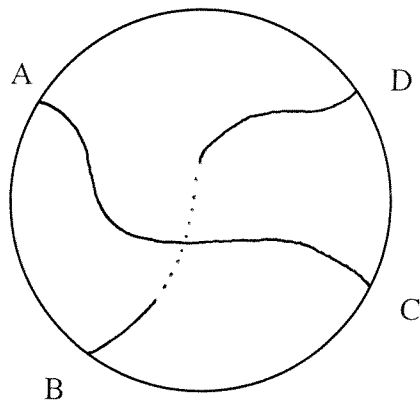


PATHOLOGIE DES ESPACES CONNEXES

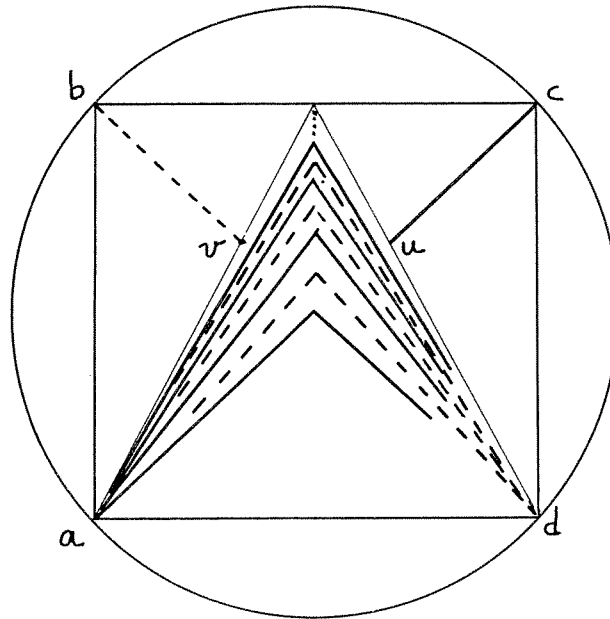
Marc GUINOT

Le groupe mathématique de Saumur n'a pas ménagé sa peine (ni son argent car les relations publiques coûtent cher) pour se faire connaître au-delà d'une ligne qui va de Varennes-sur-Loire à Saint-Lambert-des-Levées en passant par Saint-Cyr-en-Bourg. C'est ainsi que la revue '*Singularité*' (aujourd'hui disparue sans laisser de trace) et sa consœur '*L'Ouvert*' (toujours bien vivante) ont publié divers articles se référant expressément aux travaux de cette estimable "Académie" provinciale et ligérienne, et en particulier, pour ce qui concerne cette dernière publication, en décembre 1990 (sur les quaternions et les octonions) et en décembre 1992 (sur le calcul de certaines valeurs de la fonction zêta). En sens inverse, le groupe de Saumur n'hésite pas à faire son miel de certains articles de '*L'Ouvert*', comme l'an passé par exemple, en consacrant deux heures d'horloge à tenter de décomposer un carré en un nombre impair de triangles de même aire (cf. '*L'Ouvert*' n° 76, sept. 1994). Rappelons que c'est impossible...

Bref, tout cela pour dire que j'ai été fort dépité d'apprendre que le rédacteur en chef actuel de '*L'Ouvert*' ne connaissait même pas l'existence du groupe dont je suis le porte-parole. Cela ne l'a heureusement pas empêché de se déclarer prêt à publier l'article qui va suivre et qui est une version étendue du dernier compte-rendu que je lui ai fait parvenir. Le sujet (traité à Saumur le 10 mai 1996 est d'ailleurs directement inspiré par un intéressant article de J.-P. FRIEDELMEYER, le rédacteur en chef incriminé, concernant la première démonstration par GAUSS du théorème fondamental de l'algèbre ('*L'Ouvert*', n° 81). Un des points essentiels de l'argumentation de GAUSS est qu'il est impossible de disposer quatre points A, B, C, D sur un cercle, en suivant par exemple le sens trigonométrique, et de joindre A et C d'une part et B à D de l'autre par des lignes continues à l'intérieur du cercle, sans que celles-ci se coupent.



Or, ce résultat est faux si au lieu des arcs continus en question, on utilise des ensembles de points, considérés pourtant comme d'un seul tenant, et qu'on appelle des ensembles connexes. L'exemple représenté par la figure ci-dessous se trouve dans un numéro d'avril 2462 (1) de la revue '*Singularité*', dans un article intitulé "Paradoxical Connections in the Plane".



Précisons qu'un des ensembles est représenté en traits pleins épais et l'autre (faute de couleur) avec des tirets. Les pointillés du haut de la figure indique que l'imbrication des deux ensembles se poursuit indéfiniment jusqu'au côté bc . Les autres traits ne sont que des traits de construction. On voit alors que le premier de ces ensembles "joint" a à c en "passant" par u , que le second "joint" b à d en "passant" par v et qu'aucun de ces ensembles ne coupe l'autre en ce sens qu'ils n'ont aucun point commun. Pourtant, ce sont des ensembles connexes en ce sens qu'il n'est pas possible de les partager en deux ensembles "bien séparés". En effet, si on prend le premier de ces ensembles, par exemple, le seul partage envisageable serait de considérer d'une part le "bouquet" des lignes brisées issues de a et d'autre part le segment uc mais il est difficile de dire que ces ensembles sont "bien séparés" puisque le point u (qui appartient à uc) est "adhérent" à l'autre partie.

