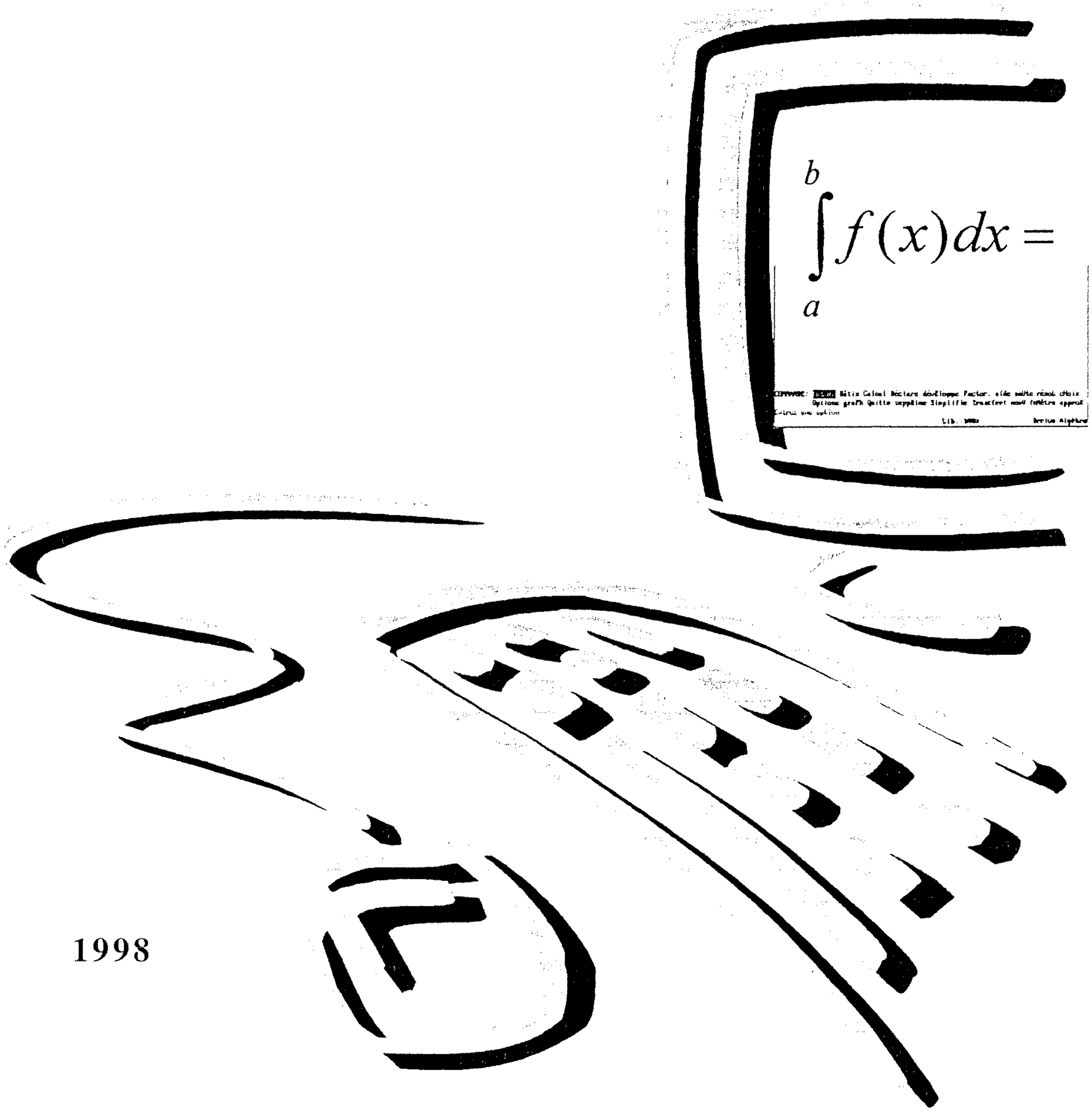
UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG
Tél. : 03-88-41-64-40
E.mail : bibirem@math.u-strasbg-fr
http://irma.u-strasbg.fr/~irem

INFO-MATHIC

ACTIVITES MATHEMATIQUES DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE



1998

SOMMAIRE

IREM DE STRASBOURG

Suzette ROUSSET-BERT
Nicole VOGEL
Bruno BERNARDOFF
Alain BONNET
Jacky DUDT
Christophe KILIAN
Philippe MICHEL
Denis TASSO

PRÉFACE

Depuis septembre 1994, un groupe de l'*IREM* de Strasbourg travaille sur des *activités mathématiques au lycée en environnement informatique*. Son objectif principal est d'élaborer et d'expérimenter dans les classes diverses activités dans le cadre des programmes.

Cette brochure présente les travaux de ce groupe sur les trois dernières années scolaires et propose des séquences ayant principalement trait à l'analyse et à l'algèbre (intégration, dérivation, équations et inégalités, suites numériques). Tout ce qui est présenté a été pratiqué dans les classes des membres du groupe dans le cadre strict des différents programmes, mais avec des conditions de matériel, d'horaires et d'effectifs parfois très différents. Ceci est d'ailleurs précisé au début de chacune des activités. Cette hétérogénéité induit le fait qu'il n'est pas forcément possible d'utiliser ce document sans aménagement, mais elle est révélatrice de la diversité des situations dans les établissements ainsi que de la diversité des approches de telle ou telle notion par les enseignants. Ceci explique aussi pourquoi autour d'un même thème, diverses activités sont proposées.

Leur point commun principal est de mettre en œuvre le logiciel *Derive*, dont le choix a été motivé par les raisons suivantes :

- il nécessite une configuration informatique minimale (logiciel DOS fonctionnant sur un 386).
- il est d'un apprentissage rapide et nécessite peu de connaissances en informatique.

Car il s'agit bien de mathématiques ! Les principales difficultés rencontrées par les élèves le prouvent. Ce sont la compréhension et le sens qui posent problème. Notre but était de confier les calculs longs et compliqués au logiciel *Derive* pour dégager tout le temps nécessaire à la compréhension et de centrer le dialogue entre maître et élève sur le sens de ce qui est demandé et de ce qu'il y a à faire.

Il est encore un peu tôt pour dire si cet à priori se vérifie, mais ce qui est certain, c'est que durant ces activités **tous** les élèves travaillent ... et font des mathématiques !

DÉCOUVERTE DU LOGICIEL - PARENTHESES ET ÉQUATIONS

SECONDE

1 TP – Durée : 1 heure 30

INTRODUCTION - COMMENTAIRES

LE CONTEXTE

Cette séance s'est déroulée dans une classe de seconde du lycée d'Erstein d'un niveau assez hétérogène. Les élèves avaient chacun un ordinateur et un crayon à papier. Certains élèves avaient l'habitude d'utiliser un ordinateur (soit chez eux, soit durant l'option STT au lycée) d'autres n'y avaient jamais touché.

LES OBJECTIFS

Dans un premier temps, il s'agissait de **se familiariser avec le logiciel** et ses principales fonctions.
Tant que les calculs ne devenaient pas fastidieux, l'élève devait avant d'utiliser l'ordinateur, réaliser le calcul à la main. Deux objectifs à ce niveau : des petites **révisions sur les règles de calcul** dans 3 puis comprendre la nécessité de **la bonne utilisation des parenthèses** dans l'écriture des expressions mathématiques.
Dans l'exercice suivant, sur le triangle de Pascal et le développement du binôme, il s'agit là **d'utiliser le logiciel comme outil** pour permettre de mieux se focaliser sur les résultats de ces développements.

LES REMARQUES

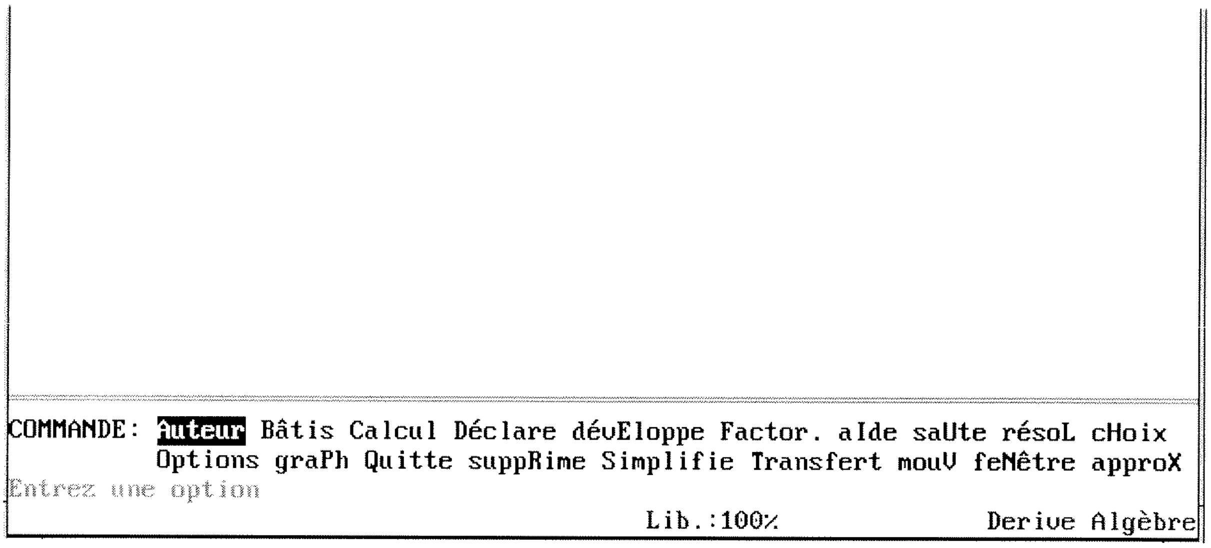
Peu de problèmes liés à l'utilisation se sont fait sentir, et les petites hésitations ont été rapidement surmontées à l'aide des voisins. Seuls les bons élèves arrivent à trouver les écritures des expressions compliquées, mais tous sont parvenus à un résultat très proche.
Sur le triangle de Pascal, les élèves réagissent très vite.
Dans la dernière partie, il s'agit de montrer aux élèves les autres possibilités de ce logiciel.

FICHES ACTIVITÉS

1 INITIATION

1. Lancement du logiciel
Choisir *DERIVE* dans le menu proposé par l'ordinateur.

2. L'écran de *DERIVE*
Après avoir lancé le logiciel l'écran suivant apparaît.



L'écran est donc partagé en deux parties.
En haut, la **zone de travail** : c'est dans cette partie que viendront s'afficher les expressions et les graphiques que tu vas apprendre à créer.

En bas, la **zone de commande** : elle est constituée de deux lignes de commandes :
Auteur ; **B**âtis...... ; appro**X**
La ligne suivante est une ligne de message. Elle explique succinctement la commande qui est en surbrillance au-dessus.

Les commandes :
Pour entrer une expression, il faut procéder de la sorte :

Appuyer sur " A " (comme Auteur).
Ecrire l'expression dans la zone de commande.
Valider en appuyant sur la touche Entrée.

Exemple : Entrer l'expression suivante : (17 +4)/(25+ 3).

Après avoir validé, l'expression apparaît dans la zone de travail.

Pour simplifier cette fraction, il suffit maintenant de taper " S " comme Simplifie.
DERIVE te propose de simplifier l'expression 1 (notée # 1). Accepte en validant. (appuyer sur Entrée)

2 DE L'IMPORTANCE DES PARENTHESES.

Dans le tableau suivant, simplifier les expressions « à la main » puis reproduire avec le logiciel les expressions indiquées et les simplifier à nouveau avec le logiciel.
Vous devez bien sûr retrouver le même résultat !!

EXPRESSION	CALCUL	AVEC DERIVE
$\frac{12+9}{17+18}$		
$2(15+5)-25\times 3$		
$[(5+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2^2}]$		
$\frac{a+\frac{8}{5}}{a+\frac{6}{5}}$		
$2^{(3^2)}$		
$(2^3)^2$		
$\frac{a^2b^3(-c)^5}{((-a)^3b^2)^3}$		

Exercice : Reproduire les expressions suivantes et ensuite les simplifier :

$$\frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{9}} \qquad \frac{1+\frac{2}{3+\frac{4}{5+x}}}{\frac{6}{7+\frac{8}{9+x}}+10} \qquad \frac{2.3\times 10^2-0.17\times 10^3}{0.5\times 10^{-1}}$$

Voici la solution du deuxième exercice :

$$2: \quad \frac{1+\frac{2}{3+\frac{4}{5+x}}}{\frac{6}{7+\frac{8}{9+x}}+10}$$

$$3: \quad \frac{(5x+29)(7x+71)}{4(19x+191)(3x+19)}$$

```
COMMANDE: Auteur Bâtis Calcul Déclare dévEloppe Factor. aIde saUte résoL cHoix
          Options graPh Quitte suppRime Simplifie Transfert mouV feNêtre approX
Entrez une option
Utilisateur                          Lib.:100%                      Derive Algèbre
```

Les commandes à connaître :

Auteur :	**permet de définir les expressions**	**A**
Simplifie :	**simplifie une expression déjà définie**	**S**
dévEloppe :	**développe une expression**	**E**
Factor :	**factorise une expression**	**F**
resoL :	**résolution d'une équation**	**L**
suppRime :	**effacer une expression**	**R**

Factoriser les expressions suivantes, reproduire les expressions avec *DERIVE* et vérifier les résultats obtenus.

