendre les mécanismes d'acquisition des connaissances est évidemment l'appréhension immédiate. Car celle-ci correspond au domaine des objets qui sont accessibles à la conscience du sujet apprenant sans médiation externe et sans coût temporel, c'est-à-dire au domaine de ce qu'un sujet est en mesure de discriminer sans avoir besoin de mettre en oeuvre quelque chose (un instrument, l'algorithme d'une opération, un schéma...) ou de reconnaître avant toute activité exigeant un peu de temps ou un «effort» d'attention. **Tout le problème de l'acquisition des connaissances est de comprendre par quelles transformations des objets inaccessibles à un sujet peuvent non seulement lui devenir accessibles** (comme nous le formulions dans l'introduction) **mais devenir objets de son appréhension immédiate.** Ce sont les données de ce problème que nous allons maintenant examiner sous leur forme générale.

Pour cela nous allons tout d'abord examiner le rôle central et régulateur de l'appréhension immédiate dans le déroulement de toute activité de connaissance. Et nous pourrons alors voir pourquoi l'ouverture de cette appréhension immédiate à des objets de connaissance scientifique, et plus particulièrement de nature mathématique, ne suit ni une voie parallèle au cheminement historique des découvertes ni aux étapes d'une stricte construction scientifique, mais implique un détour cognitif. Et ce détour se révèle d'autant plus important que les connaissances à acquérir sont éloignées de l'appréhension immédiate du sujet apprenant. Nous illustrons ces points par l'analyse d'un acte «cognitif» souvent considéré comme un acte simple et riche, du moins en mathématiques, «voir».

a. Le rôle central de l'appréhension immédiate et le niveau cognitif des objets «phénoménologiquement» accessibles à un sujet

La notion d'objet est d'abord une notion phénoménologique: c'est le ***«ce sur quoi»*** porte l'orientation intentionnelle de la conscience à un instant donné. L'objet en tant que «ce sur quoi» est corrélatif d'un acte qui le discrimine de tout ce qui apparaît, simultanément et à son voisinage, et qui l'identifie comme étant tel ou tel (qualité, substance, forme, occurrence, etc.). Or cet acte, phénoménologiquement simple, est cognitivement complexe. Il est simple dans la mesure où il y a transparence des opérations cognitives effectuées au niveau infra-conscient : c'est immédiatement et directement que le sujet remarque telle ou telle chose. Il est cognitivement complexe dans la mesure où son accomplissement relève de l'ensemble des opérations effectuées au niveau infra-conscient. La notion phénoménologique d'objet étant ainsi précisée, nous pouvons maintenant analyser le champ, le contenu possible ainsi que les fonctions de l'appréhension immédiate d'un sujet. Trois données fondamentales doivent être retenues :

1. **Il y a une limitation attentionnelle du champ de l'appréhension immédiate,** tous les objets directement accessibles à la conscience d'un sujet ne pouvant pas l'être en même temps. D'où la nécessité d'une succession d'appréhensions immédiates dont l'horizon est

mémoriellement limité. Cette donnée est à la base des nombreuses recherches de psychologie cognitive, centrées sur le traitement de l'information, depuis les travaux de Broadbent (1958).

2. **Il y a une variation considérable du contenu de l'appréhension immédiate** par rapport au niveau des objets de connaissance scientifique. Il suffit de comparer les objets immédiatement accessibles à la conscience d'un novice (un étudiant qui, après le lycée ou la licence, éprouve encore des difficultés devant des problèmes additifs) et à celle d'un expert, (un mathématicien). C'est cet écart, non strictement génétique ou développemental, qui doit être analysé si l'on veut comprendre les processus d'acquisition de connaissances en formation initiale.

3. **L'appréhension immédiate remplit deux fonctions importantes** pour qu'un sujet puisse avoir l'initiative et le contrôle d'une activité de connaissance scientifique : le contrôle référentiel et la planification des démarches à effectuer.

Toute activité de connaissance scientifique implique un contrôle de l'activité à chacun des différents moments de son déroulement. D'un point de vue phénoménologique, la possibilité d'un contrôle requiert que le sujet ait un accès direct aux objets sur lesquels va porter son activité de connaissance qu'elle doit mobiliser à titre d'«objet». Ce contrôle, que nous appellerons référentiel, ne doit pas être confondu avec le contrôle de validité nécessaire d'un point de vue scientifique. En effet, c'est ce contrôle référentiel qui permet au sujet de «s'ancrer» dans le domaine des objets qui lui sont immédiatement disponibles, et cela sans aucune médiation externe et sans avoir à effectuer des vérifications demandant ne serait-ce qu'un minime laps de temps : la perception, par exemple, est une appréhension immédiate qui permet un contrôle référentiel et non pas un contrôle de validité.

Il ne peut pas y avoir de connaissance scientifique sans la mise en oeuvre de démarches méthodologiquement organisées. D'un strict point de vue phénoménologique cela veut dire que la connaissance s'élabore à travers une appréhension successive. Or de ce point de vue, l'appréhension successive peut être «libre» ou, au contraire, téléologiquement polarisée. Elle est «libre» lorsqu'elle procède de proche en proche comme dans les activités de tâtonnement ou d'exploration spontanée. Elle est téléologiquement polarisée lorsqu'elle suit une planification de la démarche à effectuer, cette démarche étant déterminée par les objets sur lesquels l'attention devra successivement se fixer, soit à titre de cible soit à titre d'outils[1] à mettre en oeuvre, et par les choix à effectuer lors du déroulement de la démarche. Il ne s'agit donc pas simplement d'une simple anticipation mais d'une véritable organisation anterospective de l'activité à accomplir. Il apparaît donc que la capacité d'un sujet à planifier une démarche va entièrement dépendre des objets auxquels il a accès par appréhension immédiate.
Ce sont ces deux fonctions qui montrent le rôle central de l'appréhension immédiate dans l'initiative et dans le contrôle qu'un sujet peut avoir sur une activité de connaissance. Et on voit alors qu'**une réelle acquisition de connaissance, pour un sujet, se joue sur l'élargissement ou sur la transformation du contenu possible de son appréhension immédiate.** Car c'est ce contenu qui conditionne le type de démarche qu'il peut être en mesure de comprendre et

[1] Pour pouvoir être intentionnellement effectuées, les différentes opérations constitutives d'une démarche doivent pouvoir apparaître à la conscience comme des objets. Autrement dit *quand le sujet accomplit un acte, il a un rapport d'«ustensilité» à l'acte qu'il accomplit ainsi qu'à ses phases* (Heidegger 1964, § 15, p.92-96). Ce n'est pas par hasard si la métaphore de l'«outil» s'est spontanément imposée pour parler de théorèmes ou de théories mathématiques : ils prennent la fonction d'objet intentionnellement utilisé ***à titre de moyen*** ou de procédures pour atteindre un but.

d'effectuer. On ne peut donc pas espérer que le fait de faire effectuer à un élève une démarche dont les objets d'ancrage ne lui seraient pas immédiatement accessibles puisse lui faire découvrir ces objets! Pour comprendre comment le domaine des objets immédiatement accessibles à un sujet peut être élargi ou transformé, il nous faut donc revenir à la complexité cognitive infra-consciente qui est sous-jacente à toute transparence phénoménologique.

b. Les trois conditions cognitives nécessaires pour un accès «phénoménologiquement» immédiat à des objets de connaissance scientifique

Si d'un point de vue phénoménologique la notion d'objet apparaît indépendante de toute opération ou de toute représentation, il n'en va plus de même d'un point de vue scientifique ou d'un point de vue cognitif. Quand on se place à l'un ou l'autre de ces deux points de vue, il ne peut y avoir d'objet que relativement à des opérations ou à des représentations : **un objet est toujours le terme de l'un des deux couples suivants :**

{opération, ...} ou {représentation, ...}.

