A VOS STYLOS

PROBLÈME 40

Énoncé (proposé par B. Kordiemsky) :

On place $2n$ jetons d'un jeu de dames, n blancs et n noirs, sur une ligne horizontale (on suppose $n \geq 3$) : d'abord deux cases vides consécutives, puis un blanc, un noir, un blanc, un noir, etc.

L'objectif est de parvenir à la disposition suivante : tous les noirs, puis tous les blancs, puis deux cases vides.

Pour cela, le seul type de coup autorisé est une translation de deux jetons consécutifs vers les deux cases laissées vides par le précédent coup.

Peut-on y parvenir en n coups? La solution est-elle unique?

Ebauche de solution.— Le problème ne semble pas passionner nos lecteurs. Pour relancer leur intérêt, nous reproduisons ci-dessous une ébauche de solution qui nous a été signalée par M. Jean Brette et qu'on trouve dans l'ouvrage de E. Lucas, *Récréations mathématiques*, tome 3, p. 145-151, A. Blanchard, Paris, 1960, disponible à la bibliothèque de notre IREM. Lucas attribue le problème à Tait (*Philosophical magazine*, janvier 1884, et *Introductory address to the Edinburgh mathematical Society*, 9 novembre 1885). Selon Lucas, Delannoy propose une solution à l'aide de quatre algorithmes selon la congruence de n modulo 4.

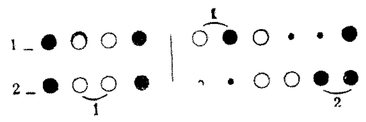
Au début, on a les deux cases vides suivis des 2n jetons, donc 2n+2 cases. On place un trait vertical après la $n-$ième case, et cela servira de repère car les déplacements s'opéreront en général d'un côté à l'autre de ce trait. L'algorithme comportera toujours deux phases, une première consistant en déplacements de couples bicolores et une seconde en déplacements de couples unicolores.

Dans tous les cas, le premier coup de la première phase consiste à placer sur les deux premières cases vides le couple bicolore NB formé de l'avant-avant-dernier jeton (noir) et de l'avant-dernier (blanc). A l'issue du premier coup on obtient donc une ligne de jetons qui commence par NB.

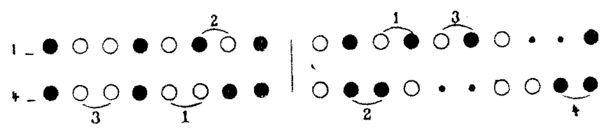
Supposons n pair. C'est de la situation après ce premier coup qu'on part dans les schémas ci-dessous.

Si $n = 4k$, on continue alors la première phase par $2k-1$ coups au cours de laquelle on continue de déplacer des couples bicolores (alternativement BN et NB), puis la deuxième phase comporte $2k$ déplacements de couples unicolores (alternativement BB et NN).

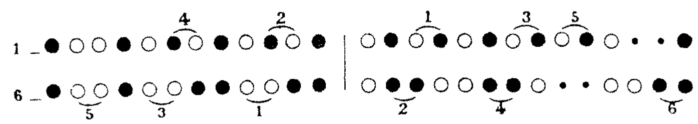
Si $n = 4k + 2$, la première phase se poursuit avec $2k$ déplacements de couples bicolores, puis la deuxième phase comporte $2k + 1$ déplacements de couples unicolores (alternativement NN et BB).



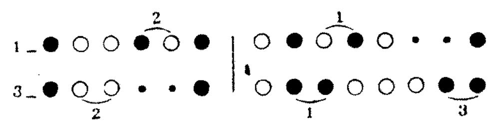
B. — Quatre pions de même couleur.



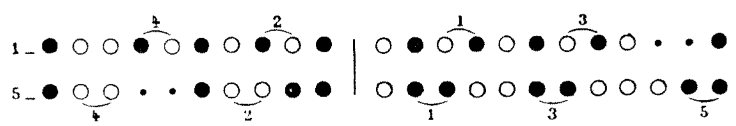
B. — Huit pions de même couleur.