EXPRESSION	CALCUL	AVEC DERIVE
$3(2x-5)+(2x-5)^2$		
$(x-1)^2-4(x-2)^2$		
x^3-1		

3 Identités remarquables !!!

Développer $(a+b)^2 =$

puis $(a+b)^3 =$

A l'aide du logiciel compléter le tableau suivant :

$(a+b)^2$	Développement Exposant Coefficient	$a^2 + 2ab + b^2$ 2 1+1=2 2 1 2 1	nombre de termes 3
$(a+b)^3$	Développement Exposant Coefficient		
$(a+b)^4$	Développement Exposant Coefficient		
$(a+b)^5$	Développement Exposant Coefficient		
$(a+b)^6$	Développement Exposant Coefficient		

Quelles observations peut-on faire à l'issue de ce tableau ?

4 Imaginez ce que vous n'auriez plus à faire ...

Résolution d'équations.

Entrer l'expression : (2x–1)(6x+8)=0.
Appuyer sur " L " pour résoudre l'équation.

Procéder de la même manière avec $x^2-4x+3=0$.

Puis avec a x^2 +b x +c = 0 (laisser un espace entre a et x, puis b et x).

Résolution de systèmes d'équations.

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$$

Appuyer sur A.
Entrer le système sur une seule ligne, entre crochets, et chaque équation séparée par une virgule
[2x+3y=7 , 3x–4y=2]
Pour résoudre le système, taper L pour résoLution.
Essayer avec d'autres systèmes.

Résolution graphique d'un système.

Ecrire les équations précédentes sous forme réduite.
En mode Auteur, écrire y = ...
Appuyer deux fois sur " P "
Vous obtenez le tracé de la première droite.

Pour tracer la deuxième droite appuyer à nouveau sur " A " pour revenir à la page de calcul.
Procéder de la même manière.

Tracé de courbe en deux dimensions.

Il faut procéder de façon identique à ci-dessus.
Vous pouvez entrer au choix l'expression y = x^2–x+1 ou bien x^2–x+1 et utiliser deux fois le touche " P ".
Essayer avec des courbes de votre choix.

INÉGALITÉS - INVERSE D'UN NOMBRE

SECONDE

1 TP – Durée : 2 heures

INTRODUCTION - COMMENTAIRES

LE CONTEXTE :

Ce travail s'est déroulé dans une classe de seconde du LEGTI de Haguenau au mois de janvier 1997. Le niveau de la classe est considéré comme assez bon par l'ensemble des professeurs. La classe est divisée en 2 groupes de 15 élèves, la durée du TP est d'environ 2h, le matériel disponible est un ordinateur pour 2 élèves. Les 2h sont constituées par un temps de recherche et une rédaction après synthèse.

L'ACTION

La **première partie** intitulée « en classe » est effectuée sans ordinateur.

Question 1.
Le développement de $(a-b)^2$ est donné immédiatement par l'ensemble des élèves. La deuxième partie de la question est moins bien comprise, le lien entre $(a-b)^2$ positif et $(a-b)^2$ supérieur ou égal à zéro est mal connu par beaucoup d'élèves.
Question 2.
Cette question est assez bien résolue par une majorité d'élèves, mais peu ont le réflexe de rappeler que a et b sont strictement positifs.
Question 3.
La simplification est obtenue par environ la moitié des élèves, mais il a fallu expliciter la signification de cette inégalité par quelques exemples numériques.

La **deuxième partie** intitulée « avec *Derive* » est effectuée avec un ordinateur.

Question 1.
- Aucune difficulté, les élèves sont habitués à utiliser le logiciel *Derive*.
- Le mot « inverse » a nécessité quelques explications précises, la définition de l'inverse d'un nombre (ou de 2 nombres inverses l'un de l'autre) est connue par 2 ou 3 élèves seulement.

Pour prouver que $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$ seul 1/4 des élèves environ a pensé à utiliser le résultat de la question 3. de la première partie.
Question 2.
- Dans cette question l'introduction d'une troisième lettre a troublé les élèves sur un point

précis, en effet, plusieurs ont demandé si, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$ est vrai. Réaction justifiée, par le fait que l'on utilise peu en seconde (ou en classe de troisième) des énoncés contenants 2, 3 ou 4 variables.

La démonstration de $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$, a été bien comprise après la généralisation de l'écriture $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$ aux trois variables a, b et c.

Question 3. et 4.

Ces deux questions ont été résolues correctement par la grande majorité des élèves, sans aucune aide.

Question 5.

Malgré une bonne compréhension de la démonstration, la rédaction n'a pas été facile pour plus d'un élève sur deux, ce qui est normal à ce niveau.

LES REMARQUES

La richesse de ce TP réside dans les points suivants :
- développements d'expressions comportant plus de 9 termes et observation de ces expressions.
- utilisation d'expressions comportant plusieurs variables dans une démonstration (situation rare en seconde).
- utilisation d'inégalités à plus de deux variables.
- début de généralisation d'un résultat algébrique.

La démonstration effectuée dans la deuxième partie de ce TP, aurait été inextricable pour la majorité des élèves, si on avait ajouté la difficulté du développement des expressions.
Derive permet de laisser de côté la partie calcul du travail pour se concentrer sur les raisonnements. Un élève de seconde ne distingue pas nécessairement une hiérarchie dans les difficultés qu'il rencontre au cours d'une activité mathématique. Pour lui, le plus souvent un obstacle dans un calcul ou dans un raisonnement est équivalent. Une activité ayant pour but de faire découvrir une démonstration peut apparaître à un élève comme une simple suite de problèmes à résoudre. Le risque est alors grand de voir la démonstration sombrer aux milieux des calculs.
Sans vouloir faire des calculateurs formels une panacée, ils semblent offrir une piste pour éviter de telles difficultés.

Quelques suggestions pour réaliser des TP de seconde dans lesquels on se servira d'un calculateur formel.

a) Respecter l'esprit du programme de seconde ... mais pas la lettre.

b) Ne pas utiliser un exercice extrait d'un manuel, ils sont tous faisables à la main ou avec une calculatrice numérique.

c) Les calculs doivent être longs et pénibles pour justifier l'usage d'un calculateur.

d) Les calculs effectués par la machine doivent être compris et « contrôlables » par l'élève, il ne faut pas que l'ordinateur devienne « une boite noire » dans laquelle on entre les données et qui nous donne un résultat, dont l'enchaînement des calculs apparaîtrait obscur. C'est sans doute le plus délicat à respecter.

Exemples

Exprimer a en fonction de b et c sachant que 2a + 4b – 3c = 5

$(a+b)^3$ $\quad$ $(a+b)^4$ $\quad$ $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$

FICHES ACTIVITÉS

EN CLASSE

Soient a et b deux nombres positifs non nuls.

1) Développe $(a-b)^2$ et démontre que $a^2+b^2 \geq 2ab$

2) Déduis-en que $\dfrac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$

3) Démontre que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2$

AVEC DERIVE

Dans tout ce qui suit, les lettres a, b, c, d et e désignent des nombres strictement positifs.

1) Ecris l'expression $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$. Développe.

Sur ton compte-rendu, réécris l'expression obtenue en regroupant les nombres qui sont inverses l'un de l'autre.

Peux-tu utiliser cette nouvelle expression pour prouver que, si a et b sont strictement positifs,

$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geq 4$?

2) Ecris l'expression : $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ puis développe.

Sur ton compte-rendu, réécris l'expression obtenue en regroupant les nombres qui sont inverses l'un de l'autre.

Cela te permet-il de démontrer que $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ est un nombre supérieur ou égal à 9 ?

3) Fais le même travail avec $(a+b+c+d)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)$, puis avec

$(a+b+c+d+e)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}\right)$.

Quels résultats obtiens-tu ?

4) S désigne la somme des nombres a, b, c, d, etc. ... , et S' désigne la somme de leurs inverses. On désigne par n le nombre des termes de S et S'.

Complète le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$S \times S'$ est égal ou supérieur à	1	4	9					

Que représentent les nombres écrits sur la seconde ligne ?

5) Rédige complètement la démonstration du fait que $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geq 9$

DÉRIVATION

1ère S

5 activités + cours. Durée : 36 heures
(cet article a fait l'objet d'un article dans la revue Repères – Irem n°25)

INTRODUCTION - COMMENTAIRES

Etude et application de la dérivation en 1ère S à l'aide du logiciel DERIVE

De janvier à mars 1995, Denis TASSO et Nicole VOGEL, professeurs de mathématiques, ont proposé à une 1ère S du LEGTI de HAGUENAU et à une 1ère S du LEGT de HAGUENAU une expérience d'enseignement de mathématiques intégrant le logiciel *DERIVE.*
Il s'agissait de l'étude de toute la partie « III.2 Dérivation » du programme des premières S en 36 heures environ, dont 12 heures en classe avec les ordinateurs.
La 1ère S du LEGTI de HAGUENAU de Denis TASSO comptait 20 élèves, 2 filles et 18 garçons ayant choisi l'option industrielle. Elle ne disposait que du matériel classique d'une salle informatique, mais la plupart de ses élèves sont des passionnés d'informatique et disposent d'un ordinateur performant (au-dessus d'un PC 386, et même plusieurs Pentiums) à la maison.
La 1ère S du LEGT de HAGUENAU se composait de 31 élèves, 16 filles et 15 garçons ayant choisi l'option sciences expérimentales. Pendant toute cette période, ils disposaient d'un ordinateur portable pour deux. Les travaux en classe se sont pourtant faits essentiellement avec le matériel de la salle informatique du lycée, les portables ne servant que d'appoint, car ces appareils ne sont plus autonomes. Ils ont donc surtout permis de prolonger les activités faites en classe par un travail à la maison.
Les deux lycées disposent d'une salle informatique équipée d'une dizaine d'ordinateurs en réseau.
- Denis TASSO avait la possibilité d'y accéder deux heures par quinzaine pour chaque demi - classe.
- Nicole VOGEL avait une heure par semaine en demi - classe plus deux heures en classe entière dans la salle informatique. Dans ce cas, on complétait l'équipement avec quelques portables.

Initiation au logiciel DERIVE. (2 heures)

Denis	Nicole
Distribution d'un mode d'emploi du logiciel : exploration libre pendant 1 heure ; Exercices graphiques : 1 heure ;	Fiche *DERIVE* I (polynômes) : 1 heure en classe ; Fiche *DERIVE* II (suites) : 1 heure en classe. Ces deux fiches partent de la résolution à l'aide de *DERIVE* d'exercices qui figuraient dans le précédent devoir surveillé. Elles devaient être terminées et le travail rédigé sur copie (une copie par binôme) à la maison.

Activités 1 et 2 :
Fonction dérivée d'une fonction polynôme, lien entre le signe de *f* ' et le sens de variation de *f*. (3 heures)
Travail sur ordinateurs en classe : 1 heure à 1 h 30 ;
Synthèse : 30 mn ;
Exercices : 1 heure en classe + travail à la maison.

Activité 3 : dérivée d'un produit, de l'inverse, du quotient. (6 h 30)
Travail sur ordinateurs : 1 h 30 ;
Cours : 1 heure en tout (synthèse, théorème de la bijection, emploi des calculatrices pour les représentations graphiques) ;
Exercices, dont une partie avec l'aide des ordinateurs si possible : 4 heures en classe.

Nicole
TP1 : courbes des fonctions polynômes de degré 4. (2 heures)
Travail sur ordinateurs : 2 heures ;
Le TP est ensuite complété à la maison et rédigé sur copie par binôme.

Activité 4 : lien entre dérivée et tangente, dérivée en un point (7h 30)
Travail sur ordinateurs : 2 h 30 ;
Cours : 1 heure (synthèse, démonstration de quelques propriétés, lien entre extremum et dérivée) ;
Exercices : 4 heures en classe.

Nicole
TP2 : une équation de degré 5, trois polynômes de degré 4. (2 heures)
Travail sur ordinateurs : 2 heures ;
Fin du TP et rédaction sur copie à la maison.

Activité 5 : dérivée des fonctions sin, cos et racine à l'aide de la définition, dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$. (7 h)
Travail sur ordinateurs : 1 h 30 ;
Cours : 1 heure (synthèse, étude des fonctions circulaires, équations sin x = a et cos x = a) ;
Exercices, dont une partie avec l'aide des ordinateurs si possible : 4 h 30 en classe.

Devoirs surveillés, corrigés des devoirs sur copies... (environ 6 h)
Les connaissances testées en devoir surveillé sont classiques : étude et représentation graphique de fonctions, lien avec d'autres problèmes.
Il n'y a pas eu de devoir surveillé permettant l'utilisation du logiciel *DERIVE*, car il n'y avait pas suffisamment d'ordinateurs pour que chaque élève ait le sien.

FICHES ACTIVITÉS

DERIVEES - ACTIVITE 1

1) Avec *DERIVE*, définir l'expression **Auteur** : $5x^3 + 4x^2 - 3x + 5$.
Ensuite, choisir successivement :
Calcul, ***Derive***, expression : #... , variable : x, ordre : 1.
Le logiciel affiche $\frac{d}{dx}(5x^3 + 4x^2 - 3x + 5)$.
Choisir maintenant **dévEloppe.**
Nous venons de voir comment *DERIVE* associe, à une fonction f (dans notre exemple $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 5$), une nouvelle fonction, appelée fonction dérivée de f, et notée f' (dans notre exemple $f'(x) = ?$).

2) A l'aide de *DERIVE*, remplir quelques lignes du tableau suivant, en choisissant quelques fonctions polynômes f :

$f(x)$	$f'(x)$

3) Faire une conjecture quant à la façon de calculer la fonction dérivée d'une fonction polynôme. Vérifier cette conjecture avec quelques exemples.