Il y a bien d'autres paradoxes du même genre dans l'article cité plus haut. Le plus spectaculaire est celui d'un ensemble connexe du plan dont la connexité ne tient qu'à un fil, je veux dire à un point : si on enlève celui-ci l'ensemble se désintègre complètement, devenant ce que les spécialistes appellent un ensemble totalement discontinu.

(1) 2462 après la naissance de Socrate... C'est un mode de datation que la revue souhaitait instaurer. '*Singularité*' a disparu trois ans après sa création, à la fin de cette même année 2462 soit en l'an 1992 de l'ère chrétienne.

Dans cet article, nous nous proposons d'expliquer comment tout cela est possible et nous y ajouterons un exemple assez rigolo d'ensemble connexe dénombrable donné en exercice par BOURBAKI.

A.— Les premiers paradoxes de la connexité

1. Nous supposons connue la topologie élémentaire des espaces $\mathbf{R}^n$ et nous nous contenterons pour le reste des quelques rappels suivants.

On appellera ici **espace topologique** tout ensemble E muni d'une structure définie par la donnée, pour tout élément x de E , d'un ensemble $\mathcal{V}(x)$ de parties de E satisfaisant aux axiomes suivants :

(V₁) L'ensemble $\mathcal{V}(x)$ n'est pas vide.

(V₂) Si $V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$.

(V₃) Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et si $W \supset V$, alors $W \in \mathcal{V}(x)$.

(V₄) Si $V, W \in \mathcal{V}(x)$, alors $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.

(V₅) Si $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \in \mathcal{V}(y)$ pour tout $y \in W$.

Les éléments de E sont appelés **les points** de E , les éléments $V \in \mathcal{V}(x)$ **les voisinages du point x de E** et la famille $(\mathcal{V}(x))_{x \in E}$ la **structure topologique** ou simplement la **topologie** de E .

La dernière propriété énoncée ci-dessus est la plus subtile. Elle signifie que tout voisinage de x est aussi voisinage des points suffisamment voisins de x . Elle se vérifie dans $\mathbf{R}^n$ en prenant pour W une boule ouverte de centre x contenue dans V .

2. Telle que nous l'avons définie, la notion d'espace topologique permet d'introduire les notions bien connues d'ensemble ouvert, d'ensemble fermé, de point adhérent, etc ... que nous utiliserons constamment dans la suite. Elle est intimement liée à la notion d'application continue, qui généralise la notion classique de fonction continue. De façon précise, on dit qu'une application f d'un espace topologique E dans un espace topologique F est **continue en a** (où a est un point donné de E) si pour tout voisinage W de $f(a)$ dans F , il existe un voisinage V de a dans E tel que $f(V) \subset W$. Il revient au même de dire que pour tout voisinage W de $f(a)$, l'ensemble $f^{-1}(W)$ (image réciproque de W par f) est un voisinage de a dans E . On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **continue** si elle est continue en tout point x de E .

Le lecteur vérifiera que cette dernière définition équivaut à dire que l'image réciproque par f de tout ensemble ouvert (resp. fermé) de F est un ensemble ouvert (resp. fermé) de E .

3. Les espaces topologiques les plus communs sont les **espaces métriques** (qui généralisent très naturellement les espaces numériques) et les sous-espaces d'un espace topologique donné. Pour définir ces derniers, considérons un espace topologique E et un sous-ensemble E' de E . Si $x \in E'$, il est naturel d'associer à tout voisinage V de x dans E le sous-ensemble de E' égal à $V \cap E'$ (**trace** de V sur E'). Lorsque V parcourt l'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x dans E , les ensembles

$V \cap E'$ forment un ensemble $\mathcal{V}'(x)$ de sous-ensembles de E' qui vérifient en fait, comme la famille $\mathcal{V}(x)$, les axiomes (V_1) à (V_5) du n° 1. Muni de la structure d'espace topologique correspondante, on dit que E' est un **sous-espace** de E et sa structure est dite **induite** sur E' par la structure topologique de E .

On démontre alors facilement que les ouverts de E' sont les sous-ensembles de E' de la forme $U \cap E'$ où U est un ouvert de E et qu'on a un résultat semblable pour les fermés. Il convient de noter enfin que si E'' est un sous-ensemble de E' , le sous-espace E'' de E' est identique au sous-espace E'' de E ; autrement dit les topologies induites sur E'' par la topologie de E' d'une part et par celle de E de l'autre sont les mêmes.

4. La notion d'espace connexe est censée rendre compte, en topologie générale, de ce qu'est un ensemble d'"un seul tenant". On comprendra mieux ce que c'est en considérant un ensemble qui ne l'est pas, autrement dit un ensemble qui se "dissocie" naturellement.

On dira donc sans barguigner qu'un espace topologique E est **dissociable** s'il est réunion de deux sous-ensembles non vides **sans point adhérent** commun. Dans le cas contraire, on dira que c'est un **espace connexe**.

Un espace non connexe (donc dissociable) E est dit ordinairement **disconnexe**, mais le mot n'est ni très joli ni très bien formé. Enfin, une partie A d'un espace topologique E est dite connexe (et on dit que A est un **ensemble connexe** dans E) si le sous-espace A de E est connexe.

5. Cette définition étonnera peut-être certains lecteurs. Rassurons-les en leur demandant de voir avec nous que les propriétés suivantes sont équivalentes pour un espace topologique E donné.