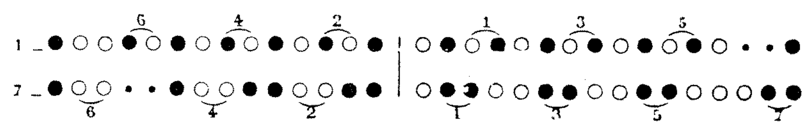
B. — Douze pions de même couleur.



A. — Six pions de même couleur.



A. — Dix pions de même couleur.

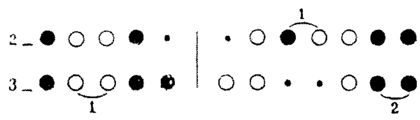


A. — Quatorze pions de même couleur.

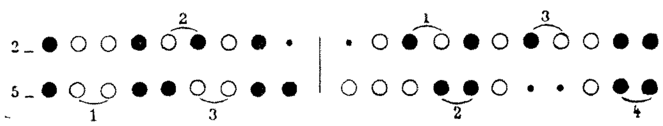
Supposons n impair. Le deuxième coup consiste alors toujours à déplacer le couple bicolore BN à cheval sur le trait vertical. Les schémas ci-dessous partent de la situation à l'issue de ce deuxième coup.

Si $n = 4k + 1$, la première phase se poursuit alors avec $2k - 1$ déplacements de couples bicolores, puis la deuxième phase comporte $2k$ déplacements de couples unicolores.

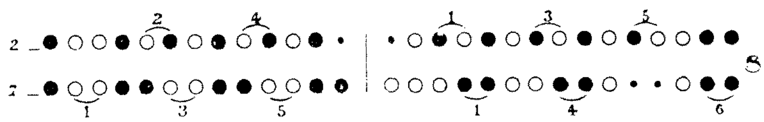
Si $n = 4k+3$, la première phase se poursuit avec $2k$ déplacements, puis la deuxième phase comporte $2k + 1$ déplacements.



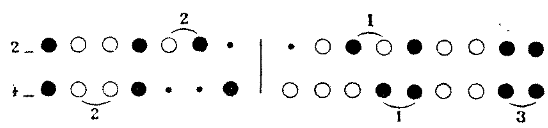
D. — Cinq pions de même couleur.



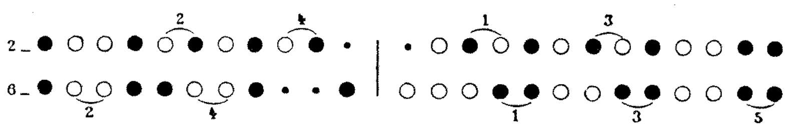
D. — Neuf pions de même couleur.



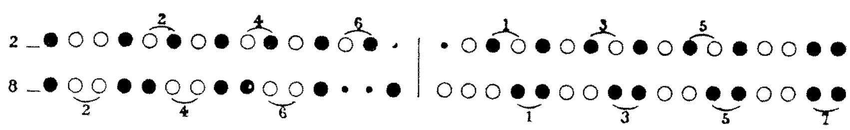
D. — Treize pions de même couleur.



C. — Sept pions de même couleur.



C. — Onze pions de même couleur.



C. — Quinze pions de même couleur.

Tout cela semble fort raisonnable, on a bien l'impression de détenir *la* solution. Convient-il néanmoins de *démontrer* la validité de ces algorithmes, quitte à changer de formalisme? Faut-il démontrer leur unicité? Ou se contentera-t-on de ces schémas considérés comme convaincants? A nos lecteurs de nous le faire savoir.

PROBLÈME 41

Énoncé (proposé par J. Zeng) :

Dans ce qui suit, la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial autrefois noté C_n^k.

On appelle composition de l'entier p en k parts toute suite ordonnée $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ telle que $\forall i\ c_i \geq 1$, et $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = p$.

On note $C(p,k)$ l'ensemble des compositions c de ce type, et on pose

$$S(n,p,k) = \sum_{c \in C(p,k)} \binom{n}{c_1}\binom{n}{c_2}\cdots\binom{n}{c_k}$$

Donner une expression de la somme suivante à l'aide d'un seul coefficient binomial :

$$\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^{k-1}S(n,p,k).$$

Remarque : L'auteur du problème propose encore une généralisation de ce résultat, qui sera soumise aux lecteurs de notre rubrique en fonction de l'intérêt suscité par ces deux premières questions.