La raison de cette liaison tant d'un point de vue scientifique que cognitif est relativement simple. D'un point de vue scientifique, **l'étude des objets est toujours subordonnée à la prise en compte des moyens d'accès aux objets, c'est-à-dire à la nature de la médiation externe qui peut être instrumentale ou seulement sémiotique.** Car ce sont les moyens d'accès aux objets qui déterminent ce qu'une démarche de connaissance scientifique peut avoir de spécifique (l'astronomie, la biologie et les mathématiques n'utilisent pas les mêmes moyens d'accès). Et c'est la manière dont ces moyens sont mis en oeuvre qui détermine la validité d'une connaissance. D'un point de vue cognitif, la relation à un objet va dépendre de l'«architecture fonctionnelle» des systèmes constituant les capacités du sujet: permet-elle le fonctionnement requis pour que le sujet ait cet accès immédiat aux objets d'ancrage pour une médiation externe et pour la planification d'une démarche ? Autrement dit, d'un point de vue scientifique comme d'un point de vue cognitif, la connaissance des objets est inséparable des opérations et des représentations qui permettent d'y avoir accès. Mais du point de vue cognitif, les opérations et les représentations doivent être analysées en fonction des systèmes sans lesquels elles ne pourraient ni être effectuées ni produites. C'est dans cette perspective que trois conditions cognitives apparaissent nécessaires pour qu'un sujet puisse avoir un accès direct aux objets requis pour entrer dans une activité de connaissance scientifique et plus particulièrement mathématique : l'automatisation de traitements, l'appropriation et la coordination de registres de représentation sémiotique, et une rupture par rapport à la procédure spontanée de discrimination et d'identification des objets.

1. L 'automatisation d'un traitement est la condition de la transparence phénoménologique dans l'accès immédiat aux objets. Elle est la condition nécessaire en raison même de la limitation attentionnelle du champ de l'appréhension immédiate que nous avons évoquée dans le paragraphe précédent. Cela constitue l'un des apports majeurs de la psychologie cognitive, au cours de ces trente dernières années, que d'avoir mis en évidence le caractère fondamental de cette condition cognitive. Par rapport à la question des apprentissages scolaires cet apport implique que l'on prenne en compte l'existence de **deux modes selon lesquels une opération ou un traitement peuvent être effectués par un sujet.**

— le mode «intentionnel» c'est-à-dire conscient : c'est celui qui est pris en compte dans l'organisation didactique de séquences d'activité, et c'est celui que nous avons envisagé dans l'analyse de la connaissance du point de vue phénoménologique.

— le mode «automatique». L'effectuation automatique d'un traitement ou d'une opération

est antérieure à toute initiative et à tout contrôle conscients: seul son résultat émerge à la conscience du sujet comme quelque chose d'immédiat. Tout ce qui s'impose au premier coup d'oeil résulte en fait de traitements infra-conscients. L'intérêt de l'automatisation d'un traitement n'est pas seulement de libérer l'activité consciente, il est aussi d'ouvrir l'accès à des objets complexes par la «compactification», en un seul acte de visée, d'un diversité de traitements qui ont du être appris ou acquis indépendamment les uns des autres en raison de leur hétérogénéité ou de leur nombre. La compactification infra-consciente est aussi essentielle que la compréhension.

2. L'appropriation des registres de représentation sémiotique et leur coordination (Duval 1995, 1996). Un point doit être souligné pour situer l'importance de la prise en compte des registres de représentation dans le cadre général d'une analyse de l'activité de connaissance : les registres de représentations sémiotiques apparaissent à la fois comme ***des systèmes constitutifs de «l'architecture fonctionnelle» requise*** pour qu'un sujet soit capable d'effectuer une démarche de connaissance scientifique et comme ***des moyens d'accès nécessaires aux objets mathématiques***. En ce sens ils jouent un rôle de médiation externe avec cette particularité, par rapport à la médiation instrumentale, de pouvoir et de devoir être en partie «intériorisés» par le sujet. C'est pour cela que l'on retrouve les registres de représentation sémiotique à la fois dans une approche cognitive et dans une approche scientifique de la connaissance.

La grande majorité des travaux en psychologie cognitive étudie la connaissance en tant que processus de traitement des informations reçues par une organisation fonctionnelle de systèmes et production de réponses appropriées. **Les systèmes pris en compte sont des systèmes dont les modes de fonctionnement sont déterminés par des substrats organiques et dont les fonctions sont communes à toutes les types d'activité de connaissance : perception** (capter les données), **mémoire** (organiser et conserver les données façon à ce qu'elles demeurent constamment accessibles pour un traitement), **attention** (orienter l'activité par rapport à un but fixé ou par rapport à l'occurrence d'un perturbation)... Les systèmes dont les modes de fonctionnement sont purement sémiotiques ne sont pas réellement pris en compte ou, s'ils le sont, c'est uniquement par rapport à leur «implémentation» dans ces systèmes dont le mode de fonctionnement est organique. Les recherches sur la mémoire sémantique et la compréhension du langage naturel depuis 1972 sont à cet égard révélateurs de cette problématique.

Si l'on veut étudier l'acquisition des connaissances scientifiques ou mathématiques, l'appropriation des registres de représentation sémiotique par chaque individu comme leur coordination progressive sont aussi fondamentales que les systèmes à substrat organique. Car si la possibilité d'une dualité représentationnelle langage /image, c'est-à-dire d'un fonctionnement représentationnel en modalité discursive ou en modalité synoptique, est comme prédéterminée dans l'organisation du cerveau humain, cette potentialité ne peut être actualisée que dans la formation culturelle de langues naturelles et de codes analogiques. Mais cela n'a pas été suffisant. Le développement des connaissances et, en particulier celui des connaissances mathématiques, a impliqué la différenciation de ces premiers registres de représentation sémiotique en plusieurs autres registres, chacun se trouvant spécialisé pour un type d'appréhension et pour un type de traitement. Que l'on pense aux système d'écriture décimale, à l'écriture littérale ou algébrique, aux langues formelles, aux représentations graphiques, aux matrices... Bien que transmis par l'environnement ces registres de représentation sémiotique font partie de l'«architecture fonctionnelle cognitive» maintenant requise pour une activité mathématique ou pour l'acquisition de connaissances mathématiques. D'ailleurs la plupart sont devenus des *instrument culturels généraux de connaissance* et l'appropriation de leur mode de fonctionnement fait maintenant partie d'une alphabétisation

nécessaire. Il suffit de feuilleter n'importe quel journal, n'importe quel magazine ou même n'importe quel manuel scolaire dans d'autres champs disciplinaires que les mathématiques.