- (i) E est dissociable (définition ci-dessus)
- (ii) Il existe dans E deux sous-ensembles fermés non vides F et G tels que $F \cup G = E$ et $F \cap G = \emptyset$.
- (iii) Il existe dans E deux sous-ensembles ouverts non vides U et V tels que $U \cup V = E$ et $U \cap V = \emptyset$.
- (iv) Il existe dans E un ensemble A non vide et différent de E qui est à la fois ouvert et fermé.

Supposons que E soit réunion de deux sous-ensembles A et B non vides sans point adhérent commun. Comme tout point de A est adhérent à A et tout point de B adhérent à B , il résulte de l'hypothèse que $A \cap B = \emptyset$. En d'autres termes, A et B sont des parties complémentaires de E . Mais il résulte aussi de l'hypothèse qu'un point adhérent à A ne peut appartenir à B . C'est donc un élément de A . Cela veut dire que $A = \overline{A}$, donc que A est fermé. Le même raisonnement montre que B est fermé. D'où la propriété (ii) avec $F = A$ et $G = B$. Il est ensuite facile de voir que (ii) implique (iii) et que (iii) implique (iv) en prenant $U = F$ et $V = G$ dans le premier cas et $A = U$ dans le second.

Enfin, si A est un sous-ensemble non vide et différent de E , à la fois ouvert et

fermé, il en est naturellement de même de A^c (*). On a donc $A = \overline{A}$ et $B = \overline{B}$ et par conséquent $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. D'où (i) puisque $A \cup B = E$.

6. Les exemples les plus simples d'espace sont fournis par les espaces numériques $\mathbf{R}^n$ et en particulier par la droite réelle $\mathbf{R}$.

Plus généralement, tout sous-ensemble convexe de $\mathbf{R}^n$ est connexe et donc en particulier tout intervalle I de $\mathbf{R}$ est connexe. Ce dernier résultat admet d'ailleurs une réciproque, facile à établir, selon laquelle tout ensemble connexe de $\mathbf{R}$ est convexe, et par conséquent un intervalle.

Outre les exemples précédents, nous aurons besoin de quelques résultats généraux sur les ensembles connexes d'un espace topologique quelconque. Il y en a trois à retenir :

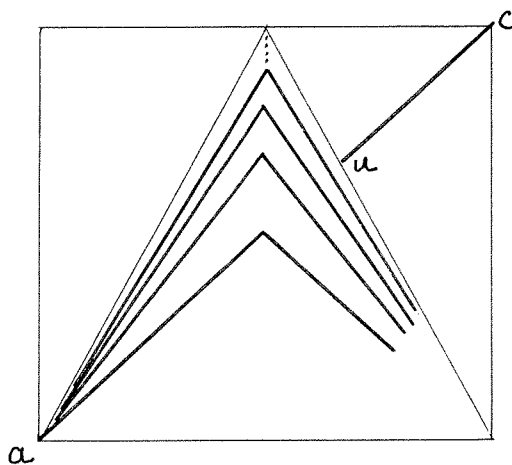
a) Toute réunion d'ensembles connexes A_i d'un espace topologique E est connexe si tous les A_i possèdent au moins un point en commun. En particulier, la réunion de deux ensembles connexes A et B de E est connexe si $A \cap B \neq \emptyset$.

b) Si A est un ensemble connexe d'un espace topologique E et si f est une application continue de E dans un second espace topologique F , l'image directe $f(A)$ de A par f est un ensemble connexe dans F . On dira en bref que l'**image continue** d'un connexe est un connexe. En particulier, un **arc continu** dans un espace topologique E est un connexe de E si on appelle ainsi l'image continue dans E d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ (où $a < b$).

c) Si A est un sous-ensemble connexe d'un espace topologique E , il en est de même de $\overline{A}$ et plus généralement de tout ensemble B tel que $A \subset B \subset \overline{A}$.

En termes plus parlants, on peut dire qu'un ensemble connexe le reste si on lui ajoute des points adhérents.

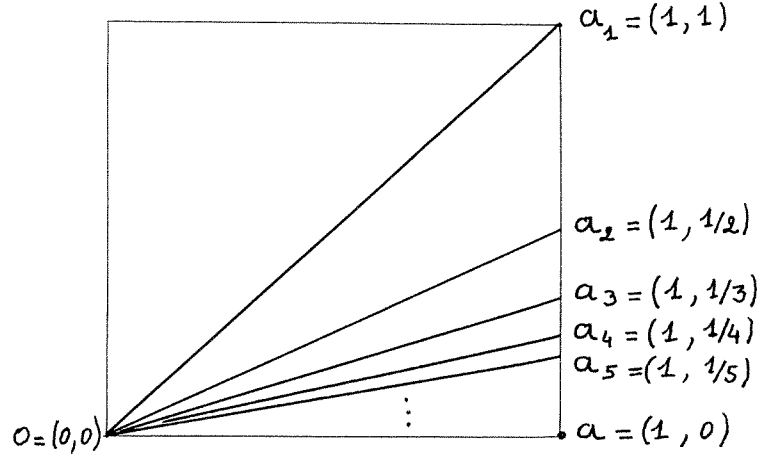
7. Ce sont les propriétés précédentes qui permettent de démontrer que l'ensemble E de l'introduction est connexe :



(*) C'est-à-dire le complémentaire de A dans E .