Solution de M. Wambst :

La première question se résoud par un rapide calcul. On trouve

$$(1)\qquad \begin{aligned} \binom{n}{2} - \binom{n}{1}\binom{n}{1} &= -\binom{n+1}{2} \\ \binom{n}{3} - \binom{n}{2}\binom{n}{1} - \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n}{1}\binom{n}{1} &= \binom{n+2}{3} \end{aligned}$$

pour tout entier n. Introduisons les notations suivantes. Soit $C(p)$ l'ensemble de toutes les décompositions de l'entier p, c'est-à-dire $C(p) = \bigcup_{k=1}^{p} C(p,k)$. Pour tout $c \in C(p,k)$, on note $|c| = k$ la longueur de la décomposition. Le problème consiste à démontrer que l'on a

$$\sum_{c \in C(p)} (-1)^{|c|+1}\binom{n}{c_1}\binom{n}{c_2}\cdots\binom{n}{c_{|c|}} = (-1)^{p+1}\binom{n+p-1}{p} \qquad (1)$$

pour tous les entiers $p \leq n$.

On le démontre par recurrence. Tout d'abord, remarquons que l'on a

$$C(p) = \bigcup_{k=0}^{p-1}\left\{(k, c_1, c_2, \ldots, c_{|c|}) \text{ où } c \in C(p-k)\right\}.$$

La démonstration de cette égalité ensembliste est immédiate.
A présent, nous supposons que (1) est vraie jusqu'au rang $p > 0$. Nous allons utiliser la généralisation bien connue de la formule de Leibniz $(PQ)' = P'Q + PQ'$ où P et Q sont deux fonctions dérivables (dans notre cas, des polynômes de Laurents). On a

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}(PQ) = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \frac{\partial^k}{\partial x^k} P \frac{\partial^{p-k}}{\partial x^{p-k}} Q\,. \tag{2}$$

Prenons $P(x) = x^{-n}$ et $Q(x) = x^n$. La formule (2) donne :

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}(1) = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \frac{\partial^k}{\partial x^k}(x^{-n}) \frac{\partial^{p-k}}{\partial x^{p-k}}(x^n)\,. \tag{3}$$

Or, on a

$$\frac{\partial^{p-k}}{\partial x^{p-k}}(x^n) = n(n-1)\cdots(n-p+k+1)x^{n-p+k} = (p-k)! \binom{n}{p-k} x^{n-p+k}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k}{\partial x^k}(x^{-n}) &= -n(-n-1)\cdots(-n-k+1)x^{-n-k} \\ &= (-1)^k n(n+1)\cdots(n+k-1)x^{-n-k} = k! \binom{n+k-1}{k} x^{-n-k}\,.\end{aligned}$$

Après quelques simplifications, la formule (3) devient

$$0 = p! \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{n+p-1}{k} \binom{n}{p-k} x^{-p}\,.$$

Ce qui implique

$$(-1)^{p+1} \binom{n+p-1}{p} = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \binom{n+p-1}{k} \binom{n}{p-k}\,.$$

Par hypothèse de recurrence, on a

$$(-1)^k \binom{n+k-1}{k} = -\sum_{c \in C(k)} (-1)^{|c|+1} \binom{n}{c_1} \binom{n}{c_2} \cdots \binom{n}{c_{|c|}}$$

pour tout $k < p$. Nous obtenons donc l'égalité:

$$\begin{aligned}(-1)^{p+1} \binom{n+p-1}{p} &= \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{c \in C(k)} (-1)^{|c|+2} \binom{n}{p-k} \binom{n}{c_1} \binom{n}{c_2} \cdots \binom{n}{c_{|c|}} \\ &= \sum_{c' \in C(p)} (-1)^{|c'|+1} \binom{n}{c'_1} \binom{n}{c'_2} \cdots \binom{n}{c'_{|c'|}}\,.\end{aligned}$$