3. Une rupture par rapport à la procédure spontanée de discrimination et d'identification des objets. Il y a ce que l'on pourrait appeler le niveau zéro d'accessibilité des objets. Il concerne l'appréhension perceptive des objets (choses, changements, signaux...) «peuplant« l'environnement du sujet. Ce qui caractérise cette modalité d'appréhension immédiate est que l'identification des objets s'y effectue **en fonction d'une seule propriété, celle qui suscite le grand effet de contraste** par rapport à d'autres objets ou d'autres catégories d'objets, et pas seulement celle qui est la plus fréquente. A ce niveau une propriété peut ne correspondre pour un sujet qu'à une valeur de contraste ou à une valeur d'opposition, pourvu qu'il ait acquis, par l'observation de variations, la capacité de la discriminer.

Mais d'un point de vue scientifique, cette procédure spontanée d'identification n'est ni suffisante ni pertinente. Un objet ne peut être identifié que par **le «croisement» de plusieurs propriétés**, chacune n'étant plus seulement discriminée par une **valeur contrastive, mais également par une valeur extensive** laquelle est déterminée par l'application potentielle d'un critère de partage dichotomique (c'est «*p* ou non *p*»). Cependant, le saut cognitif le plus important pour passer d'une procédure spontanée à une procédure scientifique d'identification concerne moins la correction de la valeur contrastive par la valeur extensive que la prise en compte du croisement de plusieurs propriétés. On peut facilement montrer, par exemple, que la difficulté de compréhension des énoncés de problèmes en mathématiques, y compris les énoncés de problèmes additifs, tient à ce saut. Pour une compréhension ordinaire de la situation extramathématique décrite dans l'énoncé, la procédure spontanée en fonction d'une seule propriété est suffisante. Pour voir le traitement mathématique instancié par des valeurs numériques et dont la description est donnée comme «en surimpression» à celle de la situation extramathématique («sélectionner les informations pertinentes»), il faut la procédure scientifique d'identification. C'est pour cela que n'importe quelle représentation de type schéma, image ou autre ne peut pas être pertinente et efficace (Duval 1998).

D'un point de vue phénoménologique, l'identification d'un objet est neutre : elle peut aussi bien résulter d'une procédure spontanée que d'une procédure scientifique. Car tout objet est simplement le «ce sur quoi...» se dirige actuellement la conscience. La possibilité pour un sujet de l'identification scientifique d'un objet, en appréhension immédiate, dépend de la compactification, infra-consciente, des multiples traitements requis par le croisement des propriétés. Nous retrouvons ici les processus évoqués plus haut à propos de l'automatisation.

c Un thème épistémologique impliquant la fusion des points de vue scientifique et phénoménologique: l'intuition

La notion d'intuition a été une notion philosophique clé dans l'analyse de la connaissance comme science. Et c'est une notion également surdéterminée dans la mesure où non seulement elle a d'abord été définie par opposition au raisonnement, avec Descartes, puis par opposition à toute forme de représentation, avec Husserl, mais où, en analogie avec l'acte de «voir», on lui a attribué un rôle fondamental dans les processus d'invention en mathématiques.

Qui dit «intuition», dans l'héritage des deux approches philosophiques de Descartes et de Husserl, dit **une appréhension complète des objets, tels qu'ils sont en eux-mêmes, en un seul acte vécu comme simple par la conscience du sujet**. La simplicité de l'acte exclut le laps temporel et la multiplicité des opérations qui sont inhérentes à toute discursivité. L'accès

aux objets tels qu'il sont en eux-mêmes exclut le recours nécessaire à des représentations sémiotiques ou non. Et la complétude de l'appréhension ne justifie pas seulement la simplicité de l'acte mais elle lui donne sa puissance heuristique, sa fécondité. Une telle intuition existe-t-elle ou serait-elle impossible à l'esprit humain comme Kant l'expliquait dans sa célèbre Lettre à Marcus Herz ? Il ne s'agit pas ici de rouvrir un débat qui, à bien des égard, apparaît daté, mais d'interroger, à travers cette question, ce recours à l'intuition, au «voir» que beaucoup de mathématiciens considèrent comme une caractéristique de l'activité mathématique. Ainsi R. Thom, se référant non plus à Descartes mais à Platon (1972) n'hésitait-il pas à écrire dans un célèbre article contre les «mathématiques modernes» :

> ...toute démonstration est avant tout la révélation d'une nouvelle structure, dont les éléments gisaient séparés dans l'intuition, et dont le raisonnement reconstruit la genèse progressive. En ce sens, toute démonstration est une «maïeutique» : il s'agit de recréer chez le lecteur les processus psychologiques propres à la manifestation de la vérité implicite, dont il détenait toutes les données mais qui restait voilé dans l'informulé.... c'est dans l'intuition que réside l'*ultima ratio* de notre foi en la vérité d'un théorème — un théorème étant avant tout, selon une étymologie aujourd'hui bien oubliée, l'objet d'une vision.
>
> R. Thom 1972, p. 230

On voit donc l'enjeu réel de la question concernant l'«intuition» et tout recours à l'acte de voir : il s'agit de savoir comment faire acquérir cette intuition à tous les élèves en formation initiale. Car, en admettant qu'une telle intuition existe —et nous n'oserons pas mettre en doute les témoignages d'éminents mathématiciens — est-elle un acte mental simple, spécifique, et alors toute analyse cognitive de l'activité mathématique serait vaine? Ou, au contraire, émerge-telle comme le résultat d'un travail de compactification infra-consciente et de coordination de registres de représentation, travail qui se ferait d'un façon plus ou moins rapide selon les individus et selon les conditions d'apprentissage ? Une chose est sure en tous cas la notion d'«intuition» est une notion essentiellement phénoménologique. Et l'on peut se demander si elle est pertinente pour une analyse de la connaissance scientifique, menée dans avec le souci d'en faire faire des apprentissages.

C'est dans les *Regulae ad directionem ingenii* (règles III et XI) que Descartes a défini l'intuition par opposition à la «déduction» et plus généralement à toute forme de discursivité :

> ... nous allons maintenant passer en revue tous les actes de notre entendement, par lesquels nous pouvons parvenir à la connaissance des choses sans aucune crainte d'erreur: l'on en admet que deux, l'intuition et la déduction...
> ... Nous distinguons donc ici l'intuition intellectuelle et la déduction certaine, en ce que l'on conçoit dans l'une une sorte de mouvement ou de succession , et non pas sans l'autre; et, parce qu'en outre, pour la déduction, il n'est pas besoin comme pour l'intuition d'une évidence actuelle, mais que c'est à la mémoire qu'elle emprunte, d'une certaine manière, sa certitude..
>
> Des cartes Règle III p. 87, 89

> Nous réclamons deux éléments pour parler d'intuition intellectuelle ; d'abord, que la proposition soit comprise clairement et distinctement; ensuite qu'elle soit comprise tout entière en seul moment et non pas successivement.
>
> Descartes Règle XI p. 131

Rappelons que pour Descartes cet acte d'intuition peut être obtenu par un entraînement qui conduit à simultanéiser ce qui relève d'abord d'une appréhension successive et, ainsi, à

éliminer la mémoire ou, plus exactement, le maintien en mémoire de travail de tout ce qui a été pensé antérieurement (Descartes p. 133).