COURS :

Nous admettons qu'à toute fonction polynôme f, on peut associer une nouvelle fonction, appelée fonction dérivée de f (dont nous verrons la définition rigoureuse plus tard) et notée f', de la manière suivante :

Si $f(x) = x^n$, *alors* $f'(x) = n\,x^{n-1}$;

Si f est une fonction polynôme et k une constante réelle, alors $(k\,f)' = k\,f'$;

Si f et g sont deux fonctions polynômes, alors $(f + g)' = f' + g'$.

EXERCICES :
Sans DERIVE, calculer des dérivées de fonctions polynômes.

DERIVEES ACTIVITE 2

1) On donne $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 3$.
Calculer *f'(x)*.

2) A l'aide de *DERIVE*, représenter les fonctions *f* et *f'*.
Faire un tableau (approché) des variations de *f* et un tableau des signes de *f'(x)*.

3) Enoncer une conjecture.
Vérifier cette conjecture avec quelques autres fonctions polynômes *f* de degrés deux ou trois.

COURS :
Soit f une fonction de dérivée f'.
Nous admettrons que sur tout intervalle où f' est positive (respectivement strictement positive, négative, strictement négative, nulle) la fonction f est croissante (respectivement strictement croissante, décroissante, strictement décroissante, constante).

EXERCICES :
Sans DERIVE, étudier les variations de quelques fonctions polynômes de degré deux ou trois.

DERIVEES ACTIVITE 3

1) Compléter les tableaux suivants (on pourra éventuellement utiliser *DERIVE* pour faire certains calculs) :

	$u(x)$	$v(x)$	$10u(x)$	$u(x)+v(x)$	$u(x)\times v(x)$
Forme développée du polynôme	x^3+4x^2-5x+	x^2+4x-1			
Dérivée du polynôme					

	$u'(x)$	$v'(x)$	$10u'(x)$	$u'(x)+v'(x)$	$u'(x)\times v'(x)$
Forme développée du polynôme					

Que peut-on en conclure ?

2) Avec *DERIVE*, choisir **Déclare Fonction** : nom : u ; valeur : ne rien mettre ; variable : x.
On obtient u (x) : = .
Déclarer de même une fonction v.
Donner l'expression **Auteur** : u(x) $*$ v(x) , puis **Calcul, *Derive* :** expression : # précédent, variable : x, ordre : 1. Puis choisir **dévEloppe.**
En déduire une conjecture pour la formule : $(u \times v)' = \ldots$.

3) En utilisant la méthode du 2), trouver une conjecture pour les formules : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \ldots$ et : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \ldots$

(Nous admettrons que, si deux fonctions u et v ont des dérivées sur un intervalle où v ne s'annule pas, on peut aussi dériver le quotient $\left(\dfrac{u}{v}\right)$.)

Compléter le tableau :

$u(x)$	$v(x)$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)'(x)$	$\dfrac{1}{v'(x)}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x)$	$\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$
x^3+4x^2-5x+3	x^2+4x-1				

Que peut-on en conclure ?

COURS :

- On admet que le produit de deux fonctions dérivables u et v est dérivable.

On admet que l'inverse d'une fonction v dérivable sur un intervalle où elle ne s'annule pas est dérivable.

On en déduit que le quotient de deux fonctions dérivables u et v - sur un intervalle où v ne s'annule pas - est dérivable.

- Tableau (admis) récapitulant les formules de la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient...

- Théorème de la bijection.

EXERCICES :

- Calculs, sans DERIVE, de dérivées de fonctions rationnelles diverses.

- Etudes de fonctions rationnelles simples.

(On pourra se servir de DERIVE pour vérifier, mais toutes les étapes des calculs et des raisonnements devront être détaillées sur le cahier.)

- Représentations graphiques de fonctions ; apprentissage de la programmation de la calculatrice.

Problèmes modélisés à l'aide de fonctions rationnelles et équations $f(x) = m$.

DERIVEES ACTIVITE 4

1) On donne $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Déclarer cette fonction et la représenter graphiquement avec ***DERIVE***.

On appelle sa courbe **$\mathbb{C}$**.

2)a) Etant donnés deux réels distincts a et b, on appelle A et B les points de $\mathbb{C}$ d'abscisses respectives a et b. Quelles sont les coordonnées de A et de B ?

b) Expliquer pourquoi $y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ est l'équation d'une droite. Prouver que cette droite passe par les points A et B.

Déclarer la fonction g de valeur : (f(b) – f(a))/(b – a) (x – a) + f(a).

Quelle est la courbe d'équation y = $g(x, a, b)$?

c) Placer sur le graphique les points A_0 et B_0 de $\mathbb{C}$ d'abscisses respectives – 1,5 et + 0,8 puis la droite ($A_0 B_0$).

d) Conclure : à quoi sert la fonction g ?

3) Calculer $f'(x)$ et $f'(a)$.
Déclarer la fonction h de valeur : « expression de $f'(a)$ » (x – a) + f(a).
Placer sur le graphique la droite d'équation y = h (x, -1.5).

4)a) *Pour un point A de $\mathbb{C}$ fixé, on veut construire une droite (AB) avec un point B de la courbe très proche de A et calculer une valeur approchée du coefficient directeur de cette droite.*
Pour cela on fixe un nombre a dans l'intervalle [–2,2 ; +1,2].
Placer sur le graphique le point A(a, f(a)). Choisir une valeur b telle que le point B(b, f(b)) soit très proche de A. Placer le point B et la droite (AB) sur la figure.
Le segment [AB] doit être quasiment confondu avec la portion de $\mathbb{C}$ située entre A et B.
Vérifier en faisant un zoom vous permettant de distinguer le segment [AB].
Si [AB] et $\mathbb{C}$ ne sont pas assez proches, recommencer avec un point B plus rapproché de A.
b) Pour le point B retenu au a), calculer une équation de (AB) (commande **dévEloppe**...) et une valeur approchée de son coefficient directeur (commande **approX**...).
c) Placer sur le graphique la droite d'équation y = h(x, a).
Calculer une valeur approchée de son coefficient directeur. Que remarque-t-on ?

5) Rédiger une conclusion en formulant une conjecture.

Quelques commandes de DERIVE qui pourront vous servir :

Dans la fenêtre graPhique :

- On peut **déplacer la croix du graphique** à gauche ou à droite avec → ou ←, éventuellement associée à la touche CTRL pour aller plus vite, ou en hauteur avec ↑ ou ↓.
- On peut **centrer le graphique sur la croix** avec la commande **Centre.**
- Lorsqu'on a donné l'expression **Auteur** : [x, y], **graPh** place le **point de coordonnées (x, y)**.

Dans la fenêtre Algèbre :

- **Déclare Fonction** nom : ... ; valeur : ... permet de définir une fonction.
- **cHoix Substitue** expression : #... ; valeur : ... permet de remplacer dans l'expression choisie une lettre par une autre ou par un nombre (en effectuant le remplacement dans la ligne d'édition).

REMARQUE :

Pour la question 4), différentes valeurs de a sont réparties, chaque élève ou groupe d'élèves faisant le test pour un ou deux nombres allant de $-2{,}2$ à $+1{,}2$ par pas de 0,2. On fait la mise en commun des résultats avant de passer à la question 5).

COURS :

- Notion intuitive de tangente à une courbe au point A : c'est la droite passant par A qui est « la plus proche » de la courbe autour du point A. C'est aussi la position limite d'une sécante (AB) lorsque B tend vers A.

- Lorsque f est dérivable en a, sa courbe admet au point d'abscisse a une tangente de coefficient directeur f'(a) et d'équation $y = f'(a)\ (x - a) + f(a)$.

- (AB) ayant comme coefficient directeur $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, la notion de position limite de la sécante se traduit intuitivement par $f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Nous dirons que si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite réelle lorsque x tend vers a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Nous admettrons que cette définition permet de justifier tous les calculs de dérivées que nous avons faits jusqu'ici.

(On se contente d'une approche très simple de la notion de limite : une fonction usuelle définie en a admet f(a) comme limite en a ; lorsque deux fonctions sont identiques sauf en a où l'une des deux est définie et l'autre pas, elles ont la même limite en a).

- Pour vérifier, calcul de quelques nombres dérivés (fonction carrée, inverse...) avec les deux méthodes (fonction dérivée et calcul de limite après simplification de $f(x) - f(a)$ par $x - a$).

- Lien entre extremum et dérivée.

EXERCICES SANS DERIVE :

- Etudes et représentations graphiques de fonctions avec construction de tangentes (avec et sans calcul de leur équation).

- Recherche de tangentes ayant certaines propriétés.

- Recherche de fonctions avec contraintes sur f et sur f'.

DERIVEES ACTIVITE 5

On rappelle que si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite réelle lorsque x tend vers a, alors f est dérivable en a et $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

1) On choisit $f(x)=\sqrt{x}$.
a) Avec le logiciel *DERIVE* :
- Définir l'expression $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- Simplifier cette expression.
- Calculer $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
b) Conclure :
- Pour quelles valeurs de a l'expression $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a-t-elle une limite réelle ?
- Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est-elle dérivable ?
- Quelle est l'expression de $f'(x)$?
c) Vérifier avec *DERIVE* :
- Calculer $f'(x)$ en dérivant directement f.

2) Mêmes questions avec $f(x)=\sin(x)$.

3) Mêmes questions avec $f(x)=\cos(x)$.

4) Mêmes questions avec $f(x)=\tan(x)$.

5)a) Avec *DERIVE*, déterminer les dérivées des fonctions suivantes :
$f(x)=\sqrt{5x-3}$; $g(x)=\cos(4x+\frac{\pi}{3})$; $h(x)=(-3x+7)^5$.
b) Faire une conjecture sur les dérivées des fonctions :
$f(x)=\sqrt{\alpha x+\beta}$; $g(x)=\cos(\alpha x+\beta)$; $h(x)=(\alpha x+\beta)^n$ où α et β sont des constantes réelles et n un entier.

Quelques fonctions de DERIVE qui pourront vous servir :

- $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ s'écrit LIM(u, x, a).
- $u'(x)$ s'écrit DIF(u, x).

COURS :
- Compléments sur les calculs de dérivées : tableau des dérivées de $\sqrt{x}$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$.
- Dérivée de $x \alpha f(ax+b)$.
- Propriétés des fonctions circulaires ; équations sin x = a et cos x = a.

EXERCICES :
- Etudes de fonctions non rationnelles, en particulier trigonométriques.
- Problèmes conduisant à l'étude de fonctions trigonométriques.

Applications des dérivées - TP1

1)a) On donne $f_a(x) = x^4 + ax^3 - 5x^2 + 3x + 10$.

A l'aide des options **cHoix Substitue** expression : #1, valeur x, valeur (...) du logiciel *DERIVE*, donner différentes valeurs à a et tracer les représentations graphiques des fonctions f correspondantes. (Choisir une Echelle graphique convenable)

Donner deux types de tableaux de variations observés. Donner les tableaux de signes des fonctions dérivées associées.

b) Toujours à l'aide de *DERIVE*, trouver deux fonctions polynômes de degré 4 ayant un autre type de tableau de variation que ceux observés au a).

Le but de la suite du TP est de trouver tous les types de tableaux de variations et de courbes possibles pour les fonctions polynômes de degré 4.

2) On donne $f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 7x - 11$. Peut-on déterminer *f (x)* ?

3)a) Voici le tableau de **signes** d'une fonction polynôme de degré 3 :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
P (x)	+		0	$-$	0	+	0	$-$	

Donner un exemple de fonction P - avec x_1, x_2, x_3.entiers - correspondant à ce tableau de signes.

b) Donner toutes les autres formes de tableaux de signes possibles pour les fonctions polynômes de degré 3 et donner un exemple de fonction correspondant à chaque tableau.

4) En déduire toutes les formes de tableaux de **variations** possibles pour les fonctions polynômes de degré 4.

Pour chaque type de tableau de variation, donner un exemple de fonction correspondante et l'allure de la courbe représentative de la fonction.

Applications des dérivées - TP2

A - Compléments de la fiche «DERIVE 1 »

On donne $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 + 4x - 1$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) *On rappelle que tout polynôme non constant se factorise dans l'ensemble* IR *des nombres réels en un produit de polynômes de degrés 1 ou 2.*

a) A l'aide du logiciel *DERIVE*, résoudre l'équation $f'(x) = 0$ (... patience !) puis chercher des valeurs approchées des solutions obtenues.

b) Expliquer pourquoi une factorisation de $f'(x)$ dans l'ensemble IR ne peut pas contenir de polynôme de degré 1.

c) En déduire la nature de la factorisation maximale de $f'(x)$ dans IR.

d) Expliquer pourquoi $f'(x)$ a un signe constant pour tout x appartenant à IR. Quel est ce signe ?

3) Donner le tableau de variations de f.

Prouver que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans IR. Donner une valeur approchée de cette solution à l'aide de *DERIVE*.

B - Compléments du TP1

1) On donne $f_{-3}(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 10$.

Etudier la fonction f_{-3} et établir son tableau de variations.

Construire soigneusement, sur papier, sa courbe C_{-3} (voir note [1]), ainsi que ses tangentes horizontales, dans un repère où 2 cm représentent 1 unité sur l'axe des abscisses et 10 unités sur l'axe des ordonnées. (Prévoir des graduations de −5 à +5 sur l'axe des abscisses et de −50 à +30 sur l'axe des ordonnées).

2) On donne $f_2(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x + 10$.

Etudier la fonction f_2 et établir son tableau de variations. (On pourra se servir du logiciel *DERIVE* pour factoriser la dérivée f_2').

Construire sa courbe C_2 sur la même figure que C_{-3}. Marquer les points de C_2 correspondant à un maximum ou à un minimum de f_2.

3) On donne $f_3(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x + 10$.