En premier lieu, il est facile de voir que la réunion R des lignes brisées issues de a est connexe en utilisant la propriété a) du n° 6. Comme le point u est adhérent par construction à R , on déduit de la propriété c) que $R \cup \{u\}$ est connexe. Le résultat final (la connexité de E) découle alors facilement de b) puisque le segment $[u, c]$ est connexe.

Un exemple plus classique et plus simple à concevoir est donné par la figure suivante :



qui représente l'ensemble $E = (U_{n=1}^{\infty} S_n) \cup \{a\}$ où S_n est le segment qui joint o à a_n . C'est aussi un ensemble connexe car a est évidemment adhérent à la réunion des S_n .

Le lecteur pourra s'amuser à démontrer que E n'est pas "connexe par arcs" en ce sens qu'il n'existe pas d'arc continu joignant dans E le point a à un autre point de E .

8. Les paradoxes précédents reposent essentiellement sur la propriété b) du n° 6. Pour éviter toute discussion, il serait bon de démontrer cette propriété.

Supposons donc qu'on ait un ensemble A connexe dans un espace topologique E et un ensemble B tel que $A \subset B \subset \bar{A}$. Il s'agit de voir que B est connexe. Raisonnons par l'absurde en supposant que cela ne soit pas le cas, donc que B puisse être dissocié en deux ouverts non vides. Rien n'empêche d'écrire ces ouverts de B sous la forme $U \cap B$ et $V \cap B$ où U et V sont deux ouverts de l'espace ambiant E . On a alors $(U \cap B) \cap (V \cap B) = \emptyset$, autrement dit $U \cap V \cap B = \emptyset$ et $(U \cap B) \cup (V \cap B) = B$, autrement dit $(U \cup V) \cap B = B$, relation qui veut dire aussi que $B \subset U \cup V$. Comme $A \subset B$, on déduit de cette dernière relation que $A \subset U \cup V$, ce qui s'écrit aussi $(U \cup V) \cap A = A$, c'est-à-dire $(U \cap A) \cup (V \cap A) = A$. Comme $U \cap A$ et $V \cap A$ sont des ouverts de A et que $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$, il résulte de toutes ces propriétés et de l'hypothèse que l'un des ensembles $U \cap A$ ou $V \cap A$ est vide (et l'autre égal à A). Supposons par exemple que ce soit $U \cap A$ qui soit vide et comme $U \cap B$ ne l'est pas, considérons un élément $x \in U \cap B$. Comme $x \in B, x \in \bar{A}$. Comme $x \in U$ et que U est un ouvert de E , U est un voisinage de x . Par suite, U doit rencontrer A , ce qui est absurde puisque $U \cap A = \emptyset$. CQFD.

Nous laissons le lecteur démontrer les autres affirmations du n° 6 et nous passons à un autre type de pathologie avec les espaces connexes dénombrables.

B.— Connexité et dénombrabilité

1. Rappelons que selon N. BOURBAKI, un ensemble E est dit **dénombrable** s'il peut être mis en correspondance bijective avec un sous-ensemble de $\mathbf{N}$. Il revient au même de dire que E est fini ou en correspondance bijective avec $\mathbf{N}$.

Comme exemples d'ensembles dénombrables, on peut citer l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, n'importe quel sous-ensemble d'un ensemble dénombrable et l'image d'un ensemble dénombrable par une application quelconque. Comme exemples d'ensembles non dénombrables, on a l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels et n'importe quel intervalle non vide et non réduit à un point.

2. Dans un espace numérique $\mathbf{R}^n$, il est rare qu'un sous-ensemble N dénombrable soit connexe : cela n'arrive que dans les cas triviaux où N est vide ou réduit à un point. En fait, nous allons voir qu'un tel ensemble est **totalelement discontinu**, ce qui veut dire que tout sous-ensemble C de N qui est connexe est nécessairement vide ou réduit à un point. Pour le voir, nous nous contenterons du cas $n = 2$, le cas général pouvant se faire, sans difficultés majeures, sur le même modèle.

Si C est un sous-ensemble connexe de N , l'image de C par la projection $(x, y) \mapsto x$ est un connexe de $\mathbf{R}$ car la projection en question est une application évidemment continue. C'est donc un intervalle I de $\mathbf{R}$, mais un intervalle qui est dénombrable comme l'ensemble C lui-même. Cela ne peut avoir lieu que si I est vide ou réduit à un point a .

On raisonne de même pour l'image de C par la projection $(x, y) \mapsto y$ qui est donc un intervalle J de $\mathbf{R}$, vide ou réduit à un point b . On a ainsi $C = \emptyset$ (si $I = \emptyset$ ou $J = \emptyset$) ou $C = \{(a, b)\}$. D'où le résultat.

3. Le même phénomène a lieu, en fait, si on remplace l'espace numérique $\mathbf{R}^n$ par n'importe quel espace topologique E **métrisable** c'est-à-dire par un espace dont la topologie peut être définie par une certaine distance d .

Pour le voir, considérons un sous-ensemble dénombrable N de E et une partie connexe C de N . Supposons C non vide, choisissons un élément a dans C et associons à tout point x de E le nombre réel $d(a, x)$. Comme l'application de E dans $\mathbf{R} : x \mapsto d(a, x)$ ainsi définie est continue (c'est une conséquence élémentaire de l'inégalité triangulaire), l'image de C par cette application est un ensemble connexe de $\mathbf{R}$, donc un intervalle I , mais, là encore, un intervalle dénombrable. Comme I n'est pas vide, car il contient le nombre $0 = d(a, a)$, il est nécessairement réduit à cet élément. Cela veut dire aussi que $d(a, x) = 0$ pour tout $x \in C$. Comme la relation $d(a, x) = 0$ équivaut à $x = a$, on voit ainsi finalement que $C = \{a\}$. CQFD.