C'est dans la VI[e] des *Recherches Logiques* (1901) que Husserl a systématiquement opposé intuition et représentation en tant qu'expression mobilisant des signes. Mais pour bien comprendre la portée de sa problématique, il faut revenir à ce qu'il écrivait en 1890 sur «la logique des signes», c'est-à-dire quand il ne prenait pas encore la perception visuelle comme le modèle de l'intuition:

> Les concepts, les contenus en général, peuvent nous être donnés d'une double manière. Premièrement d'une manière propre, c'est-à- dire tels qu'ils sont. Deuxièmement d'une manière impropre ou symbolique, c'est-à-dire par la médiation des signes, qui sont eux-mêmes donnés de façon propre.
> ..... tous les signes mathématiques de niveau élevé sont indirects; ce sont des signes de signes de signes, entassés à un degré élevé les uns sur les autres...
>
> Husserl 1975, p.415

C'est en fonction de cette opposition (1972, p. 237) que Husserl s'est efforcé de reconstruire la genèse phénoménologique du nombre, dans la *Philosophie de l'Arithmétique*. Pour lui cette genèse ne peut être que celle d'une sémiotisation de la pensée et d'une manipulation de signes (1972, p. 233, 310, 317-320, 330, 336). La logique, comme les mathématiques, étaient pour lui comme le champ où la prédominance de l'intuition des objets eux-mêmes était impossible et où seule l'organisation des signes en un système restait la seule manière d'accéder à des objets qui ne peuvent pas être appréhendés en eux-mêmes (1975, p.439). Mais, avec ses*Recherches logiques,* Husserl opère une rupture: il abandonne le domaine des registres discursifs formels et symboliques nécessaires aux mathématiques, pour ne plus considérer que la «grammaire» des expressions linguistiques quand elles sont employées pour désigner les objets directement accessibles dans la perception, c'est-à-dire accessibles indépendamment de tout signe. Car, pour Husserl, le fondement ultime de la connaissance ne pouvait être que dans l'intuition, celle-ci étant antérieure à toute représentation «signitive».

Cette fusion entre science et conscience, qui est à la base de la notion d'intuition, se retrouve avec des connotations plus psychologiques qu'épistémologiques ou logiques dans l'emploi le plus courant du terme «intuition», celui qui a été popularisé par Poincaré pour les mathématiques (Brunschvicg 1972, 449): «intuition» renvoie de façon large non à la seule perception mais aussi à l'imagination et à l'invention en tant qu'acte de «voir». Ici «intuition» cesse d'être un terme philosophique pour signifier la visualisation de ce qui n'est pas perceptivement visible ou de ce qui n'a pas encore été réalisé. Ce que Brunschvicg a résumé dans cette formule: «autant dire que sous le nom d'intuition, on désigne le travail profond de l'intelligence» (Brunschvicg 1972, 451).

Le terme «intuition» noue donc plusieurs oppositions problématiques qui sont hétérogènes entre elles :

— (1) l'opposition entre appréhension complète d'un objet en un seul acte et appréhension complète de l'objet en une séquence d'actes,

— (2) l'opposition entre appréhension directe de l'objet lui-même et appréhension purement représentative, la représentation résultant soit d'une action de l'objet lui-même (par exemple la «trace» mémorielle ou non) soit d'un construction nécessairement sémiotique,

— (3) l'opposition entre l'appréhension anticipante avant l'effectuation d'une démarche et son effectuation laquelle doit prendre en compte les contraintes d'une réalisation sémiotique (pour un calcul) ou d'une réalisation physique (pour la construction d'une machine qui «marche»),

— (4) l'opposition entre une appréhension dont le contenu «ressemble» à l'objet lui-même (représentation «icônique») et une appréhension dont le contenu est arbitraire par rapport à l'objet lui-même (représentation «symbolique»).

Naturellement personne n'assimilera entre elle les oppositions (1) et (2) ou (3) et (4). Cela renvoie à des processus cognitifs de nature radicalement différente. Et la première question qu'il faut se poser est celle de savoir quels sont ceux impliqués dans le «travail profond de l'intelligence» en mathématiques. Seulement les processus relatifs à l'opposition (1) comme l'implique toute référence à l'épistémologie cartésienne, ou aussi ceux relatifs à l'opposition comme l'implique les analyses husserliennes antérieures aux *Recherches logiques* (2)? Ce sont là des questions qui ne sont pas négligeables dès que l'on veut étudier l'apprentissage des mathématiques par les élèves. Ce sont là des oppositions différentes dont l'oubli mine bien des débats ou même des recherches sur les «figures» en géométrie ou encore sur le rapport entre raisonnement et figure. Mais limitons nous ici à la première opposition dont l'enjeu est le rapport entre les objets d'accessibilité directe et les objets qui ne sont accessibles que sémiotiquement.

Cette première opposition repose sur deux suppositions qui sont loin d'être vérifiées. Tout d'abord l'existence d'une appréhension complète. Toute vision, au plan de la perception, est nécessairement limitée, cette limitation étant déterminée par un point de vue, une perspective. Cette donnée a d'ailleurs été au coeur des analyses husserliennes après les *Recherches Logiques*. **En revanche, les représentations sémiotiques (dessin, formules, phrases...) peuvent faire l'objet d'une appréhension complète.** Ensuite, cette distinction se contente de concevoir le sujet comme un simple «centre de fonctionnement» homogène. Elle laisse dans l'ombre «l'architecture fonctionnelle cognitive» qui rend possible et détermine ce fonctionnement. Or c'est seulement à partir de cette architecture cognitive que l'on peut comprendre les processus par lesquels peut se produire chez un sujet cette simultanéisation du successif, cette transformation de la discursivité en vision, cette transformation qui rend transparentes les représentations sémiotiques. Nous retrouvons ici, à propos de l'intuition, ce que nous disions à propos de l'appréhension immédiate au début de cette troisième section: ce qui, pour un expert, relève d'une appréhension complète en un seul acte est le résultat de sa longue pratique dans la discipline ou d'une formation qui, pour lui, a réussi. **Peut-on analyser les processus d'apprentissage en mathématique en voulant que soit déjà au point de départ ce qui n'en peut émerger qu'à son terme?** Il y a des emplois magiques et inconditionnels des métaphores de la vision et de l'intuition pour décrire l'activité mathématique qui voudraient imposer cette volonté au nom du point de vue scientifique. Mais un tel langage n'a de sens qu'au strict point de phénoménologique, celui de la conscience d'un sujet devenu un professionnel des mathématiques!

CONCLUSION

Dans l'examen des trois points de vue requis pour une analyse de la connaissance en vue de son acquisition par des élèves, le lecteur aura peut-être eu l'impression que nous avons plus parlé du sujet que de l'objet. Cependant ce détour par la conscience et par l'architecture fonctionnelle infra-consciente était nécessaire dans la mesure où l'**on ne peut pas parler d'objet sans parler des conditions de son accessibilité,** non seulement en termes de validité des médiations externes, mais également en termes de sa compréhension par des sujets «apprenants». Que pouvons nous en tirer pour la notion d'objet et, surtout, quel peut en être l'apport pour des recherches «concrètes» sur l'apprentissage des mathématiques ?