La seconde égalité est une conséquence de la remarque sur les décompositions d'entiers en sommes d'entiers. Ceci termine la demonstration.
Il est possible d'étendre ce résultat aux "q-coefficients binômiaux" définis comme suit. Soit un scalaire $q \neq 1$. Pour tout entier n, on pose $n_q = \frac{1-q^n}{1-q}$. Il s'agit d'une généralisation des entiers car la limite de n_q est n lorsque q tend vers 1. On pose de plus $n_q! = n_q(n-1)_q \dots 1_q$ et $0_q! = 1$. Les coefficients du binôme se généralisent par la formule $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}_q = \frac{n_q!}{p_q!(n-p)_q!}$. Soit $c = (c_1, \cdots, c_{|c|}) \in C(p)$ une décomposition de l'entier p. Posons $\gamma(c) = \frac{1}{2}(|c|^2 - \sum_{i=1}^{|c|} c_i^2)$. On a alors la formule suivante qui généralise (1) :

$$\sum_{c \in C(p)} (-1)^{|c|+1} q^{-\gamma(c)} \begin{pmatrix} n \\ c_1 \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} n \\ c_2 \end{pmatrix}_q \cdots \begin{pmatrix} n \\ c_{|c|} \end{pmatrix}_q = (-1)^{p+1} q^{-\frac{p(p-1)}{2}} \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}_q .$$

Elle se démontre de la même manière que (1) en utilisant les q-différentiations définies par $\partial_q(P)(x) = \frac{P(x)-P(qx)}{x-qx}$ au lieu de la dérivée usuelle $\frac{\partial}{\partial x}$.

PROBLÈME 42

Enoncé (proposé par H.S.M. Coxeter) : Soient x et y deux nombres réels positifs, supposés irrationnels et tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

Montrer que les ensembles

$$X = \{[x], [2x], [3x], [4x], \dots\} \text{ et } Y = \{[y], [2y], [3y], [4y], \dots\}$$

forment une partition de l'ensemble des entiers naturels (où $[z]$ désigne ici la partie entière du nombre réel z).

Que se passe-t-il quand x et y sont rationnels?

Indication.— Nous avons reçu deux réponses (de P. Renfer, de R. Schäfke). Michel Emery nous signale que le problème est déjà résolu de deux manières différentes (analytique et géométrique) dans l'Ouvert $n°65$. Il existe aussi une jolie solution combinatoire due à Coxeter. Nous ne reviendrons pas sur ce problème, sauf si nos lecteurs le demandent.

PROBLÈME 43

Énoncé (proposé par D. Dumont et G. Kreweras) :

On écrit une suite finie $(m(1), m(2), m(3), \dots m(k))$ d'entiers naturels $m(i)$ comme un "mot" $m = m(1)m(2)m(3) \cdots m(k)$. Un *anagramme* p d'un mot m est un mot

de même longueur formé des mêmes "lettres" (entiers naturels) mais dans un ordre qui peut être différent.
Un anagramme $p = p(1)p(2)p(3)\cdots p(k)$ de $m = m(1)m(2)m(3)\cdots m(k)$ sera dit :

- *alternant large* si $p(1) \geq m(1)$, $p(2) \leq m(2)$, $p(3) \geq m(3)$, $p(4) \leq m(4)$, $\cdots$ $p(2i-1) \geq m(2i-1)$, $p(2i) \leq m(2i)$, etc.

- *alternant mixte* si $p(1) > m(1)$, $p(2) \leq m(2)$, $p(3) > m(3)$, $p(4) \leq m(4)$ $\cdots$ $p(2i-1) > m(2i-1)$, $p(2i) \leq m(2i)$, etc.

- *alternant strict* si $p(1) > m(1)$, $p(2) < m(2)$, $p(3) > m(3)$, $p(4) < m(4)$ $\cdots$ $p(2i-1) > m(2i-1)$, $p(2i) < m(2i)$, etc.

Dans ce problème on étudie les anagrammes alternants des mots suivants :
$m_1 = 12$, $m_2 = 1234$, $m_3 = 123456$, $\cdots$ $m_n = 1234\cdots(2n-1)(2n)$,
$\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 01$, $\mu_2 = 0112$, $\mu_3 = 011223$, $\cdots$ $\mu_n = 0112233\cdots(n-1)(n-1)n$.

Exemple : $p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est un anagramme alternant large de μ_3.

1°) On définit l'entier a_n comme le nombre des anagrammes alternants larges du mot m_n. Montrer que a_n est également le nombre des anagrammes alternants stricts de m_{n+1}.