Calculer $f_3'(x)$. Avec l'aide du logiciel *DERIVE*, déterminer les racines de $f_3'(x)$ puis justifier que $f_3'(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$ où le trinôme $(ax^2 + bx + c)$ n'a pas de racine réelle.

En déduire le tableau de variations de f_3 (en utilisant x_0). Donner une valeur approchée de x_0 et de $f_3(x_0)$. (Utiliser *DERIVE* et penser à **cHoix Substitue**...).

Construire la courbe C_3 avec sa tangente horizontale sur la même figure que C_{-3} et C_2.

---

[1] Pour calculer des coordonnées de points de la courbe, programmer la calculatrice ou taper l'expression **Auteur** de DERIVE : **VECTOR ([x , *f*(x)] , x , a , b , pas)** où a et b désignent les bornes de l'intervalle de calcul et bien sûr « pas » la distance entre deux valeurs de x.
La commande approX... donne des valeurs approchées des couples [x , *f*(x)] . Si on demande moins de 12 valeurs à la fois, l'affichage se fait en tableau vertical, plus clair que l'affichage en ligne.

TANGENTE A UNE COURBE ET DÉRIVATION

1ere S

4 activités. Durée : 10 heures
(cet article a fait l'objet d'un article dans la revue Repères – Irem n°24)

INTRODUCTION - COMMENTAIRES

La classe de Première S concernée, disposait en plus de son horaire normal de mathématiques, de deux heures par quinzaine d'atelier informatique centré sur la résolution de problèmes avec l'aide d'un logiciel de calcul formel. Les activités proposées durant ces séances étaient un complément du cours de mathématiques, soit pour introduire une notion, soit pour la mettre en œuvre.

La dérivation apparaît comme le point central du cours d'analyse en Première S. Trop souvent, les élèves n'en retiennent que l'aspect utilitaire lors de l'étude du sens de variations des fonctions, oubliant ainsi l'aspect local de cette notion qui en est l'essence même.
Aborder la dérivation par le problème de la recherche de la tangente à une courbe prépare l'élève à l'étude locale des fonctions et des courbes, permettant ultérieurement une meilleure compréhension de résultats plus fins tels les développements limités, les fonctions implicites... . Aborder ce problème et, qui plus est, le faire aborder par les élèves rencontre un certain nombre de difficultés.
L'expression $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ comprend deux paramètres et une fonction, ce qui est beaucoup pour des élèves qui ont encore besoin de clarification quant aux notions de variables, de constantes et de fonctions. En général, les meilleurs d'entre eux arrivent à simplifier ce genre d'expressions, à passer à la limite, mais l'aspect technique et calculatoire reste dominant pour ces bons élèves et insurmontable pour les autres.
Il est aussi nécessaire pour permettre un apprentissage de l'analyse de mettre en place des activités autour des notions de variable et de fonctions.

L'idée de tangente évoque principalement pour un élève arrivant en Première S, celle de la tangente au cercle. Il en découle naturellement que *la tangente à une courbe est une droite coupant la courbe en un point unique*. Partant de cette définition inexacte, la démarche va consister à faire évoluer cette première approche vers une définition plus rigoureuse nécessitant des outils mathématiques nouveaux : la limite en un point et surtout la dérivée.
Les élèves découvriront ainsi l'importance d'une définition rigoureuse et précise pour tout objet mathématique (et aussi qu'il est indispensable de la connaître, donc de l'apprendre !).
Cette démarche d'apprentissage, étalée d'octobre à mars, est articulée autour de quatre séquences liées directement aux contenus du cours de mathématiques.

ORGANISATION DES SÉQUENCES

Pour chaque séquence, les binômes d'élèves disposent d'une ou deux séances de deux heures. Ils travaillent le plus souvent en autonomie. Au début, lorsque cela se révèle nécessaire, l'enseignant leur précise les fonctions du logiciel qu'ils n'ont pas encore utilisées. Ils ont obligation de produire une trace écrite qui sera corrigée. La synthèse de chaque séquence se fait soit en cours, soit à la fin de l'activité. Les énoncés sont volontairement rédigés comme des problèmes ou exercices de mathématiques de manière très brève avec un minimum de questions intermédiaires. En effet, l'objectif essentiel n'est pas d'apprendre toutes les subtilités d'un logiciel, mais bien d'utiliser celui-ci pour résoudre un problème de mathématiques et non une longue succession de questions permettant à un élève n'ayant rien compris d'arriver « au bout » de l'exercice (ce qui est tout à fait possible avec l'aide d'un logiciel). Les questions peuvent être posées de manière très générale, mais l'activité commence par l'étude d'un exemple précis pour fixer les idées de manière concrète.
Les élèves sont amenés à calculer de nombreuses équations de droites. C'est pourquoi, ils ont élaboré un fichier dans *Derive,* de géométrie analytique leur permettant d'obtenir rapidement les résultats (équation d'une droite passant par deux points donnés, dont on connaît le coefficient directeur et un point, perpendiculaire à une droite donnée...).

FICHES ACTIVITÉS

TANGENTES A UNE PARABOLE - ACTIVITE 1
3 HEURES

En cours, les élèves viennent de terminer l'étude du second degré.
Cette séquence permet d'utiliser les nouveaux acquis des élèves sur le second degré, de faire la liaison entre le graphique et le calcul algébrique. La première partie traite d'un exemple de recherche d'intersection d'une famille de droites passant par un point de la parabole. Dans la suite intervient le mot tangente. Ce mot n'a pas encore été défini. Ceci permettra de faire émerger les représentations préalables des élèves par rapport à cette notion. Il en découle une définition de la tangente, limitée au cas des paraboles d'équation : $y=ax^2+bx+c$.

Texte donné aux élèves

1. P est la parabole d'équation $y = x^2$. A est le point de P d'abscisse 3. D_a est une droite d'équation $y = a\,x + b$, passant par A.
   1) Quelle relation relie a et b ?
   2) Déterminer les coordonnées de l'intersection de D_a et de P.
   3) Faire tracer P, D_1, D_{-2}, D_5.
   4) Pour quelle valeur de a, D_a ne coupe-t-elle P qu'en un seul point ?
   5) Faire alors tracer D_a.

2. Reprendre la même question avec le point B de coordonnées (-1,1).

3. Considérons alors le point M de P de coordonnées (α,α^2) déterminer en fonction de α l'équation de la tangente à P au point M. Quel est son coefficient directeur?.

4. Déterminer le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse α de la parabole d'équation $y=2x^2+5x-1$

ETUDE LOCALE DES FONCTIONS,
TANGENTE A UNE COURBE.
ACTIVITE 2
3 HEURES

Au niveau du cours, nous travaillons la notion de limite d'une fonction.
La première partie montre, d'abord, qu'il faut préciser les choses: certaines droites coupent la courbe en un point unique sans être tangente et certaines tangentes coupent la courbe en deux points notamment pour le troisième degré.
La suite de l'activité induit l'idée de faire varier la sécante. La tangente n'est toujours pas définie. C'est le débat avec les élèves lorsqu'ils vont aborder cette question qui permettra de donner la définition liée à la « droite limite ».
La deuxième partie permettra d'étudier divers exemples et surtout d'élaborer une méthode.

Texte donné aux élèves :

Première partie

1. On considère la fonction f définie sur 3 par: $f(x)=x^3$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit A le point de coordonnées (1 ; 1), D une droite d'équation $y=ax+b$.
   1) Déterminer une condition sur a et b pour que A soit sur D.
   2) Déterminer l'intersection de C et de D. Pour quelles valeurs de a est-elle réduite à A ?
   3) On considère le point de C d'abscisse 1,001, noté $M_{1,001}$.
      -Déterminer l'équation affine de la droite $(AM_{1,001})$
      - Tracer C et cette droite en utilisant diverses échelles.
   4) Reprendre la question 3 avec le point M_{1+h}.
   Quelle est l'équation de la tangente à C passant par A.

2. Reprendre la question précédente pour un point A de coordonnées (t,t^3).

Deuxième Partie

1. En vous inspirant de la première partie, déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse t, à la courbe représentative des fonctions suivantes:

$$\text{a) } f(x)=x^4 \quad \text{b) } g(x)=\frac{1}{x+1} \quad \text{c) } h(x)=\sqrt{1+x}\,.$$

2. Décrire avec précision, la démarche permettant de déterminer l'équation d'une tangente au point d'abscisse t, à la courbe représentative d'une fonction f.
Est-ce toujours possible ?

DERIVEE D'UN POLYNOME - ACTIVITE 3
2 HEURES

La notion de nombre dérivé a été vue en cours. L'objectif de la séquence est de faire le lien entre un calcul purement formel (à une fonction f, j'associe une fonction f'), l'activité précédente et le cours qui vient d'être fait ; cela permettra de passer alors du *nombre dérivé* à la *fonction dérivée*. Ainsi le lien entre la question 1 et 2 est essentiel. Tout est dans la synthèse, car sinon la question 1 est vide de sens.
La question 3 n'est qu'un essai, permettant de vérifier si une telle conjecture est possible pour mes élèves.

Texte donné aux élèves

1. En utilisant la commande de dérivation du logiciel, déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes (pour une fonction f, on note sa fonction dérivée f') :
$f(x)=x^2+3x-1$ $g(x)= x^3+7x^2+6x-5$ $h(x)=x^5-6x^3+7x^2-5x+2$.
A partir des résultats obtenus grâce au logiciel, déterminer sans l'aide du logiciel, les dérivées des fonctions suivantes:
$l(x)= 5x^2+6x-1$ $m(x)= x^4-x^3$ $p(x)= 2x^3-3x^2+3x-2$
Vérifier vos résultats à l'aide du logiciel.
Enoncer la règle de dérivation de la fonction q définie par $q(x)=x^n$, où n est un entier naturel non nul.

2. En reprenant les résultats de la séquence 2, déterminer pour chaque fonction ci-dessus le coefficient de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse t.
Conclure.

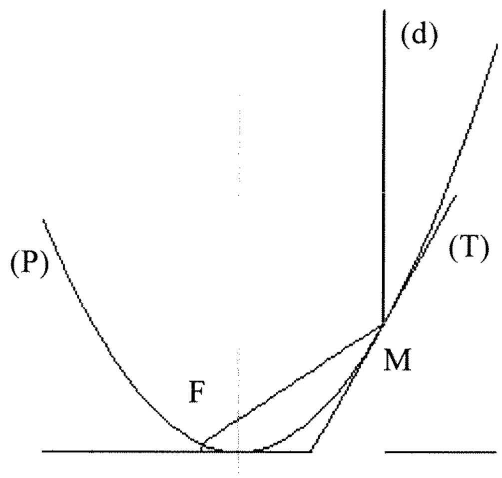
3. En faisant tracer la fonction et sa dérivée, quel lien semble-t-il y avoir entre la fonction et sa dérivée ?

ETUDE DE LA PARABOLE - ACTIVITE 4
2 HEURES

Cette étude de la parabole est une activité de synthèse nécessitant un réinvestissement des acquis par rapport au cours de mathématiques et par rapport à la pratique du logiciel. Elle illustre bien l'idée d'étude locale, car dans la recherche d'applications concrètes à ce résultat intervient le fait que l'on confonde localement la parabole et sa tangente. Il est important de donner aux élèves ce type d'activités où ils ont à reprendre les idées et les techniques acquises précédemment.

Aucune indication quant aux choix méthodologiques n'est donnée.

Texte donné aux élèves



On considère la parabole (P) d'équation y = x². M est le point de (P) d'abscisse t.
La tangente à (P) en M forme un angle α avec l'axe des abscisses.
(d) est la droite d'équation $x = t$. On considère la droite passant par M formant avec (T) un angle égal à celui formé par (T) et (d). Cette droite coupe pour t non nul l'axe des ordonnées en F.

1) Déterminer en fonction de α l'angle formé par (MF) et l'axe des abscisses.
2) Déterminer en fonction de t l'équation de la droite (MF).
3) Calculer les coordonnées de F. Que remarquez-vous ?
4) Enoncer le résultat sous forme de théorème. Trouver des applications concrètes de ce théorème.

SUITES NUMÉRIQUES

TERM S
ou 1ère S

1 TP Durée : ~ 2 heures

INTRODUCTION - COMMENTAIRES

Document pour le professeur

Toutes les suites choisies du type $u_n = f(n)$. Elles peuvent être étudiées au cours de l'année de terminale, à différents moments et tous les résultats peuvent être démontrés rigoureusement sauf peut-être pour la suite t_n définie p.32. Il faudra bien sûr donner aux élèves toutes les indications nécessaires.

Les objectifs pédagogiques

1) Obtention rapide d'un grand nombre de termes pour faire des conjectures.
L'ordinateur fonctionne ici simplement comme une calculatrice très puissante.
L'intérêt d'utiliser un logiciel de calcul formel est mis en évidence dans les objectifs 2), 3), 4).

2) Calcul de termes de la forme u_{n+1}, u_{2n} , ...
La commande CHOIX-SUBSTITUE permet de bien voir qu'on remplace n par n+1 puis par 2n dans l'expression u(n) et l'ambition est de limiter les erreurs classiques de confusion entre u_{n+1} et u_n+1. L'observation montre, dans la classe où cette activité a été expérimentée, qu'il y a eu moins d'erreurs de ce type même sur les calculs ultérieurs faits à la main.

3) Etude du sens de variation : choix de la méthode la plus performante
Les élèves, surtout les plus faibles, ont tendance à ne retenir qu'une seule méthode. Ici, ils ont le choix, et peuvent effectuer à la machine différents calculs tels que $u_{n+1} - u_n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, dérivée de f.
Ils choisissent ensuite la meilleure méthode sur chaque exemple et voient bien que certaines méthodes conduisent à des résultats inextricables. Le calcul à la main ne permet pas d'examiner aussi vite toutes les possibilités.