Rappelons d'abord que le point vue phénoménologique est le point de vue d'ancrage. De ce point de vue, est objet (physique, mathématique ou imaginaire) tout «ce sur quoi...» la conscience d'un sujet peut se diriger immédiatement. Rappelons aussi que d'un point de vue cognitif l'accessibilité à des objets de connaissance scientifique dépend de l'architecture fonctionnelle des systèmes cognitifs généraux et des systèmes sémiotiques culturellement transmis dont un sujet dispose. Et l'appropriation du fonctionnement d'un système implique à la fois son automatisation infra-consciente et sa coordination avec les autres systèmes. Le domaine des objets immédiatement accessibles à la conscience d'un sujet va donc dépendre de cette appropriation. En quoi la prise en compte du lien entre la conscience du sujet et l'architecture fonctionnelle cognitive infra-consciente dont il dispose peut-elle être décisive pour étudier les problèmes d'acquisition de connaissances scientifiques ou mathématiques par des élèves ? Et quelle méthode pour étudier les problèmes d'acquisition des connaissances dans cette perspective ?

1. Les deux dimensions de l'accessibilité aux objets et les deux types de systèmes cognitifs dont un sujet doit disposer pour être «capable» de connaissance scientifique

Tous les objets de connaissance, à l'intérieur d'une même discipline, et *a fortiori* d'une discipline à l'autre, ne relèvent pas des mêmes conditions d'accessibilité. Cela doit se traduire par un mobilisation différente des systèmes de l'architecture cognitive, autrement dit par des opérations cognitives différentes. Nous pouvons déjà le voir à propos des deux conditions absolument primoridales pour qu'un sujet puisse accéder à un objet quelqu'il soit : pouvoir le remarquer, c'est à-dire pouvoir le séparer d'un autre objet, et pouvoir le reconnaître dans ses différentes occurrences, c'est-à-dire pouvoir l'identifier à travers des manifestations de contenu très différents. **En d'autres termes l'accessibilité d'un objet pour un sujet dépend à la fois de critères de DISCRIMINATION et de critères d'INVARIANCE,** ces deux types de critères relevant de deux dimensions différentes.

— **discrimination :** un objet doit pouvoir être distingué aussi bien d'un autre objet que du champ dans lequel il est situé. La ressemblance, l'homogénéité ou le recouvrement sont des facteurs qui s'opposent au fait qu'un objet puisse être distingué. La séparation locale et les contrastes qualitatifs relatifs à l'intensité, à la forme (contours) ou à la taille (grandeur) sont, au contraire, des facteurs qui permettent de détacher des objets à partir d'un fond ou d'un champ homogènes : les notions d'acuité, de pouvoir séparateur, de seuil sont ici des notions fondamentales pour l'étude de ces facteurs qui portent sur la discrimination perceptive «immédiate». Mais ce ne sont pas les seuls facteurs. D'autres

objets peuvent être distingués sans pouvoir être perceptivement séparés. Cela implique une procédure de dissociation par l'observation de variations : certaines propriétés ou qualités restent constantes quand les autres, avec lesquelles elles paraissent se confondre, changent. Autrement dit, tout ce qui est visible ne peut pas être montré, c'est-à-dire ne peut pas «faire l'objet» d'un geste d'indication ou d'ostension, comme Wittgenstein l'avait déjà souligné à propos des couleurs. **Ce qui est discernable sans être séparable échappe à toute communication directe** : on ne peut que le dire et non pas le montrer même si c'est «sous les yeux». Celui conduit donc à distinguer plusieurs critères de discrimination (Figure 2)

— **invariance** : un objet doit pouvoir être rencontré, et donc reconnu, plusieurs fois par un sujet. Or à chacune de ses occurrences la manière dont l'objet se présente peut varier. Les facteurs de variation, pour les objets relevant de données sensorielles, sont nombreuses. Rappelons en quelques uns parmi les plus étudiés : les déplacements (qui entraînent un changement de perspective et souvent un changement de forme ou de contour ou plus simplement disparition par masquage), les déformations sans fractionnements (étirements) ou avec coupures. Avec ces différents types de variation la manière dont l'objet apparaît n'a pas le même contenu et la même apparence. C'est par rapport à ces différents types de variations que Piaget a introduit la notion de structure opératoire pour la conservation de l'objet. D'une façon plus générale, l'invariance ne se détermine pas par rapport à un champ mais par rapport à une «multiplicité»[1] d'occurrences présentant des contenus différents. Ce sont Frege et Piaget qui ont mis en évidence l'importance de l'invariance pour la constitution des objets à partir des multiplicités représentationnelles (Frege cfr. (I)) ou des multiplicités phénoménales (Piaget : les célèbres épreuves de conservation).

Il ne suffit pas cependant de séparer les critères de discrimination et ceux d'invariance, il faut également prendre en compte la différence entre les systèmes cognitifs généraux relatifs à la réception et à la mise en mémoire d'informations et les systèmes sémiotiques (*supra* III.). Car la discrimination et la reconnaissance d'un objet ne dépend pas du même type d'activité s'il s'agit de phénomènes ou de formes de l'environnement ou s'il s'agit d'unités de sens et d'organisations formelles constitutives de représentation sémiotiques (figure 2).

La seule activité commune à tous les types d'objets concerne le premier critère de d'invariance, celui de l'identité du contenu de deux occurrences : sont identiques deux occurrences dont les contenus respectifs se confondent par superposition ou par *mapping* Le caractère général de ce critère tient au fait qu'il porte essentiellement sur la valeur qualitative de forme: contour d'une silhouette, contour d'un tracé (caractère, suite de caractères, figures...) modulo les variations de grandeur dus à la distance ou à des choix de reproduction. On remarquera que toute prise en compte exclusive de ce critère d'invariance équivaut à considérer les signes, les symboles et toute espèce de représentation sémiotique comme de simples objets : cela équivaut encore à se restreindre à un regard purement formel sur les signes. Comme nous avons pu le voir dans la première partie de cet article, un tel regard en mathématique a été relativement tardif. L'apprentissage de la lecture en tant qu'elle repose sur l'automatisation d'un «code phonético-graphique» implique que l'on privilégie à la fois le premier critère de discrimination, le contraste, et le premier critère d'invariance, l'identité.

En revanche, le premier critère de discrimination (le contraste) ne relève pas du même

[1] «multiplicité» est la traduction du terme *Mannigfaltikeit* employé par Cantor pour nommer la notion d'«ensemble».

type d'activité pour les objets et phénomènes de l'environnement, et pour les unités signifiantes des représentations. De même le second critère de discrimination (la séparation locale) ne dépend pas de la même activité et du même type de fonctionnement pour les données perceptives et pour les productions représentatives (discursives ou non discursives). Car, pour être comprise, toute suite de signes ou de symboles ***doit être segmentée*** en des expressions ***formant un tout*** (désignatif, référentiel, propositionnel, algorithmique) chacune à leur niveau. Ce sont donc autant d'unités spécifiques sur lesquelles la conscience du sujet doit pouvoir se porter immédiatement. Leur discrimination est donc essentielle pour la compréhension ou la maîtrise d'un discours (démonstration, argumentation, explication, description), d'un calcul, d'une représentation figurale en géométrie... ***Ainsi l'utilisation de systèmes sémiotiques à lexique réduit ou à lexique vide, comme les écritures en «0, 1», pose des problèmes particuliers de discrimination*** : elles induisent des ressemblances perceptives globales entre des suites de symboles qui pourtant réfèrent à des objets très différents.

