A VOS STYLOS

PROBLÈME 41

Énoncé (proposé par J. Zeng) :

Dans ce qui suit, la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial autrefois noté C_n^k.

On appelle composition de l'entier p en k parts toute suite ordonnée $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ telle que $\forall i\ c_i \geq 1$, et $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = p$.

On note $C(p,k)$ l'ensemble des compositions c de ce type. Montrer que

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \sum_{c\in C(p,k)} \prod_{j=1}^{k} \binom{n}{c_j} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}.$$

pour tous les entiers $p \leq n$.

Remarque de J. Zeng sur la solution de M. Wambst J'ai lu avec intérêt la solution de mon problème publié dans le dernier numéro de l'Ouvert.
Je trouve la solution intéressante car élémentaire, mais un peu compliquée, et avec une petite erreur de signe dans le q-analogue (mais il s'agit peut-être d'une faute de frappe). Voici le q-analogue que je propose :

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \sum_{c\in C(p,k)} \prod_{j=1}^{k} \binom{n}{c_j}_q q^{\binom{c_j}{2}} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}_q.$$

La preuve ci-dessous est valable aussi bien pour q quelconque que dans le cas où $q = 1$:
Pour tout entier $n \geq 1$ et un scalaire q tel que $|q| \neq 1$, on définit le q-binôme $(x;q)_n = (1-x)(1-xq)\ldots(1-xq^{n-1})$. Alors on a les formules de type binomial suivantes:

$$(x;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}}(-x)^k, \qquad \frac{1}{(x;q)_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}_q x^k.$$

On a l'identité générale suivante :

$$(a,x, a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)^k = \sum_{p=k}^{p=nk} \Big(\sum_{c\in C(p,k)} \prod_{j=1}^{k} a_{c_j} \Big) x^k.$$

D'autre part, si $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est une série formelle, on définit $[x^n]f(x) = a_n$ pour tout $n \geq 0$. Il est clair que $[x^n]$ est un opérateur linéaire sur l'espace vectoriel des séries formelles.
Le premier membre de (1) s'écrit alors comme suit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p}(-1)^k[x^p]\{(-x;q)_n - 1\}^k &= [x^p]\sum_{k=1}^{p}\{1-(-x;q)_n\}^k \\
&= [x^p]\left\{\frac{1-(-x;q)_n - [1-(-x;q)_n]^{p+1}}{(-x;q)_n}\right\} \\
&= [x^p](-x;q)_n^{-1} \\
&= (-1)^p\binom{n+p-1}{p}_q .
\end{aligned}$$

PROBLÈME 43

Énoncé (proposé par D. Dumont et G. Kreweras) :

On écrit une suite finie $(m(1), m(2), m(3), \ldots m(k))$ d'entiers naturels $m(i)$ comme un "mot" $m = m(1)m(2)m(3)\cdots m(k)$. Un *anagramme* p d'un mot m est un mot de même longueur formé des mêmes "lettres" (entiers naturels) mais dans un ordre qui peut être différent.
Un anagramme $p = p(1)p(2)p(3)\cdots p(k)$ de $m = m(1)m(2)m(3)\cdots m(k)$ sera dit :

- *alternant large* si $p(1) \geq m(1)$, $p(2) \leq m(2)$, $p(3) \geq m(3)$, $p(4) \leq m(4)$, $\cdots$ $p(2i-1) \geq m(2i-1)$, $p(2i) \leq m(2i)$, etc.

- *alternant mixte* si $p(1) > m(1)$, $p(2) \leq m(2)$, $p(3) > m(3)$, $p(4) \leq m(4)$ $\cdots$ $p(2i-1) > m(2i-1)$, $p(2i) \leq m(2i)$, etc.

- *alternant strict* si $p(1) > m(1)$, $p(2) < m(2)$, $p(3) > m(3)$, $p(4) < m(4)$ $\cdots$ $p(2i-1) > m(2i-1)$, $p(2i) < m(2i)$, etc.

Dans ce problème on étudie les anagrammes alternants des mots suivants :
$m_1 = 12$, $m_2 = 1234$, $m_3 = 123456$, $\cdots$ $m_n = 1234\cdots(2n-1)(2n)$,
$\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 01$, $\mu_2 = 0112$, $\mu_3 = 011223$, $\cdots$ $\mu_n = 0112233\cdots(n-1)(n-1)n$.