4) Travail sur les indices
Les commandes VECTEUR et SOMME permettent de faire travailler sur la notion d'indices variant de 1 à n.

On peut constater là aussi une aide à la compréhension de l'écriture $\sum_{1}^{n} f(k)$

Les inattendus de l'informatique

(qui donnent souvent lieu à des débats passionnants)

cas de la suite $u(n) = (-1)^n \times n$

Calcul de u(n+l) : La version utilisée de *DERIVE* propose pour ce calcul

$u(n+1) = -(n+1)\cos(n\pi) - i\sin(n\pi)$

(au moment où a eu lieu l'expérimentation , cette remarque ne sera peut-être plus valable dans les nouvelles versions de *DERIVE*)

Calcul de la dérivée

DERIVE propose $\cos(n\pi) - n\pi\sin(n\pi) + i(n\pi\cos(n\pi) + \sin(n\pi))$.

Dans une classe de terminale qui a traité les nombres complexes, on peut essayer d'expliquer les résultats à partir de $(-1)^n = (\cos\pi + i\sin\pi)^n$ et discuter des prolongements de la dérivation aux fonctions complexes. C'est aussi l'occasion de faire remarquer les limites du logiciel (incapacité à déclarer n comme un entier) et de montrer que dans ce cas il est peut-être plus rapide d'étudier cette suite à la main...

FICHES ACTIVITÉS

1.Ce qu'il faut savoir pour aborder ce document

Définir une suite (u_n), c'est associer à chaque entier naturel n, un nombre réel et un seul. Une suite est donc une fonction dont l'ensemble de définition est l'ensemble N des entiers naturels (ou N privé de quelques naturels). Le nombre u_n est appelé terme d'indice n de la suite (u_n).

L'habitude veut que l'on note les termes d'une suite avec des indices, mais on pourrait garder la notation des fonctions et appeler le terme général u(n) et c'est cette notation qu'on emploiera pour déclarer les suites à la machine.

Voici deux exemples:

* La suite (u_n) est définie par $u_n = 0{,}5n^2-1$ pour tout n entier naturel
Calculer les 6 premiers termes de cette suite. Représenter ces termes sur un graphique.
* La suite (v_n) est définie par $v_n = \sqrt{n-4}$. Pour quelles valeurs de n cette suite est-elle définie ? Calculer les 6 premiers termes de cette suite. Représenter ces termes sur un graphique.

Quelles sont les questions classiques à propos des suites ?

* Savoir calculer les premiers termes u_0, u_1, u_2 ...
* Savoir calculer des termes du type u_{n+1}, u_{2n}, u_{2n-1}
* Savoir si la suite est croissante ou décroissante (certaines suites ne sont ni croissantes ni décroissantes). Quelle définition donnez-vous d'une suite croissante ? Quelles méthodes proposez-vous pour démontrer qu'une suite est croissante ?
* Savoir si la suite admet une limite finie quand n tend vers l'infini (on dit dans ce cas que la suite est convergente, si la suite n'admet pas de limite quand n tend vers l'infini ou si cette limite est infinie, on dit alors que la suite est divergente).

Le logiciel *DERIVE* va nous permettre de gagner du temps pour calculer un grand nombre de termes, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite dans des cas difficiles.
Attention cela ne nous dispensera pas de faire les démonstrations !

2.Etudes d'exemples de suites dont le terme général est fonction de n

Pour chacune des suites de ce paragraphe répondre aux questions suivantes :
- Calculer les huit premiers termes.
- Calculer le terme d'indice n + 1.
- Calculer $u_{n+1} - u_n$.
- Calculer le terme d'indice 2n.
- Faire une conjecture sur le sens de variation.
- Infirmer ou confirmer la conjecture en demandant éventuellement certains calculs à la machine.
- Etudier les limites à l'aide de théorèmes que vous connaissez (pour les questions de a) à h)).

a) $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ b) $u_n = (-1)^n \times n$ c) $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

d) $u_n = \dfrac{n^6}{n!}$ e) $u_n = (0{,}8)^n$ f) $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$

On note n! le nombre n $\times$ (n – 1) $\times$ (n – 2)......... $\times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

g) $u_n = n^2 \times \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ h) $u_n = n \times \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

i) $s(n) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{n}$ j) $t(n) = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$

Attention s(n) et t(n) sont définis comme des sommes.

Fiche informatique

Pour déclarer une fonction ou une suite
AUTEUR
$u(n) := \frac{1}{2}n^2 - 1$
$v(n) := \sqrt{n-4}$
Pour calculer le terme de rang 10 par exemple
AUTEUR u(10) SIMPLIFIE

Pour calculer les termes successifs d'une suite de terme général u(n), déclarer un vecteur
AUTEUR A(n):= VECTEUR(u(k), k, n).

Si on veut maintenant avoir les termes u(l), u(2),........u(10), effectuer :
AUTEUR A(10) SIMPLIFIE

Remarques :
1) Les commandes OPTIONS PRECISION permettent de choisir entre
EXACT qui donne la valeur exacte
et APPROXIMATION qui donne une valeur approchée.

2) VECTEUR(u(k), k, 4, n) permet d'obtenir [u(4), u(5), …., u(n)]

Pour calculer u(n+l)
On peut utiliser deux méthodes
* AUTEUR u(n+l) SIMPLIFIE
on obtient directement le résultat
* CHOIX SUBSTITUE remplacer n par n+l.
avec cette deuxième méthode on contrôle mieux ce que l'on fait.

Pour calculer une limite
CALCUL LIMITE
suivre les instructions (+ ∞ se note + inf)
Pour calculer la dérivée
CALCUL DERIVE
suivre les instructions
Pour avoir la somme $s(n) := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$

S(n):=SOMME($\frac{1}{k}$, k, 1, n) puis donner des valeurs à n.

SUITES RÉCURRENTES

TERM S

1 TP durée : ~ 2 heures

INTRODUCTION - COMMENTAIRES

Ce document a été expérimenté ainsi :
Les élèves disposaient d'une séance de 2 heures par groupe pour recueillir les informations demandées dans les parties « Avec le logiciel *DERIVE* » et éventuellement faire d'autres calculs. Ils ont ensuite rédigé un compte rendu, puis les démonstrations sous forme de devoirs à la maison.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Savoir calculer les premiers termes d'une suite définie par une relation de récurrence.
Conjecturer l'éventuelle convergence de la suite.
Etude générale des suites de la forme $t_{n+1} = a\ t_n + b$.

Commentaires

Dans la partie A, les élèves ont constaté qu'à partir d'une fonction croissante, on peut obtenir une suite croissante ou une suite décroissante. Une partie d'entre eux (environ un groupe sur 4) s'est posé la question du rôle du premier terme. Ils ont dans ce cas conclu assez vite que le premier terme n'avait pas d'importance. Deux élèves ont fait des essais avec d'autres premiers termes.
On peut bien sûr introduire d'autres exemples avec une fonction décroissante et une suite non monotone.

Dans la partie B, les élèves utilisent assez facilement *DERIVE* pour trouver la forme générale du terme de ces suites un peu particulières.

Dans la partie C les élèves s'interrogent sur l'existence d'une limite. Ils concluent assez vite « qu'il y a deux limites », une pour les termes de rang pair et l'autre pour les termes de rang impair. Aucun élève ne pense à examiner les points fixes de *fof*.
Il faut donc l'intervention du professeur pour guider les étapes. Le logiciel permet de trouver facilement les solutions exactes de *fof*(x) = x alors que la factorisation "papier crayon" n'est pas simple puis de comparer les points fixes de *fof* avec ceux de *f*. On peut trouver des idées pour compléter ce travail dans Les Maths en Pratique , Irem de Strasbourg (1990) chez Bordas.

Dans la partie D le logiciel joue très bien son rôle d'aide à la conjecture.
Les élèves ont des difficultés à deviner la forme générale du terme sur les exemples, ils se prennent facilement au jeu et proposent des solutions variées parfois erronées puis finissent par trouver la solution générale $t_n = a^n c + b(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a^2 + a + 1)$.

FICHES ACTIVITÉS

consignes:
Cet exercice a été donné sous forme de devoir à la maison. Dans les parties intitulées **Avec le logiciel *DERIVE*** vous devez écrire un compte rendu précis de ce que vous avez observé, les conjectures que vous êtes amené à faire et des calculs supplémentaires que vous effectuez avec *Derive*.
Dans les parties intitulées **Démonstrations mathématiques** vous démontrez rigoureusement ce qui est demandé.

Etude des suites de la forme $u_0 = c$ (valeur du premier terme)
$u_{n+1} = f(u_n)$
Renseignements informatiques : aller lire dans la fiche informatique la rubrique ITERE ou ITERATION.

Partie A :

Avec le logiciel *DERIVE*

1) Déclarer $f(x) := \sqrt{(x+3)}$

2) Résoudre l'équation $f(x) = x$

3) On considère la suite (u_n)définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec comme premier terme $u_0 = -2$.

Calculer une valeur exacte et(ou) une valeur approchée du terme u_n pour n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 50, 100 dans chacun des cas suivants.

Faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) et sur la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$

4) Reprendre la question 3) avec la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec comme valeur du premier terme $u_0=5$

Démonstrations mathématiques

5) Représenter dans un repère bien choisi la fonction f et la droite d'équation y = x puis représenter les différents termes de la suite définie en 3) en mettant en évidence la convergence vers une valeur finie.

Refaire un dessin avec la fonction f et la suite définie en 4).

6) Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec comme premier terme $u_0 = -2$ est strictement croissante.

7) Que peut-on dire du sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec comme valeur du premier terme $u_0 = 5$? Démontrer le résultat trouvé.

8) En trouvant vous-même toutes les étapes de la démonstration utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec comme premier terme $u_0 = -2$ admet comme limite le nombre α solution de l'équation $f(x) = x$.

9)La démonstration faite en 8) est-elle valable pour la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec comme valeur du premier terme $u_0 = 5$?

Partie B:

Avec le logiciel *DERIVE*:

1) Déclarer $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

2) 0n définit la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_0 = 2$. Calculer les 10 premiers termes de la suite.

Recommencer avec la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_0 = \dfrac{-1}{3}$.

Le résultat trouvé est-il valable quel que soit le premier terme de la suite ? Comment utiliser *DERIVE* pour le vérifier ?

Démonstrations mathématiques

Que peut-on dire de la suite (v_n) définie par $v_{n+1}=f(v_n)$et $v_0 = c$? Enoncer un résultat général et le démontrer.

Partie C

Avec le logiciel *DERIVE*

1) Déclarer $f(x):= 1 - 0,8\ x^2$

2) Résoudre l'équation $f(x) = x$

3) On considère la suite (w_n)définie par $w_{n+1} = f(w_n)$ avec comme premier terme $w_0= 0$

Calculer une valeur exacte et(ou) une valeur approchée du terme w_n pour n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 50, 51, 100 dans chacun des cas suivants.

Faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (w_n) et sur la limite de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$

4) Essayer d'expliquer ce qui se passe. Une idée : résoudre l'équation $fof(x) = x$.

Partie D

On veut faire l'étude générale des suites récurrentes de la forme $t_{n+1} = f(t_n)$ avec comme premier terme $t_0= c$ et $f(t) = a\ t + b$.

Avec le logiciel *DERIVE*

1) Etudier les exemples suivants en faisant une conjecture sur la forme du terme général t, en fonction de n et c.

$f(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$ avec $t_0= 1$ puis $t_0= 5$ puis $t_0= c$

$f(x)=x - 3$ avec $t_0=1$ puis $t_0= c$

$f(x)= 3x+1$ avec $t_0=-0,5$ puis $t_0= c$

2) Soit (t_n) la suite définie par $t_{n+1} = a\ t_n+b$ et $t_0= c$

Peut-on conjecturer la forme générale du terme t_n en fonction de c, a, b, n et la limite de la suite ? (Distinguer plusieurs cas)

Démonstrations mathématiques

a) Démontrer que $\dfrac{a^n - 1}{a-1} = a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a^2 + a + 1$

b) Démontrer rigoureusement les propriétés trouvées en 3). On pourra utiliser le a) pour écrire la forme générale du terme t_n.

Fiche informatique

Pour définir une suite récurrente (u_n) de premier terme w et de terme général $u_{n+1} = f(u_n)$:

AUTEUR f(x):= laisser en blanc

Déclarer le terme de rang n par

AUTEUR U(w, n):= ITERE(f(x), x, 1, n)

Si on veut les termes successifs de la suite (u_n) jusqu'au terme de rang n on déclarera

AUTEUR I(w, n):= ITERATION(f(x), x, 1, n)

Déclarer ensuite chaque fois la fonction f

AUTEUR U(10) donne le terme de rang 10

AUTEUR I(10) donne tous les termes I_1, I_2,.......I_{10}

INTÉGRALES

Term S

1 TP Durée : ~ 2 heures

INTRODUCTION - COMMENTAIRES

Il s'agit d'un T.P. d'introduction du chapitre « Intégrales » en Terminale S.
Il doit se situer après l'étude des théorèmes de convergence des suites et après l'étude des primitives, mais avant de commencer à parler d'intégrales.
En revanche, il faudrait commencer ce chapitre immédiatement après ce TP.
Il prend deux heures, mais on peut à la rigueur se contenter d'une heure avec les ordinateurs, en faisant auparavant les parties A et C qui ne nécessitent aucun matériel particulier.