L'hétérogénéité des activités est encore plus frappante pour les autres critères d'invariance. Les productions sémiotiques n'admettent qu'une *invariance référentielle* entre des expressions différentes (Frege) ou entre des représentations de registres différents. Cette invariance est fondamentale pour toutes les activités d'expansion discursive, pour tous les traitements de type calcul... Au contraire, les multiplicités phénoménales n'admettent qu'une «*invariance opératoire*[1] (Piaget), c'est-à-dire une invariance liée au système de comportements d'un être vivant qui découvre son environnement (déplacements, gestes ou manipulations qu'il effectue sur des objets physiques ou sur un «matériel»). Cela veut dire que l'acquisition d'un invariant opératoire piagetien ne peut pas faciliter l'acquisition d'un invariant référentiel, car elle est d'un autre ordre : cela a d'ailleurs été le point d'achoppement de beaucoup de recherches sur l'apprentissages des mathématiques depuis 1970!

[1] On ne saurait oublier que la notion d'«invariant opératoire» est une extrapolation de l'utilisation que Poincaré avait faite de la notion de groupe pour expliquer la notion d'espace. Piaget en a fait le mécanisme unique de l'intelligence et de son développement. Soulignons l'illusion sémantique induite par cette expression «invariant opératoire». Elle tend à lier la notion d'opération aux seuls comportements d'action sur les objets de l'environnement et fait oublier qu'il y a des opérations purement sémiotiques (un calcul par exemple), complètement indépendantes des «opérations concrètes» sur des objets physiques. Il est donc équivoque de parler d'action sans la rapporter au système permettant d'effectuer l'action.

Détachement *d'une totalité continue et homogène*	critères de **DISCRIMINATION** relativement aux données des **systèmes sensoriels**	aux productions des **systèmes sémiotiques**
1. Contraste	émergence immédiate et primitive au plan de la perception déterminant des *différenciations au sein d'un champ homogène:* coexistence des ***valeurs constrastives***	la valeur d'un signe ou d'un suite de signes est déterminée par ***opposition à un autre signe pouvant lui être substitué:*** incompatibilité des ***valeurs alternatives*** pour un choix. Cela relève en fait d'une procédure de variation analogue à celle nécessaire pour pouvoir discerner des qualités, visuelles ou autres, non séparables
2. Séparation locale	possibilité de ***montrer par un geste indicateur*** (main, doigt..) : tout ce qui est visible n'est pas séparable (les couleurs...)	implique la mise en oeuvre de règles syntaxiques propres au systèmes pour effectuer la ***segmentation*** des unités signifiantes composant un discours ou une figure
3. Discernabilité	implique ***une procédure de variation*** et de comparaison des différents résultats des variations effectuées	implique ***une procédure d'interprétation*** par croisement d'unités déjà discriminées (propriétés, informations) ou par leur combinaison en un nouvel objet (discernabiltié des plans dans la représentation plane d'un solide)

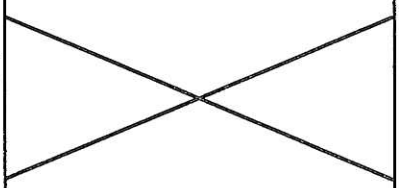
Reconnaissance *d'un objet par rapport à une occurrence antérieure*	critères d' **INVARIANCE** relativement aux **multiplicités phénoménales** (issues des données sensorielles)	**multiplicités représentationnelles** (issues des productions sémiotiques)
1. Identité : *(par mapping:)*	issues de la reproduction d'une forme : l'identité résulte de la superposaibilté de deux occurences externes ou d'une occurrence externe et d'une trace interne (mémoire) servant de prototype	issues de répétitions de formes (caractères, tracés...)
2. Conservation *(par compensations)*	issues de modifications du contenu perçu, par suite de changements de position ou par suite de changements physiques (déformation, fragmentation)	
3. Equivalence *(par substitution ou par choix d'une correspondance descriptive)*		issues de modificatons du contenu des représentations: soit en raison de la «générativité» du système sémiotique (les règles de formation) permettant de produire un ensemble illimité de phrases ou de formules, soit par changement de système sémiotique. On distinguera donc ***une équivalence «logique» et une équivalence «référentielle»***

Figure 2. Diversité des opérations cognitives permettant l'accessibilité à un objet

SIGNE ET OBJET (II) : ANALYSE DE LA CONNAISSANCE

Tous les objets de connaissance ne relèvent pas des mêmes critères de discrimination et d'invariance. Une analyse des connaissances scientifiques qui veut dégager les conditions de leur acquisition par des élèves en formation initiale impliquera donc que l'on respecte les trois principes directeurs suivants :

(1) La distinction et la reconnaissance des objets de connaissance scientifique, et plus particulièrement celles des objets mathématiques, impliquent des critères de discrimination et des critères d'invariance spécifiques aux systèmes sémiotiques et aux multiplicités représentationnelles

(2) il y a un fonctionnement cognitif propre à la mise en oeuvre de chacun des critères de discrimination et d'invariance respectivement pour les informations issues des données sensorielles et pour celles produites à l'aide des systèmes sémiotiques.

(3) Un sujet ne peut accéder à des objets de connaissance scientifique et, plus particulièrement, de connaissance mathématique que lorsqu'il est en mesure d'effectuer les activités cognitives lui permettant de distinguer et de reconnaître ces objets

Force est de constater que tous les modèles psychologiques ou didactiques d'apprentissage actuellement utilisés pour organiser, ou simplement pour justifier, des «activités» et des «séquences» d'enseignement, ne retiennent que l'une des deux dimensions d'accessibilité des objets (discrimination ou invariance) et privilégient les systèmes cognitifs généraux au détriment des systèmes sémiotiques. Cela a pour conséquence que l'on prend un type particulier de fonctionnement cognitif, un critère d'invariance par exemple, comme le modèle du fonctionnement général et commun pour tous les types de connaissance

En insistant sur l'aspect phénoménologique de l'objet, le «ce sur quoi...», et sur l'architecture fonctionnelle infra-consciente qui en détermine ***les conditions cognitives d'accessibilité, nous avons privilégié l'appréhension immédiate*** au détriment de l'appréhension successive. Ce faisant, ***n'aurions nous pas oublié ou même exclu les conditions scientifiques d'accessibilité,*** lesquelles dépendent de la mise en oeuvre de médiations externes et ***impliquent donc que l'on privilégie phénoménologiquement l'appréhension successive*** et non pas l'appréhension immédiate ? Car les conditions scientifiques d'accessibilité aux objets se font à l'intérieur même de démarches que l'on contrôle.