4. On déduit de ce qui précède qu'un espace topologique dénombrable et connexe ne peut être métrisable. Des exemples très simples peuvent néanmoins en être

donnés avec des topologies qui n'ont pas un grand intérêt. Ainsi, sur un ensemble E quelconque (dénombrable ou non), on peut définir une topologie particulière pour laquelle les seuls ouverts sont $\emptyset$ et E . Muni de cette topologie, E est toujours connexe. Mais l'exemple n'est pas intéressant car si x est un point de E , il n'y a qu'un voisinage de x dans E , qui est E lui-même. Il en résulte que si x et y sont deux points distincts, il est impossible de trouver un voisinage V de x et un voisinage W de y tels que $V \cap W = \emptyset$; en fait, ici, on a toujours $V = W = E$...

La propriété que nous venons de citer, concernant deux points distincts, joue un rôle important en topologie générale. On dit, de façon précise, qu'un espace topologique E est **séparé** si pour deux points distincts quelconques x et y de E , il existe au moins un voisinage V de x et un voisinage W de y tels que $V \cap W = \emptyset$.

A priori, un espace séparé possède un assez grand nombre de voisinages et par conséquent un assez grand nombre d'ensembles ouverts ou fermés. Les espaces connexes séparés sont donc plus intéressants que les autres. Le premier exemple d'espace connexe séparé et dénombrable a été découvert par le mathématicien russe (on n'ose plus dire soviétique) Paul URYSOHN, celui-là même qui s'est noyé en 1924, à Batz-sur-Mer (Loire-Inférieure) à l'âge de 26 ans. Je ne connais pas l'exemple en question, mais je peux donner celui dont BOURBAKI propose l'étude en exercice (c'est peut-être le même!) dans son livre de Topologie générale (2).

5. Voici en tout cas de quoi il s'agit. On commence par considérer l'ensemble $E = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}_+$ des couples (x, y) de rationnels pour lesquels l'"ordonnée" y est un nombre ≥ 0 . C'est un ensemble dénombrable, donc un sous-ensemble totalement discontinu de $\mathbf{R}^2$. Mais ce n'est pas la topologie induite sur E par la topologie de $\mathbf{R}^2$ qui nous importe ici, mais une topologie toute différente, dépendant d'un nombre irrationnel θ choisi une fois pour toutes et qu'on supposera positif pour fixer les idées. Si (x, y) est un élément de E et si ε est un réel > 0 arbitraire, on posera dans la suite

$$I_\varepsilon(x, y) =]x - \theta y - \varepsilon, x - \theta y + \varepsilon[, \quad J_\varepsilon(x, y) =]x + \theta y - \varepsilon, x + \theta y + \varepsilon[\\ R_\varepsilon(x, y) = I_\varepsilon(x, y) \cap \mathbf{Q}, \quad S_\varepsilon(x, y) = J_\varepsilon(x, y) \cap \mathbf{Q}$$

et

$$V_\varepsilon(x, y) = \{(x, y)\} \cup R_\varepsilon(x, y) \times \{0\} \cup S_\varepsilon(x, y) \times \{0\}.$$

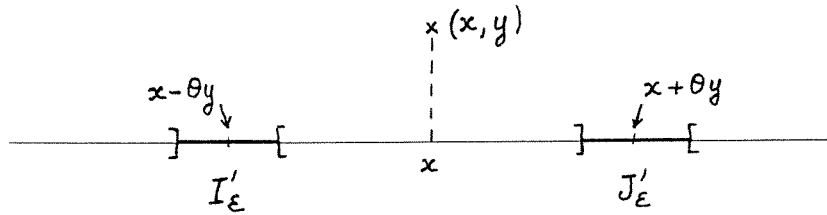
Les deux premiers ensembles (qu'on écrira aussi I_ε et J_ε lorsqu'aucune confusion ne sera possible) sont des intervalles de $\mathbf{R}$, de longueur 2ε , et de centres respectifs $x - \theta y$ et $x + \theta y$. Les deux suivants sont les traces des intervalles précédents sur $\mathbf{Q}$. Tous ces ensembles sont des sous-ensembles de $\mathbf{R}$. Si A est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ quelconque, il peut être commode de lui associer l'ensemble $A \times \{0\}$ (que l'on notera A' en abrégé) et qui est, si on veut, l'image canonique de A dans $\mathbf{R}^2$ ou plus précisément cette image sur l'axe des abscisses. Avec ces conventions (et

(2) N. BOURBAKI, TG, Chap. I, § 11, ex. 1, p. 115.