Exemple : $p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est un anagramme alternant large de μ_3.

1°) On définit l'entier a_n comme le nombre des anagrammes alternants larges du mot m_n. Montrer que a_n est également le nombre des anagrammes alternants stricts de m_{n+1}.

2°) On définit l'entier α_n comme le nombre des anagrammes alternants larges du mot μ_n. Montrer que α_n est également le nombre des anagrammes alternants mixtes de μ_{n+1} et le nombre des anagrammes alternants stricts de μ_{n+2}.

3°) Montrer que $a_n = 2^n\alpha_{n-1}$ $(n \geq 1)$.

Solution de P. Renfer :

1) Il s'agit de construire une bijection entre l'ensemble des anagrammes alternants stricts de m_{n+1} et l'ensemble des anagrammes alternants larges de m_n. Voilà la recette :

Soit
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n+1 & 2n+2 \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & \dots & p(2n+1) & p(2n+2) \end{pmatrix}$$

un anagramme alternant strict de m_{n+1}.
On a nécessairement : $p(2) = 1$ et $p(2n+1) = 2n$.
Sur la première ligne de p, ajouter 1 aux nombres impairs et retrancher 1 aux nombres pairs. Puis réordonner les colonnes de p, dans l'ordre croissant des nombres de la première ligne.
Supprimer la première colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la dernière colonne $\begin{pmatrix} 2n+2 \\ 2n+2 \end{pmatrix}$.
Retrancher 1 à tous les nombres des deux lignes.
On obtient ainsi un anagramme alternant large du mot m_n (la recette est bien réversible!).

2)
a) Il s'agit de construire une bijection entre l'ensemble des anagrammes alternants mixtes de μ_{n+1} et l'ensemble des anagrammes alternants large de μ_n. Voilà la recette :
Soit

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \dots & n & n & n+1 \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & p(5) & p(6) & p(7) & \dots & p(2n) & p(2n+1) & p(2n+2) \end{pmatrix}$$

un anagramme alternant mixte de μ_{n+1}.
On a nécessairement : $p(2n+1) = n+1$ et $p(2n-1) = n$.
Sur la première ligne de p, ajouter 1 aux nombres de rang impair : $\mu(1), \mu(3), \dots,$ $\mu(2n+1)$. Remplacer à la fin de la première ligne $(n+2)$ par 0 et placer la dernière colonne en tête.
Supprimer la dernière colonne $\begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}$ ainsi que l'antépénultième $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$.
Echanger deux à deux les colonnes ayant le même nombre sur la première ligne.
On obtient ainsi un anagramme alternant large du mot μ_n (la recette est bien réversible!).

b) Il s'agit de construire une bijection entre l'ensemble des anagrammes alternants stricts de μ_{n+2} et l'ensemble des anagrammes alternants larges de μ_n. Voilà la recette :
Soit

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \dots & n+1 & n+1 & n+2 \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & p(5) & p(6) & p(7) & \dots & p(2n+2) & p(2n+3) & p(2n+4) \end{pmatrix}$$

un anagramme alternant strict de μ_{n+2}.
On a nécessairement : $p(2) = 0, p(4) = 1, p(2n+3) = n+2, p(2n+1) = n+1$.
Sur la première ligne de p, ajouter 1 aux nombres de rang impair : $\mu(1), \mu(3), \ldots, \mu(2n+3)$ et retrancher 1 aux nombres de rang pair : $\mu(2), \mu(4), \ldots, \mu(2n+4)$.
Remplacer à la fin de la première ligne $(n+2)$ par 0 et placer la dernière colonne en tête.
Supprimer les colonnes de rang $2, 4, (2n+3), (2n+1)$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n+2 \\ n+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}$.
Echanger deux à deux les colonnes ayant le même nombre sur la première ligne.
Retrancher 1 à tous les nombres des deux lignes.
On obtient ainsi un anagramme alternant large du mot μ_n (la recette est bien réversible!).