Rappelons la définition générale de la notion d'objet (*supra* IIIb) : un objet est toujours le terme de l'un des deux couples suivants : {opération, ...} ou {représentation, ...}. C'est seulement dans l'appréhension immédiate, en raison de la transparence de la conscience, que l'objet semble apparaître tel quel, indépendamment de toute opération ou de toute représentation sémiotique. Et toute mise en oeuvre d'une appréhension successive, méthodologiquement planifiée, repose sur les objets qui sont immédiatement accessibles à la conscience du sujet (*supra* IIIa3). Cela veut dire que l'accès à des objets mathématiques par des élèves ne peut se faire qu'en fonction des objets qui leur sont déjà immédiatement accessibles. Or, en vertu de la définition générale de la notion d'objet, ces objets peuvent être aussi bien des opérations ou des représentations que les objets qui en sont les corrélats[1]. En

---

[1] Phénoménologiquement il y a deux entrées possibles dans le «sens» d'une démarche : soit l'objet-cible que la démarche doit rendre accessible soit les actes constitutifs de cette démarche. L'organisation anteroceptive d'une démarche requiert une appréhension immédiate à la fois de l'objet-cible et des actes constitutifs des pas de cette

d'autres termes, pour tous les objets dont l'accessibilité requiert une démarche de la part du sujet, un part importante des objets d'ancrage et des objets outils requis pour effectuer la démarche, sont des opérations sémiotiques. **La découverte et la prise de conscience de ces opérations sémiotiques constitue le détour cognitif nécessaire à l'entrée dans la plupart des démarches mathématiques.** C'est pourquoi la prise en compte des registres de représentation sémiotique, du fonctionnement spécifique à chacun et de leurs coordinations. est si décisive pour l'apprentissage des mathématiques.

2. Les deux points de vue possibles dans l'analyse d'un problème : en aval ou en amont.

On accorde généralement une grande place, dans l'acquisition des connaissances scientifiques et plus particulièrement dans celle des connaissances mathématiques, à la résolution de problème. Comment la pluralité des points de vue, phénoménologique et cognitive et scientifique peut-elle se traduire dans l'analyse de la résolution de problème ?

Regarder un problème du point de vue mathématique, c'est regarder d'emblée la (les) solution(s) de ce problème. Analyser le problème c'est alors regarder les différents traitements possibles et leur mise en oeuvre dans la (les) solution(s). Toute l'analyse est ainsi faite en aval de l'énoncé du problème.

Mais un problème peut aussi être regardé en amont. On regarde alors le choix des informations qui sont données dans l'énoncé relativement à la situation mathématique, ou extramathématique (pour les problèmes de modélisation), ainsi que les contraintes éventuellement imposées pour l'acceptabilité de la solution. Analyser le problème c'est alors inventorier les autres choix possibles parmi toutes les informations nécessaires à une description complète de la situation (supprimant donc toute possibilité de problème), et inventorier également les différentes manières dont les informations choisies peuvent être données. Cela revient à rechercher toutes les variations possibles de l'énoncé qui conservent, pour la résolution du problème, la mise en oeuvre de la même méthode mathématique ou des mêmes types de traitement mathématique.

Naturellement de telles variations peuvent rendre la résolution cognitivement plus complexe ou plus longue à trouver. Car le type de traitement mathématique à mettre en oeuvre sera plus moins «facile» à reconnaître ou à trouver, son application devenant plus ou moins «triviale» selon les variations intrinsèques de l'énoncé. L'ensemble des variations qui respectent ces conditions vont constituer ce que nous appellerons un «champ d'énoncés de problème». On peut ainsi définir un champ d'énoncés de problèmes additifs, un champ d'énoncés de problèmes de pourcentage, un champ d'énoncés de problèmes de mise en équations , un champ d'énoncés de problèmes d'aire ou de périmètre... ***Ce champ d'énoncés est donc défini par un ensemble de variations rédactionnelles intrinsèques.***. Un problème doit être énoncé. Un telle problématique requiert donc une analyse en amont et non point en aval et elle revient à ne jamais considérer un problème isolément pour lui même mais, si l'on préfère un autre terminologie, à le resituer d'emblée dans une famille de problèmes. Mais pour définir une famille de problèmes, il est nécessaire de recourir à un point de vue en amont et pas seulement en aval. Car c'est seulement en travaillant explicitement sur un champ d'énoncés ainsi définis qu'un réel apprentissage de la résolution de problèmes de modélisation est

---

démarche. Mais l'appréhension immédiate de l'objet-cible, à la différence de celle des actes constitutifs des pas de la démarche **ne peut être qu'une appréhension vide tant que la démarche n'est pas effectuée.**

possible.

On retrouve, par exemple, cette différence entre les deux points de vue à propos des discussions sur l'introduction de démonstrations dans l'enseignement Le point de vue en aval revient à souligner le fait qu'il peut y a avoir plusieurs démonstrations différentes pour un théorème. Ainsi un même théorème de géométrie élémentaire peut être démontré par différentes méthodes (analytique, vectorielle, les transformations...). Le point de vue en amont consiste, au contraire, à regarder pour chaque méthode de démonstration comment fonctionne le raisonnement en relation avec les registres mobilisés et à regarder comment un sujet en vient à reconnaître qu'une démonstration prouve.

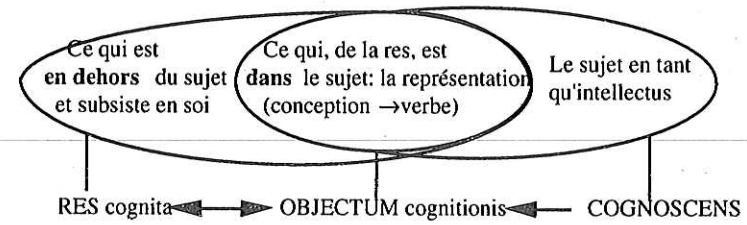
On aura facilement reconnu que les points de vue en aval et en amont dans l'analyse d'un problème correspondent respectivement aux points de vue scientifique et au point de vue cognitif dans l'analyse des connaissances. Et dans une préoccupation didactique d'acquisition des connaissances, il ne saurait être question de les opposer comme les termes d'une alternative mais au contraire de les articuler. Mais qu'en est-il du point de vue phénoménologique dans l'analyse d'un problème ? On réintroduit donc ici le point de vue de la conscience du sujet, et comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises au cours de cet article, ce point de vue d'ancrage est toujours plus ou moins explicitement associé soit au point de vue scientifique soit au point de vue cognitif. Cela nous renvoie à un autre aspect fondamental pour l'activité de la connaissance : les questions en tant qu'auto-interrogations, lesquelles sont d'un certain point de vue toujours plus précieuses que les réponses ou les solutions ! Mais cet aspect phénoménologique ne recouvre pas exactement la notion mathématique de problème.