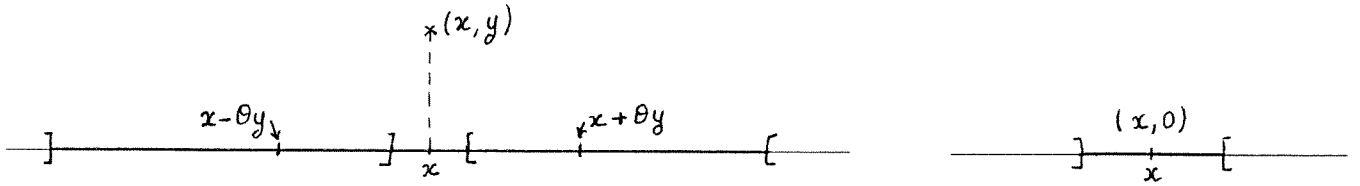
en écrivant R_ε et S_ε au lieu de $R_\varepsilon(x, y)$ et $S_\varepsilon(x, y)$, on a

$$V_\varepsilon(x, y) = V_\varepsilon = \{(x, y)\} \cup R'_\varepsilon \cup S'_\varepsilon.$$

On notera que R'_ε est l'ensemble des points rationnels de l'ensemble $I'_\varepsilon(x, y)$ alors que S'_ε est l'ensemble analogue associé à J'_ε . On aura une idée de ce qu'est l'ensemble $V_\varepsilon(x, y)$ en examinant le dessin suivant, qui suppose $y > 0$ et ε suffisamment petit.



Le même ensemble prend un aspect différent si ε est assez grand pour que I_ε et J_ε se rejoignent. Enfin, si $y = 0$, on a $I_\varepsilon = J_\varepsilon =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ et donc $V_\varepsilon(x, y) = V_\varepsilon(x, 0) = (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \mathbb{Q})'$.



Dans la suite, comme on l'a fait en partie pour ces dessins, il nous arrivera d'identifier un nombre réel x avec le point $(x, 0)$ et donc de confondre un sous-ensemble A de R avec l'ensemble $A' = A \times \{0\}$.

6. Cela étant, et aussi bizarre que cela puisse paraître, il existe sur l'ensemble $E = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+$ considéré, une topologie et une seule pour laquelle les voisinages d'un point (x, y) quelconque de E sont les sous-ensembles de E qui contiennent un ensemble de la forme $V_\varepsilon(x, y)$ pour au moins un réel $\varepsilon > 0$.

On dit encore que pour cette topologie les ensembles $V_\varepsilon(x, y)$ forment, lorsque ε parcourt l'ensemble des réels > 0 , un **système fondamental de voisinages** de (x, y) .

Appelons en effet $\mathcal{V}(x, y)$ l'ensemble des sous-ensembles V de E pour lesquels il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $V_\varepsilon(x, y) \subset V$. Il est alors évident que les axiomes (V_1) , (V_2) et (V_3) , caractérisant la structure d'espace topologique (cf. § A), sont satisfaits. Pour s'assurer de l'axiome (V_4) , il suffit de noter que si on a $V_\varepsilon(x, y) \subset V$ et $V_\eta(x, y) \subset W$ (pour deux réels ε et $\eta > 0$ donnés), alors $V_\varepsilon(x, y) \cap V_\eta(x, y) \subset V \cap W$ avec $V_\varepsilon(x, y) \cap V_\eta(x, y) = V_\tau(x, y)$ où τ est le réel > 0 égal à $\inf(\varepsilon, \eta)$, la vérification de cette dernière propriété étant immédiate.

Reste à établir l'axiome (V_5) selon lequel si $V \in \mathcal{V}(x, y)$ il existe un ensemble $W \in \mathcal{V}(x, y)$ tel que $V \in \mathcal{V}(x', y')$ quel que soit $(x', y') \in W$.

On peut prouver cela en prenant pour W un des ensembles $V_\varepsilon(x, y)$ contenus dans V . Le fait que $V \in \mathcal{V}(x', y')$ est évident si $(x', y') = (x, y)$. On peut donc supposer que (x', y') appartient à I'_ε ou à J'_ε , ce qui signifie que $y' = 0$ et que x' appartient à I_ε ou à J_ε . Supposons que $x' \in I_\varepsilon =]x - \theta y - \varepsilon, x - \theta y + \varepsilon[$. Comme il s'agit d'un intervalle ouvert, on peut trouver un nombre $\eta > 0$ tel que $]x' - \eta, x' + \eta[\subset I_\varepsilon$. D'après ce qu'on a noté plus haut sur les ensembles $V_\varepsilon(x, y)$ lorsque $y = 0$, cette relation s'écrit aussi $V_\eta(x', y') = V_\eta(x', 0) \subset I'_\varepsilon$ et donc $V_\eta(x', y') \subset (I_\varepsilon \cap \mathbf{Q})' \subset V_\varepsilon(x, y) \subset V$. Cela montre que $V \in \mathcal{V}(x', y')$, ce qui est le résultat cherché. On raisonne de même lorsque $x' \in J_\varepsilon$.

Nous supposons dans la suite que l'ensemble dénombrable $E = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}_+$ est muni de la topologie que nous venons de définir : toutes les notions topologiques dont nous pourrions parler dans E (ouvert, fermé, adhérence, voisinage, etc) seront, sauf mention expresse du contraire, relatifs à cette topologie.

7. La première chose à faire est de démontrer que l'espace topologique E ainsi constitué est séparé.

On s'appuiera essentiellement sur le fait que θ est irrationnel, ce qui implique que la relation $r + \theta s = 0$ n'est possible, avec des coefficients rationnels, que si $r = s = 0$.