Les parties A et C sont théoriques, elles consistent à établir des liens entre :

- les limites de deux suites (sommes de Riemann, ici définies comme sommes d'aires de rectangles),
- l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C représentant f
- les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, et les primitives de la fonction f.

L'étude est faite dans le cas d'une fonction continue, croissante et positive.
Ces parties sont un peu difficiles, il vaut mieux que le professeur les encadre.

Les parties B et D consistent à trouver des conjectures à l'aide de *DERIVE*, qui seront prouvées dans la partie C avec des hypothèses particulières.
La fin de la question **B.1.**, où l'on retrouve la fonction f de façon totalement inattendue pour les élèves, est très spectaculaire et justifie l'utilisation du logiciel. Elle marque les élèves.
Ces parties-là ne posent pas de problème théorique, mais l'utilisation de *DERIVE* n'est pas tout à fait évidente pour les élèves qui ne l'ont jamais vu. Cependant, l'aide du professeur se limite à du dépannage simple.

Le but recherché, et qui a semblé atteint lorsque nous avons testé cette activité, est que les élèves comprennent que la définition de l'intégrale dans le programme de terminale a été choisie pour obtenir facilement quelques résultats simples, mais que ce n'est pas la définition de Riemann et qu'elle ne montre pas pourquoi une intégrale vient d'une somme. Avec ce TP, ils semblent mieux voir ce lien et la suite du cours montre qu'ils y font référence.

N.B. : Comme il est difficile de distinguer f et F avec le logiciel, on utilise la notation ff pour désigner F.

Quelques précisions supplémentaires sur le contenu du TP

Partie A :
On prouve que si f est continue, croissante et positive sur [a, b] , alors $\mathcal{A} = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.
(Où $\mathcal{A}$ est l'aire sous la courbe, r_n l'aire des rectangles sous la courbe et s_n l'aire des rectangles par excès.)

Partie B :
Avec *DERIVE*, on observe que si $G(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x)$, il semble que $G'(x) = f(x)$.
De plus, $G(a) = 0$. Donc, dans les conditions du A), il semble que $\mathcal{A} = G(b)$, où G est la primitive de f qui s'annule en a.
Et comme, pour une autre primitive F, $F(x) = G(x) + k$, donc $F(a) = k$, on a $G(b) = F(b) - F(a)$.
On conjecture donc que $\mathcal{A} = F(b) - F(a)$.

Partie C :
Dans les conditions du A), on prouve que $A'(x) = f(x)$, donc que A est une primitive de f, plus exactement la primitive de f qui s'annule en a.
Cela prouve donc, toujours dans le cas où f est continue croissante positive, que

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= F(b) - F(a) \text{ (on le fait au C)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} s_n \text{ (prouvé au A).}\end{aligned}$$

Partie D :
On observe avec *DERIVE* que $\int_a^b f(x)\,dx$ donne $\mathcal{A}$.
On peut donc proposer, au moins dans le cas où f est continue croissante positive, les définitions équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \mathcal{A}\\ &= \lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} s_n\\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Ce qu'il faut savoir de DERIVE...

Les commandes et la syntaxe des fonctions nécessaires à ce TP sont données dans les questions où elles interviennent pour la première fois. Ce TP a été fait avec des élèves qui n'avaient jamais utilisé *DERIVE* auparavant, et cela a posé très peu de problèmes.
Il faut quand même noter que lorsqu'on a donné une nouvelle fonction f dans la partie D, il faut recopier les définitions de *r(n ,a ,x)* et *s(n ,a, x)* données au B.1. en dessous de la nouvelle définition de f pour que celle-ci soit prise en compte dans les calculs.
On pourra alors utiliser VECTEUR(*r(n*, valeur de *a*, valeur de *b)*, *n*, 1, 10) pour calculer $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$

FICHES ACTIVITÉS

INTÉGRALES

A. Soient a et b deux réels, b > a, et f une fonction continue, croissante et positive sur l'intervalle $[a,b]$. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal et $\mathcal{A}$ l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (en unités d'aire).

1. On découpe l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles égaux, d'extrémités $x_0 = a$, x_1, x_2, ... , $x_n = b$.
Calculer x_k en fonction de *a, b, n et k.*
Calculer les aires du rectangle R_k et celle du rectangle S_k définis par la figure, en fonction de *a, b, n, k et f.*

2. On note $r_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$ et $s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$
Que représentent ces deux nombres pour la figure ?
En déduire que $r_n \leq \mathcal{A} \leq s_n$.

3. Prouver que $s_n - r_n = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$. (Le plus simple est une interprétation graphique)
Prouver que les suites (r_n) et (s_n) convergent vers $\mathcal{A}$. (on pourra encadrer $\mathcal{A} - r_n$, puis $s_n - \mathcal{A}$ à l'aide de l'inégalité obtenue au 2.)

B. Choisir une fonction polynôme f.

1. Avec le logiciel *DERIVE* :

- Définir la fonction f choisie : ($f(x) :=$ ...)
- Définir $r(n,a,x) := \frac{x-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{x-a}{n})$ et $s(n,a,x) := \frac{x-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{x-a}{n})$;
  ($\sum_{k=0}^{n-1} f(\ldots)$ se note *SOMME*($f(\ldots)$, k, 0, n - 1))
- Définir $ff(x) := \lim_{n\to+\infty} r(n,a,x)$; ($\lim_{n\to+\infty} r(\ldots)$ se note *LIM*($r(\ldots)$, n , + inf))
- Calculer la dérivée de $ff(x)$; (Commandes Calcul, Dérive... puis Simplifie.)

2. Que vaut $ff(a)$? A l'aide des résultats observés au **1.**, énoncer une conjecture concernant la fonction $x \mapsto \lim_{n\to+\infty} r(n,a,x)$. Vérifier avec une autre fonction polynôme f.

3. Les notations et les conditions sont celles du **A.**
Soit F une primitive de f. En admettant que les résultats fournis au **1.** par *DERIVE* sont exacts, faire une conjecture sur l'écriture de $\mathcal{A}$ à l'aide de F.

C. Les notations et les conditions sont encore celles du **A.**
Pour tout $x \in [a,b]$, on note $A(x)$ l'aire de l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses et la courbe C et dont les abscisses sont comprises entre a et x.

1. A l'aide d'une interprétation graphique, prouver que si $h > 0$ et $h + x \in [a,b]$, alors $h \times f(x) \leq A(x+h) - A(x) \leq h \times f(x+h)$.

2. Etablir une inégalité du même type lorsque $h < 0$ et $h + x \in [a,b]$.

3. Prouver que A est dérivable en x et donner $A'(x)$.

4. En déduire que si F est une primitive de f, alors $\mathcal{A} = \lim_{n\to+\infty} r_n = F(b) - F(a)$.

5. En appliquant le résultat précédent à l'intervalle $[a, x]$, on trouve donc $A(x) = \lim_{n \to +\infty} r(n, a, x) = F(x) - F(a)$.

Dans quel cas cela prouve-t-il la conjecture du B2. ?

D. Choisir deux nombres a et b et une fonction polynôme f croissante et positive sur $[a,b]$. (Vérifier graphiquement à l'aide du logiciel). On reprend les notations du **A.**

1. A l'aide de *DERIVE* :

- Calculer $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ et $s_1, s_2, \ldots, s_{10}$.
- Calculer $\mathcal{A}$.
- Calculer « $INT(f(x), x, a, b)$ » et « $INT(f(t), t, a, b)$ ».

2. Déterminer une primitive F de f et calculer $F(b) - F(a)$.

E. Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b.

Proposer une définition pour le nombre noté $\int_a^b f(x)dx$.

Que représenterait alors la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$?

Une « copie » d'élève.

En devoir à la maison, le professeur a demandé de rédiger la solution du document - élève.
Ci-joint, le devoir rendu par l'un d'entre eux.

Sébastien

TS1
LEGT de Haguenau

Intégrales

A) 1) Calcul de x_n en fonction de a, b, n et k :

La largeur d'un des intervalles est $\dfrac{(b-a)}{n}$, donc on en déduit que : $\boxed{x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}}$

Calcul des aires des rectangles R_k et S_k en fonction de a, b, n, k et f :

La hauteur du rectangle R_k est $f(x_k)$, et la hauteur de S_k est $f(x_{k+1})$. Par conséquent :

$$\boxed{\begin{aligned} aR_k &= \frac{(b-a)}{n} f\left[a + \frac{(b-a)}{n}k\right] \\ aS_k &= \frac{(b-a)}{n} f\left[a + \frac{(b-a)}{n}(k+1)\right] \end{aligned}}$$

2) Signification des nombres r_n et s_n :

r_n est la somme des aires des rectangles situés sous $\mathscr{C}$, c'est-à-dire les rectangles R_k, quand on réduit $[a,b]$ en n intervalles. C'est ainsi que $\dfrac{b-a}{n}$ représente la largeur des rectangles, et que $\sum_{k=0}^{n-1} f\left[a + k\dfrac{(b-a)}{n}\right]$ représente la somme des longueurs des rectangles.

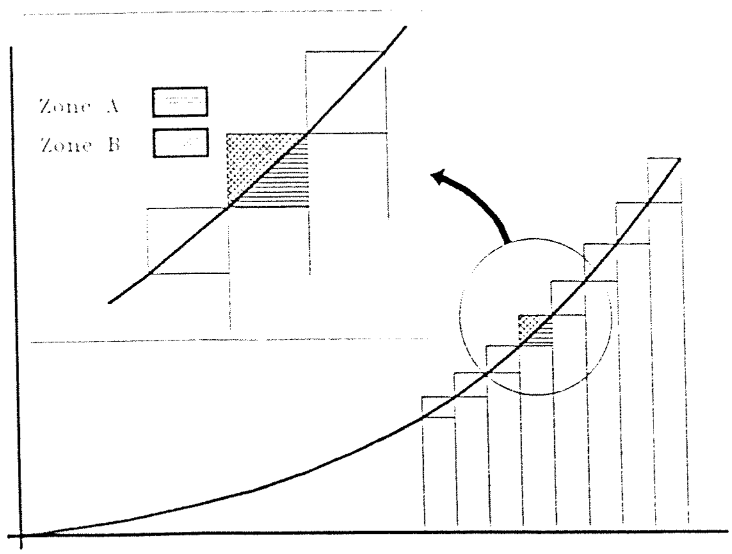
De même, s_n est la somme des aires des rectangles R_k quand $[a,b]$ est réduit à n intervalles.

L'aire des rectangles est inférieure à $\mathcal{A}$ car pour chaque rectangle il manque une certaine aire marquée sur la figure par la zone A de telle sorte qu'ils soient délimités par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = x_k$ et $x = x_{k-1}$, donc : $\boxed{r_n \leq \mathcal{A}}$

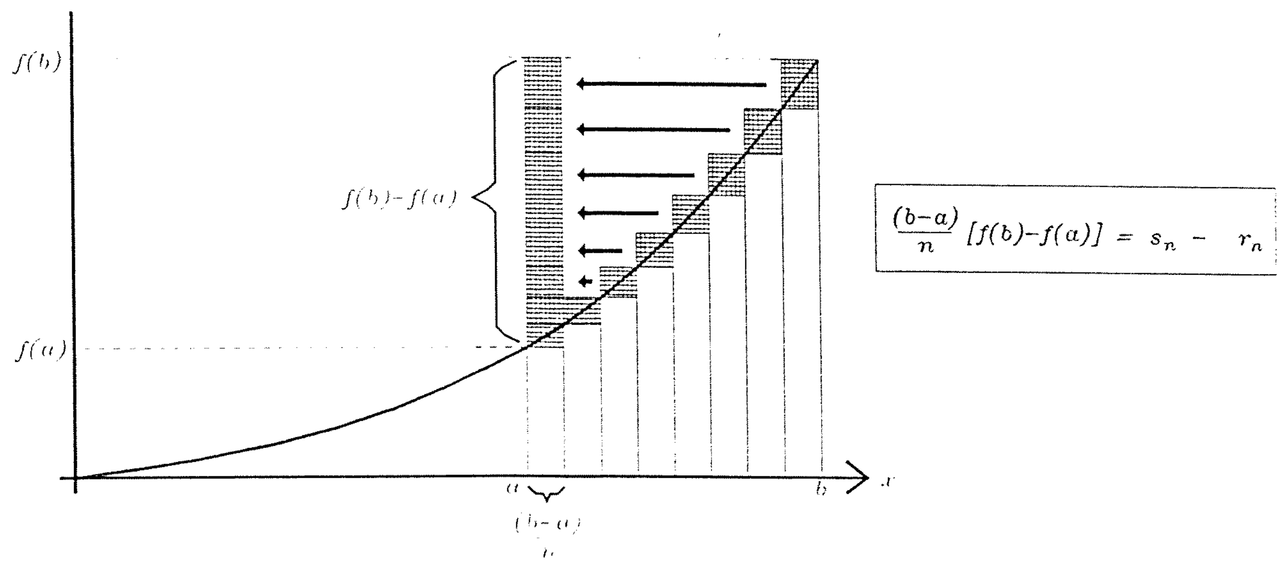
De même, l'aire des rectangles S_k est plus grande que l'aire située entre $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = x_k$ et $x = x_{k-1}$, puisqu'il y a (de nouveau) une aire marquée sur la figure par la zone B, mais qui cette fois-ci est en plus, donc : $\boxed{s_n \geq \mathcal{A}}$; d'où :

$$\boxed{r_n \leq \mathcal{A} \leq s_n}$$

Figure 1:



3) **Figure 2**:



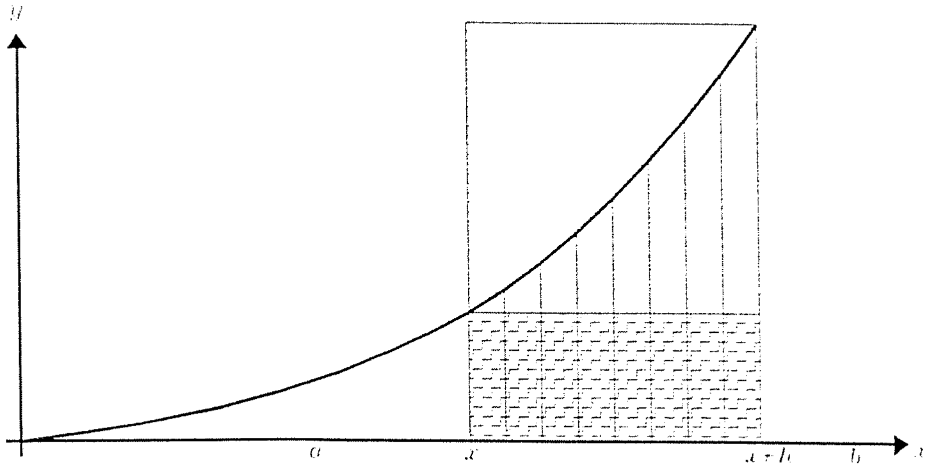
s_n - r_n est la somme des différences des aires entre chaque rectangle S_k et le rectangle R_k (aire en rouge hachuré sur la figure), donc $\dfrac{(b-a)}{n}\left[f(b)-f(a)\right]$ est l'aire d'un rectangle de la largeur $\dfrac{(b-a)}{n}$ et de longueur $f(b)$ - $f(a)$.