2°) On définit l'entier α_n comme le nombre des anagrammes alternants larges du mot μ_n. Montrer que α_n est également le nombre des anagrammes alternants mixtes de μ_{n+1} et le nombre des anagrammes alternants stricts de μ_{n+2}.

3°) Montrer que $a_n = 2^n \alpha_{n-1}$ $(n \geq 1)$.

Indication.— Nous avons déjà reçu une solution complète de Pierre Renfer, que nous publierons ultérieurement. En outre, le problème a des prolongements fort intéressants, dont nous serons amenés à parler.

PROBLÈME 44

Énoncé (proposé par Paul Erdös) :

Le grand mathématicien hongrois Paul Erdös, qui vient de disparaître, fut l'inventeur de très nombreux problèmes. En hommage à sa mémoire, voici un problème d'Erdös que nous soumettons à nos lecteurs.

Etant donnés deux entiers naturels m et n tels que $m < n$, on considère une partition de l'intervalle d'entiers $[m, n[= \{m, m+1, m+2, \ldots n-1\}$ en deux sous-ensembles A_1 et A_2 disjoints : $[m, n[= A_1 \cup A_2$. On dira que c'est une *partition d'Erdös* si l'entier n peut, d'au moins une manière, s'écrire comme somme d'éléments distincts de l'un des A_i.
Exemple.— $m = 1$, $n = 8$, $[1, 8[= \{1, 2, 4, 5\} \cup \{3, 6, 7\}$ est une partition d'Erdös de $[1, 8[$ car $8 = 1 + 2 + 5$.
Le couple (m, n) est un *couple d'Erdös* si toute partition de $[m, n[$ en deux sous-

ensembles est une partition d'Erdös. L'objectif du problème est d'identifier les couples (m, n) qui sont des couples d'Erdös.

1°) Montrer que $(1, 11)$ n'est pas un couple d'Erdös.
Montrer que $(1, 12)$ et $(2, 12)$ sont des couples d'Erdös.

2°) Trouver d'autres couples d'Erdös, et les déterminer tous si possible.

Indication.— Notre collègue Marie-Paule MULLER nous a signalé une erreur dans cet énoncé : $[2, 12[= \{2, 3, 5, 6, 8\} \cup \{4, 7, 9, 10, 11\}$ n'est pas une partition d'Erdös, donc $(2, 12)$ n'est *pas* un couple d'Erdös.
En revanche, Marie-Paule nous assure que $(2, 15)$ est bien un couple d'Erdös. Dans notre prochaine édition, nous remplacerons donc $(2, 12)$ par $(2, 15)$. Merci, Marie-Paule! Félicitons-nous d'avoir fait cette erreur involontaire dans l'énoncé de ce problème, car cela nous permet de constater l'existence de gens qui s'y intéressent. S'il le faut, nous introduirons *volontairement* des assertions fausses dans les énoncés à venir pour mieux sonder notre lectorat.

PROBLÈME 46

Énoncé (proposé par R. Schäfke) :

Soit la matrice carrée $M_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $a_{i,j} = \begin{pmatrix} i+j-2 \\ i-1 \end{pmatrix}$ (coefficient binomial).
Montrer que M_n est définie positive, de déterminant égal à 1, et que si λ est valeur propre de M_n alors $1/\lambda$ est également valeur propre de M_n.

PROBLÈME 47

Énoncé (proposé par M. Krier) :

On considère un polygone plan P à n côtés, de sommets consécutifs A_0, A_1, $\cdots$ A_n, avec $A_n = A_0$. Sur chaque segment A_iA_{i+1} on construit un carré $A_iA_{i+1}B_iC_i$, toujours du même côté pour un observateur qui se déplacerait sur le polygone.
L'objectif du problème est de déterminer P de telle sorte que les $2n$ points B_i et C_i soient sur un même cercle.
1°) Rechercher les polygones P convexes. Il y a la solution évidente où l'on prend pour P un polygone régulier. Est-ce la seule solution?
2°) Indiquer comment on peut obtenir les polygones non convexes ayant la propriété demandée.
Remarque.— On évitera de s'embourber dans la définition d'un polygone.