RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 1997

Les exercices proposés cette année étaient mieux adaptés aux capacités des élèves que ceux de l'année dernière. Les solutions ont été plus nombreuses.

CLASSE DE PREMIERE

Sujet 1

Si x est un nombre réel, le seul nombre réel dont le cube est égal à x s'appelle la racine cubique de x et se note $\sqrt[3]{x}$.

Par exemple : $\sqrt[3]{1000} = 10 = 2 \times 5 = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125}$

On définit $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

Montrer que α est un nombre entier.

Sujet 2

Trois sirènes, Andromaque, Bérénice et Céphise, goûtent un repos bien mérité au bord d'un lac circulaire.

Emile, champion de natation à vitesse constante de son village de Climbach, sait que depuis son lieu de méditation, le Dorisfels (un charmant rocher au bord du lac), il lui faut une minute pour rejoindre Céphise, sept minutes pour retrouver Bérénice et cinq pour revoir Andromaque.

Céphise et Bérénice se reposent toutes deux à 500 mètres d'Andromaque.

Un journaliste venu admirer les exploits d'Emile, fait le tour du lac à pied en partant du Dorisfels ; il a rencontré Andromaque puis Bérénice et enfin Céphise.

Trouver la vitesse d'Emile le Champion et le rayon du lac.

Sujet 3

Cette année-là, Claude dit à François : " au casino d'Alexandrie, je connais une étrange machine. Elle génère 3 nombres réels positifs a, b et c. On gagne si l'un des 3 nombres a(1-a), b(1-b), c(1 -c) est inférieur ou égal à 1/4. Comme d'habitude, j'y gagne à tous les coups".

François lui répondit : "je connais une machine similaire à Assouan. Mais on y gagne si l'un des 3 nombres a(1-b), b(1-c), c(1-a) est inférieur ou égal à 1/4. J'y gagne à coup sûr".

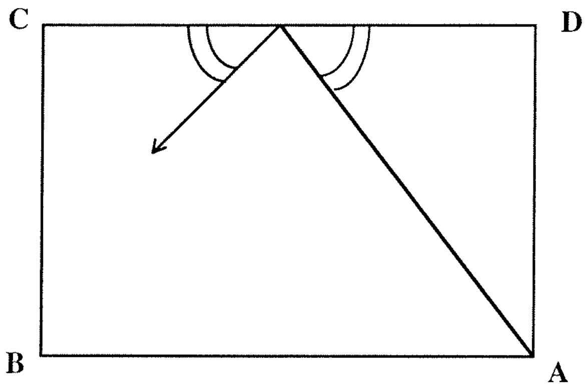
Préférez-vous tenter votre chance à Alexandrie ou à Assouan ?

CLASSE DE TERMINALE

Sujet 1

Si x est un entier naturel, on note p(x) le produit de ses chiffres. Démontrer que 12 est l'unique entier naturel x compris entre 0 et 100 tel que $x^2 - 10x - 22 = p(x)$.

Sujet 2



On dispose d'un billard rectangulaire ABCD de longueur AB = 1997 mm et de largeur AD = 1000 mm.

Il comprend un trou à chaque coin. On envoie une boule depuis le coin A suivant la bissectrice de l'angle BAD. Elle rebondit ensuite sur les bords, comme indiqué sur la figure. On néglige les frottements. Montrer que la boule atteindra un trou et déterminer au bout de combien de rebonds.

Sujet 3

Saint-Exupéry a quitté le service de l'aéropostale et s'est reconverti dans l'importation de plantes tropicales.
Dans les soutes de son triplan bimoteur, il transporte des boutures de baobab ("baobab baobabensis") et des rosiers des sables ("rosa arenarum"). Il dispose du même nombre de boutures de chaque espèce. Elles sont mélangées et réparties dans deux caisses.
A ce stade de leur croissance, les deux espèces sont encore indiscernables.
Le petit prince ouvre une des deux caisses au hasard et y dérobe une bouture pour la cultiver sur sa planète personnelle.
Le petit prince a l'impression que lorsque l'une des caisses ne contient aucun baobab, il a plus de chance d'avoir une bouture de rosier.
Pouvez-vous l'aider ?
Pouvez-vous lui dire quelle serait la meilleure situation pour lui ?