Commençons par démontrer que si (x, y) et (x', y') sont deux points distincts de E , alors chacun des éléments $x \pm \theta y$ est différent de chacun des éléments $x' \pm \theta y'$. C'est facile à voir pour $x + \theta y$ et $x' + \theta y'$ car si on avait $x + \theta y = x' + \theta y'$, on aurait $x - x' + \theta(y - y') = 0$, donc nécessairement $x - x' = 0$ et $y - y' = 0$, contrairement au fait que $(x, y) \neq (x', y')$. On raisonne de même avec $x - \theta y$ et $x' - \theta y'$. Si on avait $x + \theta y = x' - \theta y'$, on aurait $(x - x') + \theta(y + y') = 0$. Cela entraînerait $x = x'$ et $y + y' = 0$. Comme y et y' sont des rationnels ≥ 0 on aurait aussi $y = y' = 0$. D'où la même contradiction que ci-dessus.

On raisonnerait enfin de même avec $x - \theta y$ et $x' + \theta y'$.

Comme $x + \theta y$ est différent de $x' \pm \theta y'$, le nombre

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \inf(|x + \theta y - x' - \theta y'|, |x + \theta y - x' + \theta y'|)$$

est > 0 . Pour une raison analogue, il en est de même de

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \inf(|x - \theta y - x' - \theta y'|, |x - \theta y - x' + \theta y'|).$$

Posons $\varepsilon = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et démontrons que, alors

$$[I_\varepsilon(x, y) \cup J_\varepsilon(x, y)] \cap [I_\varepsilon(x', y') \cup J_\varepsilon(x', y')] = \emptyset.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant d'abord qu'il existe un nombre u appartenant à $I_\varepsilon(x, y) \cap I_\varepsilon(x', y')$. Cela veut dire que $|x - \theta y - u| < \varepsilon$ et $|x' - \theta y' - u| < \varepsilon$.

On a donc

$$\begin{aligned} |(x - \theta y) - (x' - \theta y')| &\leq |x - \theta y - u| + |u - x' + \theta y'| \\ &< 2\varepsilon \leq 2\varepsilon_2 \leq |x - \theta y - x' + \theta y'| \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

On raisonnerait de même avec les trois autres cas.

Si on pose $U_\varepsilon(x, y) = R'_\varepsilon(x, y) \cup S'_\varepsilon(x, y)$ et $U_\varepsilon(x', y') = R'_\varepsilon(x', y') \cup S'_\varepsilon(x', y')$, on déduit de ce qui précède que $U_\varepsilon(x, y) \cap U_\varepsilon(x', y') = \emptyset$. Il n'est pas difficile alors de voir que $V_\varepsilon(x, y) \cap V_\varepsilon(x', y') = \emptyset$ puisque $V_\varepsilon(x, y) = U_\varepsilon(x, y) \cup \{(x, y)\}$ et $V_\varepsilon(x', y') = U_\varepsilon(x', y') \cup \{(x', y')\}$: s'il y avait un élément commun entre ces deux ensembles, il faudrait soit que $(x, y) \in U_\varepsilon(x', y')$, soit que $(x', y') \in U_\varepsilon(x, y)$; dans le premier cas, cela impliquerait que $y = 0$, donc que $(x, y) \in U_\varepsilon(x, y)$ ce qui est impossible, dans le second que $y' = 0$, donc que $(x', y') \in U_\varepsilon(x', y')$, ce qui est impossible aussi. D'où le résultat annoncé.

8. Pour terminer cette petite étude (et démontrer que E est connexe), nous allons examiner la forme des voisinages fermés d'un point. De façon précise, nous allons chercher à quelles conditions un point (x', y') de E est adhérent à un voisinage du type $V_\varepsilon(x, y)$ de (x, y) . Une condition sûrement suffisante est que $x' + \theta y' \in [x + \theta y - \varepsilon, x + \theta y + \varepsilon]$ car si cette relation a lieu, n'importe quel intervalle ouvert de centre $x' + \theta y'$ rencontre nécessairement $J_\varepsilon(x, y)$. Comme l'intersection est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, il s'y trouve des nombres rationnels et on en déduit que tout voisinage de (x', y') rencontre $V_\varepsilon(x, y)$. On a bien sûr la même conclusion si $x' - \theta y' \in [x - \theta y - \varepsilon, x - \theta y + \varepsilon]$, si $x' - \theta y' \in [x + \theta y - \varepsilon, x + \theta y + \varepsilon]$ ou si $x' - \theta y' \in [x - \theta y - \varepsilon, x - \theta y + \varepsilon]$. Par contre, si aucune de ces conditions n'est réalisée, il est impossible que (x', y') soit adhérent à $V_\varepsilon(x, y)$. En effet, avec cette hypothèse, on a simultanément

$$\begin{aligned} |(x + \theta y) - (x' + \theta y')| &> \varepsilon & |(x - \theta y) - (x' + \theta y')| &> \varepsilon \\ |(x + \theta y) - (x' - \theta y')| &> \varepsilon & |(x - \theta y) - (x' - \theta y')| &> \varepsilon. \end{aligned}$$

Si on appelle η le plus petit des nombres figurant dans les premiers membres de ces inégalités, on a $\eta > \varepsilon$. On va en déduire que

$$V_{\eta-\varepsilon}(x', y') \cap V_\varepsilon(x, y) = \emptyset$$

ce qui démontrera notre propos.