Montrons que les suites (r_n) et (s_n) convergent vers $\mathcal{A}$. On sait que : $r_n \le \mathcal{A} \le s_n$;
d'où $-\mathcal{A} \le -r_n$ et $0 \le s_n - \mathcal{A} \le s_n - r_n$ (car $s_n \ge \mathcal{A}$).
Or $s_n - r_n = \dfrac{(b-a)}{n}\left[f(b)-f(a)\right]$, et puisque a, b, $f(a)$ et $f(b)$ sont des constantes :
$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n - r_n = 0$. On en conclut d'après le théorème des Gendarmes que : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n - \mathcal{A} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \mathcal{A}$ et (s_n) converge vers $\mathcal{A}$.

$s_n \ge \mathcal{A}$ donc $0 \le \mathcal{A} - r_n \le s_n - r_n$ (car $r_n \le \mathcal{A}$). Or $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n - r_n = 0$, donc d'après le théorème des Gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A} - r_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \mathcal{A}$ et (r_n) converge vers $\mathcal{A}$.

B) 1) Avec le logiciel DERIVE©: [...]
2) On choisit le polynôme suivant: $f(x) = 3x^4 - 5x^3 - x^2 + 2x - 8$.
D'après le logiciel DERIVE©, $ff'(x) = f(x)$ et $ff(a) = 0$. Donc ff serait la primitive de f qui s'annule en a, donc que $x \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} r(n,a,x)$ est la primitive de f qui s'annule en a.
3) Si la conjecture précédente est exacte, ff et F sont deux primitives de f donc:
$ff(x) = F(x) + k$. Or, comme on a $ff(a) = 0$, $F(a) + k = 0$ et $k = -F(a)$ et $ff(x) = F(x) - F(a)$.
De plus, d'après le A), $\mathcal{A} = \lim\limits_{n\to+\infty} r(n,a,b)$ et il paraît que $\lim\limits_{n\to+\infty} r(n,a,b) = ff(b)$
Donc, si ff est bien la primitive de f qui s'annule en a, on a : $\underline{\mathcal{A} = F(b) - F(a)}$.

C) 1) Si $h > 0$ et $h + x \in [a,b]$, alors les points d'abscisse $h + x$ sont situés entre les points d'abscisses x et la droite d'équation $x = b$.
$h \times f(x)$ est l'aire en bleu sur la figure, et $h \times f(x + h)$ est l'aire en rouge sur la figure.



D'après la figure, il est évident que : $\boxed{h \times f(x) \leq A(x+h) - A(x) \leq h \times f(x+h)}$

$A(x + h)$ est l'aire de l'ensemble des points situés entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$, dont les abscisses sont inférieures à $x + h$.
$A(x)$ est l'aire de l'ensemble des points situés entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses, dont les abscisses sont comprises entre a et x. Donc $A(x + h) - A(x)$ est l'aire de l'ensemble des points situés entre l'axe des abscisses et $\mathcal{C}$, dont les abscisses sont comprises entre x et $x + h$.

2) Si $h < 0$, les points d'abscisses $x + h$ sont situés entre les points d'abscisse x et la droite d'équation $x = a$ (car $h + x \in [a,b]$). On écrit alors l'inégalité sous la forme:

$$\boxed{-h \times f(x+h) \leq A(x) - A(x+h) \leq -h \times f(x)}$$

3) D'après le 1) : $f(x) \leq \dfrac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq f(x+h)$ si $h > 0$.

D'après le 2) : $f(x+h) \leq \dfrac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq f(x)$ si $h < 0$.

Or $\dfrac{A(x+h)-A(x)}{h} = \dfrac{A(x+h)-A(x)}{(x+h)-x}$ est le taux d'accroissement de $h \mapsto A(h)$ en x. Donc quel que soit le signe de h, nous pouvons résumer les inégalités précédentes par "le taux d'accroissement est compris entre $f(x)$ et $f(x + h)$".

Or $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$, ce qui signifie par définition que A est dérivable en x, et que $A'(x) = f(x)$: A est donc une primitive de f d'où $F(x) = A(x) + k$.

4) En outre $A(a) = 0$ (par définition) donc $F(a) = k$. D'autre part, $F(b) = A(b) + k$ donc $A(b) = F(b) - k$. D'où $\mathcal{A} = A(b) = F(b) - k = F(b) - F(a)$.

Or nous avons vu au A) 3) que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \mathcal{A}$ d'où :

$$\boxed{\mathcal{A} = \lim_{n\to+\infty} r_n = F(b) - F(a)}$$

5) Par comparaison avec la définition de r_n donnée au A) 2),
$r(n,a,x) = \dfrac{x-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\dfrac{x-a}{n})$ est la somme des aires des n rectangles obtenus entre a et x, en réduisant $[a,x]$ en n intervalles égaux, et qui sont situés sous la courbe.
D'où :

pour tout $x\in[a,b]$, $\boxed{A(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} r(n,a,x)}$

Ceci confirme les résultats du B) 2) à savoir que la fonction définie sur $[a,b]$ par $x \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} r(n,a,x)$ est une primitive de f, donc ~~si $\forall x\in[a,b]$ et~~ si f est continue et positive sur et croissante $[a,b]$ ~~si $f(t)\geq 0$~~

D) On a choisi la fonction polynôme : **f (x) = $3x^5 - x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 3x - 16$** ; qui est positive, croissante et continue sur [2,3] (d'après DERIVE©, représentation graphique) donc:

$$\boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$$

$r_1 = 142$	$r_5 \approx 365$	$r_9 \approx 397$	$s_3 \approx 577$	$s_7 \approx 496$
$r_2 \approx 269$	$r_6 \approx 377$	$r_{10} \approx 401$	$s_4 \approx 540$	$s_8 \approx 488$
$r_3 \approx 320$	$r_7 \approx 386$	$s_1 \approx 911$	$s_5 \approx 519$	$s_9 \approx 483$
$r_4 \approx 348$	$r_8 \approx 392$	$s_2 \approx 635$	$s_6 \approx 505$	$s_{10} \approx 478$

D'après ces résultats, on observe que r est croissante et que s est décroissante.

$$\boxed{\mathcal{A} = \lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = 438.8}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = 438.8}$$

$$\boxed{F(b) - F(a) = 438.8}$$

De plus, comme nous l'avons vu dans C) 3) : $\boxed{A(x) = F(x) - F(0) = \int_0^x f(x)dx}$

INTRODUCTION AU CALCUL INTÉGRAL

TERM S

1 TP Durée : 2 heures

(cet article a fait l'objet d'un article dans la revue Repères – Irem n°31)

INTRODUCTION - COMMENTAIRES

La « définition » de l'intégrale dans les programmes de terminales scientifiques se borne à donner un procédé de calcul F(b)–F(a), qui pris ainsi est vide de sens. Il crée d'emblée la confusion entre les notions de primitives et d'intégrales. Il occulte ainsi un véritable problème mathématique lié aux problèmes de mesure au profit de recherches de primitives que déjà certaines calculatrices rendent obsolètes.
Certes, il n'est ni possible ni intéressant pour nos élèves de revenir à des définitions trop théoriques et « bourbachiques » qui elles aussi occulteraient par un excès de rigueur la compréhension d'une notion centrale en analyse.
La démarche proposée ici centrée sur l'idée intuitive d'aire se situe dans le cadre strict des programmes et utilise les possibilités du logiciel Derive.

Démarche:

1. Intégrale d'une fonction continue positive.

f étant une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, on va définir l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ par :

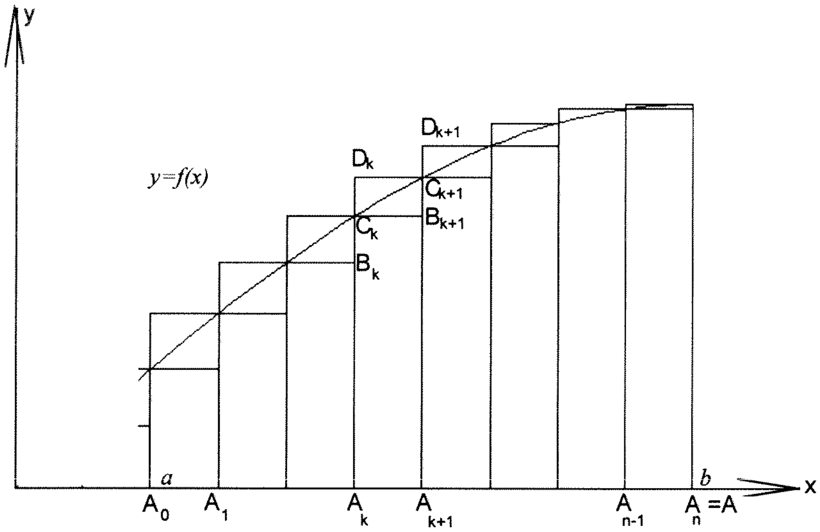
$$\mathrm{I}(f, x, a, b) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Rect}(f,a,b,n) \quad \text{où} \quad \mathrm{Rect}(f,a,b,n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

en mettant en évidence que Rect (f, a, b, n) définit une suite convergente vers l'aire délimitée par les courbes d'équation $x=a$, $x=b$, $y=0$ et $y=f(x)$.
Les activités proposées consisteront dans un premier temps à simplifier l'écriture de telles suites lorsque le logiciel en est capable, d'établir leur convergence et de calculer leur limite.
Dans un deuxième temps, on étudiera le cas de fonctions dont les sommes de Riemann ne se simplifient pas, en procédant à une étude numérique avec éventuellement une approximation de l'erreur.

2. Lien entre intégration et primitive.
La détermination de l'intégrale sur des intervalles de type $[a, x]$ permet de conjecturer le lien entre intégrale et primitive.

FICHES ACTIVITES

1. f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$.
Le but du TP est d'évaluer l'aire délimitée par les courbes d'équation $x=a$, $x=b$, $y=0$ et $y=f(x)$.
Soit A le point de coordonnées $(a, 0)$, B le point de coordonnées $(b, 0)$, n un entier naturel non nul, on partage le segment [AB] en n segments de même longueur : $[AA_1]$, $[A_1A_2]$,..,$[A_{n-1}A_n]$.



On note pour k fixé : S(a, b, n, k) l'aire du rectangle ($A_kC_kB_{k+1}A_{k+1}$) et T(a, b, n, k) l'aire du rectangle ($A_kD_kC_{k+1}A_{k+1}$).
Exprimer en fonction de k et de n, les coordonnées de A_k, B_k, C_k et D_k, et l'aire des rectangles S(a, b, n, k) et T(a, b, n, k).

Pour f, a, b et n fixés, on note : $R1(a,b,n) = \sum_{k=0}^{n-1} S(a,b,n,k)$ et $R2(a,b,n) = \sum_{k=0}^{n-1} T(a,b,n,k)$.

1) On pose $f(x) = x^2$.
- simplifier les expressions R1(0,1,n) et R2(0,1,n).
- déterminer les limites de ces deux suites lorsque n tend vers $+\infty$.

On constate que ces deux limites sont égales. Comment interpréter géométriquement ce nombre ?

2) Reprendre le même exercice, dans les cas suivants :
- $f(x) = x^3$ avec $a = 0$ et $b = 2$
- $f(x) = x^4$ avec $a = 0$ et $b = 1$
- $f(x) = x^5 + 3x^4 - x^2 + x + 5$ avec $a = 1$ et $b = 3$.

Dans la suite, lorsque R1(a, b, n) et R2(a, b, n) auront une limite commune, que l'on notera : **I** (a, b).

3) Déterminer **I** (0, π), pour $f(x)$= sin x.

4) Dans cette question $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $a = 1$, $b = 3$.
- Les expressions de R1 et de R2 sont-elles simplifiées par le logiciel ?
- Calculer : R1(1, 3, n) – R2(1, 3, n).
- En admettant que ces deux suites convergent, montrer qu'elles convergent vers la même limite.
- Déterminer un encadrement de **I** (1, 3), à 10^{-3}, près.