3) Il s'agit de montrer qu'à chaque anagramme alternant strict du mot μ_{n+1}, on peut faire correspondre 2^n anagrammes alternants du mot m_{n+1}. Soit

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \ldots & n & n & n+1 \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & p(5) & p(6) & p(7) & \ldots & p(2n) & p(2n+1) & p(2n+2) \end{pmatrix}$$

un anagramme alternant strict de μ_{n+1}.
Affectons d'un "prime" tous les termes $\mu(3), \mu(5), \mu(7), \ldots, \mu(2n+3)$ de la première ligne :

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1' & 2 & 2' & 3 & 3' & \ldots & n & n' & n+1 \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & p(5) & p(6) & p(7) & \ldots & p(2n) & p(2n+1) & p(2n+2) \end{pmatrix}.$$

Sur la deuxième ligne affectons d'un "prime" l'un des deux nombres 1, l'un des deux nombres 2, l'un des deux nombres 3, ..., l'un des deux nombres n : il y a 2^n façons de le faire!
Remplaçons dans les deux lignes $1, 2, 3, \ldots, n$ par $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ respectivement.
Remplaçons dans les deux lignes $1', 2', 3', \ldots, n'$ par $2, 4, 6, \ldots, 2n$ respectivement.
Remplaçons dans les deux lignes $n+1$ par $2n+2$.
On obtient ainsi un anagramme alternant strict de m_{n+1}.

PROBLÈME 44

Énoncé (proposé par Paul Erdös) :

Le grand mathématicien hongrois Paul Erdös, qui vient de disparaître, fut l'inventeur de très nombreux problèmes. En hommage à sa mémoire, voici un problème d'Erdös que nous soumettons à nos lecteurs.

Etant donnés deux entiers naturels m et n tels que $m < n$, on considère une partition de l'intervalle d'entiers $[m, n[= \{m, m+1, m+2, \ldots n-1\}$ en deux sous-ensembles A_1 et A_2 disjoints : $[m, n[= A_1 \cup A_2$. On dira que c'est une *partition d'Erdös* si l'entier n peut, d'au moins une manière, s'écrire comme somme d'éléments distincts de l'un des A_i.

Exemple.— $m = 1$, $n = 8$, $[1, 8[= \{1, 2, 4, 5\} \cup \{3, 6, 7\}$ est une partition d'Erdös de $[1, 8[$ car $8 = 1 + 2 + 5$.
Le couple (m, n) est un *couple d'Erdös* si toute partition de $[m, n[$ en deux sous-ensembles est une partition d'Erdös. L'objectif du problème est d'identifier les couples (m, n) qui sont des couples d'Erdös.

1°) Montrer que $(1, 11)$ n'est pas un couple d'Erdös.
Montrer que $(1, 12)$ et $(2, 15)$ sont des couples d'Erdös.

2°) Trouver d'autres couples d'Erdös, et les déterminer tous si possible.

PROBLÈME 46

Énoncé (proposé par R. Schäfke) :

Soit la matrice carrée $M_n = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, où $a_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$ (coefficient binomial).
Montrer que M_n est définie positive, de déterminant égal à 1, et que si λ est valeur propre de M_n alors $1/\lambda$ est également valeur propre de M_n.

PROBLÈME 47

Énoncé (proposé par M. Krier) :

On considère un polygone plan P à n côtés, de sommets consécutifs A_0, A_1, $\cdots$ A_n, avec $A_n = A_0$. Sur chaque segment A_iA_{i+1} on construit un carré $A_iA_{i+1}B_iC_i$, toujours du même côté pour un observateur qui se déplacerait sur le polygone.
L'objectif du problème est de déterminer P de telle sorte que les $2n$ points B_i et C_i soient sur un même cercle.
1°) Rechercher les polygones P convexes. Il y a la solution évidente où l'on prend pour P un polygone régulier. Est-ce la seule solution?
2°) Indiquer comment on peut obtenir les polygones non convexes ayant la propriété demandée.
Remarque.— On évitera de s'embourber dans la définition d'un polygone.

PROBLÈME 48

Énoncé (proposé par R. Garin) :

Pour quel(s) entier(s) naturel(s) n la somme

$$\sum_{k=0}^{n} k^2(n-k)^2$$

est-elle un carré parfait ?

PROBLÈME 49

Énoncé (proposé par E. Kern) :

Dans un triangle ABC, on note a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB, et α, β, γ les mesures respectives des angles en A, B et C.
1) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos\alpha = \cos 2\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 2\beta$.
2) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos\alpha = \cos 3\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 3\beta$.