Références

Aristote (1966) *De l'âme* (tr. Barbotin). Paris : Les Belles Lettres
Aristote (1970) *Seconds Analystiques* (tr. Tricot). Paris : Vrin
Benveniste E. (1976) *Problèmes de linguitique générale*, 1. Paris : Gallimard.
Bkouche R. (1988) *Quelques grandes problématiques de l'histoire de la géométrie.* Lille: IREM.
Brunschvicg L. (1912, 1972) *Les étapes de la philosophie mathématique.* Paris : Blanchard.
Brunschvicg L.
Bolzano B. (1993) *Les paradoxes de l'infini* (tr. H. Sinacoeur). Paris : Seuil.
Coururat L. (1896) *De l'infini mathématique.* Paris: Alcan.
Descartes R. (1954) *La géométrie.* New York : Dover Publications.
Descartes R.(1963) *Oeuvres philosophiques* , I (Ed. F. Alquié). Paris : Garnier.
Descartes R.(1967) *Oeuvres philosophiques* , II (Ed. F. Alquié). Paris : Garnier.
Ducrot O. (1972) *Dire et ne pas dire.* Paris : Hermann.
Ducrot O. (1989) *Logique, structure, énonciation.* Paris : Editions de minuit.
Duval R.(1976) Parole, expression, silence *R. S. P.T.* 60, 2, 226-260
Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine.* Berne : Peter Lang
Duval R. (1996) «Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques» *R.D.M.* ,16, 3, p. 349-382
Frege G. (1893, 1962) *Grundgesetze der Arithmetik* I Hidelsheim : Olms
Frege G. (1971) *Ecrits logiques et philosophiques* (tr. Cl. Imbert). Paris : Seuil
Golstein C. (1995) La naissance du nombre *La Recherche* n° 278 p. 732-735

Granger G.G (1994) *Formes, opérations, objets*. Paris : Vrin.
Granger G. G. (1995) Objet *Encyclopédia Universalis* p. 670-674. Paris
Grize J. B. (1983). Schématisation et logique naturelle. *Essai de logique naturelle* (p. 97-147) Berne : Peter Lang.
Guéroult M. (1954) *Descartes selon l'ordre des raisons* I. Paris : Aubier.
Husserl E. (1929, 1969) *Méditations cartésiennes* (tr. E. Lévinas) Paris: Vrin.
Husserl E. (1901, 1972) *Recherches Logiques* 2, deuxième partie (tr. Elie, Kelkel, Schérer) Paris : P.U.F.
Husserl E. (1936, 1962) *L'origine de la géométrie* (tr. J. Derrida). Paris :P.U.F.
Husserl E. (1891, 1972) *La philosophie de l'arithmétique* (tr. J. English). Paris: P.U.F.
Heidegger M. (1929, 1964) *L'être et le temps* (tr. Boehm et de Waehlens). Paris : Gallimard.
Heidegger M. (1975) *Grundprobleme der Phänomenologie, Gesamt ausgabe 24*. Frankfurt : Klostermann
Hilbert (1904) *Uber die Grundlagen der Logik und der arithmetic* " in From Frege to Gödel p.129-139)
Kant E. (1980) *Oeuvres philosphiques* I. (Ed. F. Alquié). Paris : Gallimard.
Noirfalise R. et Perrin-Glorian M.J. (Ed.) (1995) *Actes de la VIII^e Ecole et Université d'Eté de Didactiques des Mathématiques.* IREM de Clermont-Ferrand.
Nichanian M. (1979) La *question générale du fondement : écriture et temporalité*. Strasbourg : Thèse de l'université des lettres et des sciences humaines.
Piaget J. (1924) L'expérience humaine et la causalité physique de L Brunsschvicg, *Journal de Psychologie*, 21, p.586-607.
Piaget J. (1953). *Logic and Psychology*. Manchester: Manchester University Press.
Piaget J. (1967) *Biologie et connaissance*. Paris : Gallimard :
Piaget J. (1937, 1968) *La naissance de l'intelligence dhez l'enfant*. Neuchatel : Delachaux et niestlé
Quine W. V.O. (1971) Reference and modality in Linsky
Quine W. V.O. (1972) (1959) *Le mot et la chose* (tr. Dopp et Gochet). Paris : Flammarion
Quine W. V.O. (1977) Relativité de l'ontologie et autres essais. Paris : AubieMontaigne
Russell B. (1905) On Denoting. *Mind*, 14, p.478-493
Russell B. (1940, 1969))*Signification et vérité* (tr. Devaux). Paris : Flammarion.
Sebestik J. (1992) *Logique et mathématique ches Bernard Bolzano*. Paris : Vrin.
Skolem (1922, Quelques remarques sur la fondation axiomatique de la théorie des ensembles" *From Frege to Gödel* pp. 290-301.
Thom R. (1972) Les mathématiques «modernes» : une erreur pédagogique et philosophique ? *L'age de la science*, III, n°3, p. 225-242
Thomas d'Aquin (1820) *Quaestiones disputatae de Veritate*. Rome : Marietti.
Vuillemin J., (1962) *La philosophie de l'algèbre*. Paris: P.U.F.

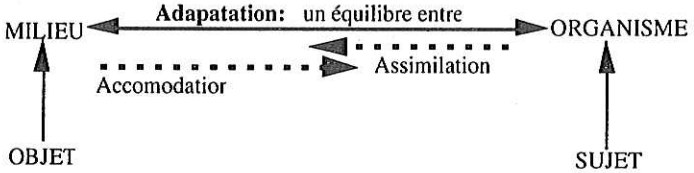
Annexe



La chose connue est dite objet de connaissance, selon ce qu'elle est en dehors du sujet connaissant, subsistant en elle-même, bien que de la chose, telle qu'en elle-même, il ne puisse pas y avoir de connaissance si ce n'est par ce qui d'elle sen trouve (re-formé) dans le sujet connaissant.

La notion d'«**objet**» ne doit donc pas être confondue avec celle de «**res**». L'objet est le produit d'un acte de l'esprit se con-formant à la réalité. **C'est en tant que l'objet est réel que la connaissance est vraie** : «veri enim ratio consistit in adaequatione rei et intellectus... intellectus incipit aliquid proprium habere quod res extra animam non habet sed aliquid ei correspondens, inter quae adaequatio attendi potest» (*De veritate* qu. I art. 3, ad Resp.).

L'objet est comme l'intersection de l'activité productrice de l'esprit et de l'accessibilité de la réalité : «conceptio intellectus est media inter intellectum et rem intellectam, quia ea mediante operatio intellectus pertingit ad rem: et ideo conceptio intellectus non solum est quod intellectum est, sed etiam id quo res intelligitur; ut sic id quod intellligitur, possit dici et res ipsa et conceptio intellectus» (*De Veritate* qu. IV art. 2, ad 3).



C'est pour pouvoir «étendre la notion d'adaptation vitale » à l'intelligence et à la «raison» que Piaget (1968, p.12-14) a postulé l'équivalence entre les interactions d'un organisme avec son milieu et la relation du sujet à l'objet. Ce faisant Piaget ne tient plus compte de la différence entre objet, c'est-à-dire ce qui est connu de la réalité, et réalité, c'est-à dire ce qui est indépendant des processus de connaissance ou ce qui leur est antérieur (les données telles qu'elles ont captées et enregistrées). Cette distinction est essentielle comme Granger le rappelle au début de son article sur la notion d'objet :

> ce que l'on nomme objet, à quelque niveau que ce soit, immédiat ou élaboré, de l'exercice de la pensée, ne peut être confondu sans plus, avec des données, considérées indépendamment de leur assemblage et organisées en unités distinctes, que l'on nommera phénomènes «ce qui apparaît
>
> Granger 1995, p. 670

Piaget ne s'est pas posé la question de la vérité des connaissances, il ne s'est intéressé qu'à leur développement en tant qu'elles constitueraient ce par quoi se poursuivraient les processus de l'évolution.