2. Soit $m > 0$, calculer **I** (0, m) pour :

$f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = x^4$ $\quad$ $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ $\quad$ $f(x) = \sin x$

Que peut-on conjecturer ?

COMMENTAIRES.

Les connaissances du programme d'enseignement obligatoire sur les suites sont indispensables.

Pour la première partie, le logiciel simplifie les expressions des sommes jusqu'à la question I3. Ainsi débarrassés de cette simplification techniquement difficile pour eux, les élèves devraient pouvoir se concentrer sur les questions d'interprétation en terme d'aires.
Cette interprétation ne coule pas de source. Certains élèves ont tout à fait été capables de répondre aux différentes questions posées, sans se rendre compte que cette fameuse limite commune était l'aire sous la courbe. Une sensibilisation à ce phénomène doit être faite avant l'activité (ou pendant). Il est possible de créer sous *DERIVE* un programme permettant de visualiser la situation des rectangles.
La question I4 va poser de nombreux problèmes. Tout d'abord les sommes ne sont pas simplifiées et on a donc recours au calcul approché. On découvre alors que le logiciel n'est quasiment d'aucun secours si ce n'est de faire un calcul très précis et d'additionner très vite près de 2000 termes. Mais il est incapable de calculer la différence R1 – R2. Pour ce qui est de démontrer que la limite existe... On montre ainsi les limites du matériel.
On construit ainsi une fonction I (a, b) égale à l'intégrale que l'on peut alors introduire en cours. Il est dommage que l'on ne puisse pas créer une fonction $I(f, a, b)$ mais il est techniquement difficile de prendre une fonction pour variable.
La partie 2 se contente d'observer et de conjecturer et permet de faire le lien avec la « définition » du programme. On peut alors démarrer un cours fondé sur cette approche de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle, établir quelques-unes unes des propriétés, puis les généraliser.

Il faut compter au minimum 4 heures de travail en classe avec l'indispensable compte-rendu.
Cela peut sembler long mais en fait, on couvre des activités sur les suites, la méthode des rectangles, et surtout on donne un sens à la notion d'intégrale.

CALCUL APPROCHE D'INTEGRALES ET D'AIRES PAR DIFFERENTES METHODES

TERM S

1 TP Durée : 2 heures

INTRODUCTION

Dans la suite de l'activité précédente, il s'agit de mettre en œuvre des méthodes classiques de calculs approchés d'intégrales

FICHES ACTIVITES

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a, b].
On veut calculer l'aire du domaine délimité par les droites d'équation x = a et x = b, la courbe, l'axe Ox. Ultérieurement, cette aire sera notée A(a, b). On a vu qu'il était possible de faire ce calcul lorsqu'on connaît une primitive de la fonction f sur [a, b]. Mais il existe de nombreux cas où on ne sait pas calculer de primitive de la fonction f. On utilise alors des méthodes de calcul approché d'intégrale.

1) Exposé des méthodes

a) méthode des rectangles

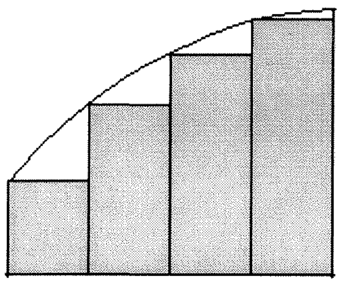
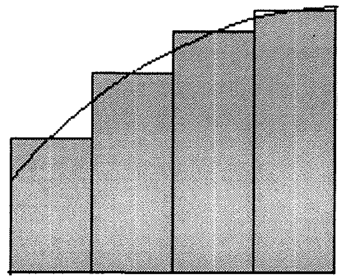
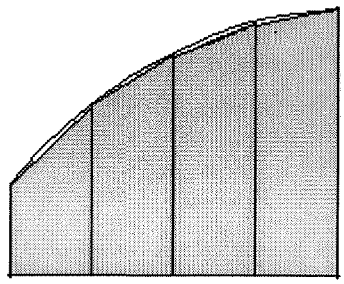
A(a, b) est encadrée par R(a, b, n) et W(a, b, n) sommes calculées à la fiche précédente (initiation au calcul d'intégrale).
Préciser dans quel cas R(a, b, n) est une valeur approchée par défaut de A(a, b) et dans quel cas il s'agit d'une valeur approchée par excès.

b) méthode du point médian

Soit M(a, b, n) la somme des aires des rectangles coloriés sur la figure. Donner une expression de M(a, b, n) en fonction de a, b, n et de la fonction f. On choisit M(a, b, n) comme valeur approchée de A(a, b).
On remarque qu'on ne peut pas savoir si on obtient une valeur approchée par défaut ou par excès.

c) méthode des trapèzes

Soit T(a, b, n) la somme des aires des trapèzes coloriés sur la figure.
Donner une expression de T(a, b, n) en fonction de a, b, n et de la fonction *f*. On choisit T(a, b, n) comme valeur approchée de A(a, b). Est-on sûr d'obtenir une valeur approchée par excès ? Par défaut? (essayer avec des figures différentes)

Méthode des rectangles	Méthode du point médian	Méthode des trapèzes
		
$a=a_0$ a_1 a_2 a_3 $b=a_4$	$a=a_0$ a_1 a_2 a_3 $b=a_4$ a'_1 a'_2 a'_3 a'_4	$a=a_0$ a_1 a_2 a_3 $b=a_4$

2) Calcul avec le logiciel *Derive*

a) Ce qu'il faut déclarer pour faire tous les calculs demandés

Déclarer *f*(x) : = (*laisser en blanc*) *ceci permet au logiciel de repérer que f est une fonction.*
R(a, b, n) : = rentrer l'expression trouvée dans la fiche précédente.
W(a, b, n) : = rentrer l'expression trouvée dans la fiche précédente.
M(a, b, n) : = expression trouvée au paragraphe 1.b
T(a, b, n) : = expression trouvée au paragraphe 1.c
Nous allons ensuite faire varier la fonction *f* et calculer une approximation de A(a, b) avec différentes méthodes en choisissant des valeurs pour a et b.

b) Travail avec la fonction définie par *f*(x) = x^2 et calcul de l'aire A(0,1) par différentes méthodes

Déclarer *f*(x) : = x^2

1) On sait que la vraie valeur de A(0, 1) est $\frac{1}{3}$.

Comparons les performances des différentes méthodes.
Calculer R(a, b, n) ; W(a, b, n) ; M(a, b, n) ; T(a, b, n) en donnant à a la valeur 0, à b la valeur 1 et en donnant à n la valeur 5.
Faire trois figures en mettant en évidence les différentes aires obtenues.
Calculer l'erreur commise quand on remplace successivement A(0, 1) par R(0, 1, 5) ; M(0, 1, 5) ; T(0, 1, 5)

2) Recommencer le même travail en donnant à n la valeur 20 c'est à dire en augmentant le nombre d'intervalles de la subdivision. (il est inutile de refaire les figures)

3) Dans chacune des méthodes, trouver quelle valeur donner à n pour que l'erreur commise soit inférieure à 10^{-4}.

c) Travail avec la fonction définie par *f*(x) = $\frac{1}{x^2}$ et calcul de l'aire A(1,3) par différentes méthodes

Reprendre les questions b) et c) du paragraphe précédent.

d) Travail avec la fonction définie par *f*(x) = $\frac{1}{x}$ et calcul de l'aire A(1,2) par différentes méthodes

Reprendre les questions b) et c) du paragraphe précédent.
Expliquez pourquoi on obtient ainsi des approximations successives de ln(2).

e) Travail avec la fonction définie par *f*(x) = $e^{\frac{-x^2}{2}}$ et calcul de l'aire A(1,2) par différentes méthodes

Dans ce cas on ne peut calculer la valeur exacte puisqu'on ne connaît pas de primitive de $e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Reprendre la question b) du paragraphe précédent.

DOCUMENT POUR LE PROFESSEUR

Place de ce document dans la progression du cours sur l'intégrale

Ce document a été expérimenté sous deux formes différentes :

a) sous la forme proposée ici, c'est à dire après la fiche initiation au calcul intégral et après un cours établissant que l'aire sous la courbe s'exprime par une intégrale et que $\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$

Dans ce cas on commence par des exemples où la valeur exacte de l'aire est connue et on peut comparer les valeurs approchées avec la valeur exacte. L'accent est mis sur la qualité de l'approximation mais les élèves se demandent parfois l'intérêt d'utiliser des méthodes approchées quand une formule magique donne le résultat !
On donne ensuite des exemples dans lesquels la valeur exacte n'est pas connue et où les méthodes approchées ont vraiment leur intérêt puisqu'il n'est pas possible de trouver une primitive de la fonction.

b) après la fiche initiation au calcul intégral mais sans avoir traité l'ensemble du cours. (donc en supprimant l'introduction du document élève). Les élèves connaissent donc quelques valeurs particulières d'intégrales, celles obtenues à la fiche précédente mais ils ne disposent pas encore de formule générale.
Les méthodes approchées ont alors leur intérêt. Dans ce cas on met plus en évidence pour les élèves la démarche qui consiste à calculer des aires de domaines avec des frontières courbes en utilisant les aires simples connues (rectangles, trapèzes). Cela évite peut-être l'association magique trop rapide « l'aire se calcule par une formule avec des primitives ». En effet les bons cas où l'on connaît une primitive ne sont souvent que des cas d'école !

Expression de M(a, b, n) et T(a, b, n) en fonction de a, b, n, *f*

La recherche de l'expression de M(a, b, n) et T(a, b, n) en fonction de a, b, n, *f* prend beaucoup de temps (une heure parfois). Il est intéressant de laisser « patauger » les élèves et de leur permettre d'entrer leurs expressions mêmes fausses dans l'ordinateur.
En effet la validation se trouve dans l'utilisation du logiciel dès la question 3.2 puisque l'on sait que l'on doit trouver des valeurs approchées de $\frac{1}{3}$. Les erreurs permettent de s'approprier la manipulation d'expression du type $\sum_{k=0}^{n-1}$ et de bien visualiser les indices qu'il faut faire varier.

Dès que l'on dispose des formules, on peut calculer de nombreuses intégrales alors que les calculs à la main ne permettent au maximum que d'aller jusqu'à n = 10. L'utilisation du logiciel met donc l'accent sur la généralisation de la méthode au lieu de se contenter d'un petit calcul limité.

Calcul d'erreur

Dans une première version de cette fiche, nous avions proposé aux élèves de travailler avec les majorations des erreurs que donne la théorie.

a) dans le cas de la méthode des rectangles : supposons que l'on prenne comme valeur approchée de A(a, b) le nombre R(a, b, n) alors on peut démontrer (et on l'admettra ici) que l'erreur commise $|A(a, b) - R(a, b, n)|$ est inférieure ou égale à $\frac{M}{n}(b-a)^2$ où M est tel que $|f'(x)| \leq M$ pour tout x de l'intervalle [a, b]

b) **dans le cas de la méthode du point médian :** supposons que l'on prenne comme valeur approchée de A(a, b) le nombre M(a, b, n), alors on peut démontrer (et on l'admettra ici) que l'erreur commise $|A(a, b) - M(a, b, n)|$ est inférieure ou égale $\frac{K}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}$,

où K est tel que $|f''(x)| \leq K$ pour tout x de l'intervalle [a, b].

c) dans le cas de la méthode des trapèzes : supposons que l'on prenne comme valeur approchée de A(a, b) le nombre T(a, b, n), alors on peut démontrer (et on l'admettra ici) que l'erreur commise $|A(a, b) - T(a, b, n)|$ est inférieure ou égale à $\frac{K}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}$ où K est tel que $|f''(x)| \leq K$ pour tout x de l'intervalle [a, b].

Les élèves devaient trouver n tel que l'erreur soit inférieure à 10^{-4} en utilisant ces majorations. Mais alors on s'apercevait très vite que la somme des erreurs faites sur le calcul de chaque terme n'était pas négligeable et que la précision n'était pas bonne. Sur ce point on n'a aucun contrôle de ce que fait le logiciel en calculant la somme et la situation devenait vite incompréhensible pour les élèves.
De plus ces formules d'erreurs ne peuvent qu'être « parachutées » et il n'est guère envisageable de faire comprendre pourquoi les dérivées successives interviennent dans ces calculs.
Nous avons donc préféré faire travailler les élèves par essais et erreurs pour calculer n afin d'avoir une précision donnée.

Titre : INFO-MATHIC
Activités mathématiques dans un environnement informatique

Auteurs : Bruno BERNARDOFF - Alain BONNET - Jacky DUDT - Christophe KILIAN - Philippe MICHEL - Suzette ROUSSET-BERT - Denis TASSO - Nicole VOGEL

Mots-clés : Activité mathématique - Analyse - Dérivation - Inégalité numérique - Informatique - Intégrale - Logiciel de calcul - Logiciel Derive- Suite - Tangente

Date : 1998

Editeur : I.R.E.M. de Strasbourg (S.173)

ISBN : 2-911446-09-7

Public : Enseignants de mathématiques de lycées

Résumé : Cette brochure vous propose des activités avec le logiciel Derive sur les thèmes suivants : découverte du logiciel, parenthèses et équations en seconde, inégalité en seconde, dérivées, suites, intégration.
Les activités sont directement utilisables dans les classes (secondes, premières, terminales). Elles sont accompagnées d'une fiche informatique précisant les principales fonctions utilisées, d'un commentaire sur les objectifs pédagogiques destinés aux enseignants et d'un bref compte-rendu d'expérimentation.
"Durant ces activités, tous les élèves travaillent... et font des maths avec plaisir."