Supposons qu'il y ait un point commun entre ces deux ensembles. S'il s'agit d'un point qui n'est pas sur l'axe des abscisses, ce ne peut être que (x, y) et (x', y') en même temps. Mais l'égalité $(x, y) = (x', y')$ qui résulte de cette hypothèse est impossible, vu par exemple la relation $|(x + \theta y) - (x' + \theta y')| > \varepsilon > 0$. Il s'agit donc d'un point de la forme $(u, 0)$ et qui vérifie par conséquent (que yy' soit nul ou non) les deux relations

$$|x \pm \theta y - u| < \varepsilon \text{ et } |x' \pm \theta y' - u| < \eta - \varepsilon$$

avec des signes convenables. On a donc, avec ces mêmes signes,

$$|(x \pm \theta y) - (x' \pm \theta y')| \leq |(x \pm \theta y) - u| + |(x' \pm \theta y') - u| < \varepsilon + \eta - \varepsilon = \eta$$

alors que par hypothèse $\eta \leq |(x \pm \theta y) - (x' \pm \theta y')|$; d'où une éclatante contradiction.

9. Les conditions trouvées ont en fait une interprétation géométrique simple. La première d'entre elles $x' + \theta y' \in [x + \theta y - \varepsilon, x + \theta y + \varepsilon]$ s'écrit aussi

$$x + \theta y - \varepsilon \leq x' + \theta y' \leq x + \theta y + \varepsilon$$

ce qui fait deux inégalités à examiner.

La première inégalité signifie que (x', y') appartient à un certain demi-plan limité par la droite d'équation $x' + \theta y' = x + \theta y - \varepsilon$ (l'équation étant en x' et y'); la seconde que (x', y') appartient à un autre demi-plan limité par la droite d'équation $x' + \theta y' = x + \theta y + \varepsilon$. Comme ces deux droites sont parallèles (leur coefficient directeur commun est $-\frac{1}{\theta}$), on voit finalement que la condition ci-dessus caractérise les points (x', y') d'une bande de plan, bande de plan qui contient d'ailleurs le point (x, y) . On notera que le point d'abscisse $x + \theta y$ de l'axe des abscisses est aussi un point de cette bande et que la droite passant par ce dernier point et de coefficient directeur $-\frac{1}{\theta}$ passe par (x, y) , tout en étant la droite "centrale" de la bande.

On a des conclusions tout à fait semblables avec la condition $x' - \theta y' \in [x - \theta y - \varepsilon, x - \theta y + \varepsilon]$ qui s'écrit

$$x - \theta y - \varepsilon \leq x' - \theta y' \leq x - \theta y + \varepsilon$$

sauf que la droite centrale passe par $(x - \theta y, 0)$ et que son coefficient directeur est $\frac{1}{\theta}$.

Enfin, les deux conditions restantes $x' + \theta y' \in [x - \theta y - \varepsilon, x - \theta y + \varepsilon]$ et $x' - \theta y' \in [x + \theta y - \varepsilon, x + \theta y + \varepsilon]$ qui s'écrivent

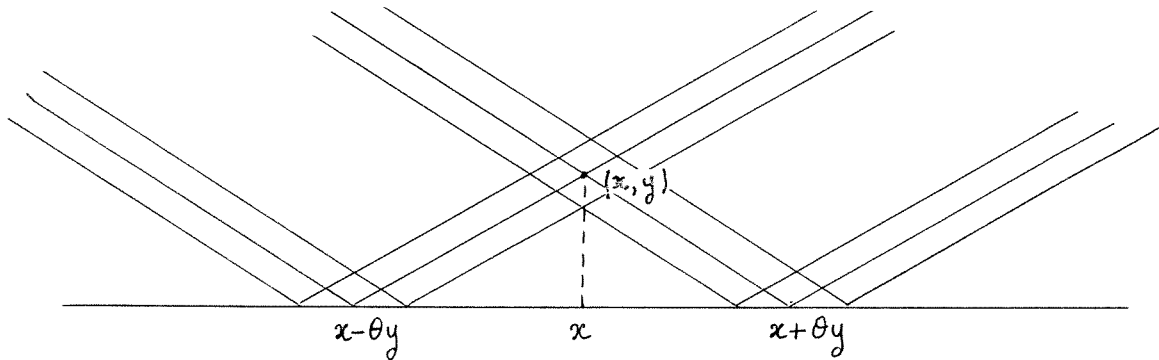
$$x - \theta y - \varepsilon \leq x' + \theta y' \leq x - \theta y + \varepsilon$$

et

$$x + \theta y - \varepsilon \leq x' - \theta y' \leq x + \theta y + \varepsilon$$

donnent lieu à deux nouvelles bandes dont les droites centrales passent respectivement par $(x - \theta y, 0)$ et $(x + \theta y, 0)$ et dont les coefficients directeurs respectifs sont encore $-\frac{1}{\theta}$ et $\frac{1}{\theta}$. Dans ces deux derniers cas, il n'y a pas de raison pour que les droites centrales passent par (x, y) .

Mais on comprendra mieux tout cela avec un dessin approprié



étant entendu que les “branches” de ce W peuvent être plus ou moins enchevêtrées (lorsque ε est assez grand), voire confondues en partie (lorsque $y = 0$) et que les seuls points à prendre en considération dans $V_\varepsilon(x, y)$, comme dans $\overline{V}_\varepsilon(x, y)$, sont les points à coordonnées rationnelles.

10. Cela étant, il est “géométriquement” évident que si (x, y) et (x', y') sont deux points quelconques de E , alors $\overline{V}_\varepsilon(x, y)$ rencontre $\overline{V}_\eta(x', y')$ quels que soient les réels $\varepsilon, \eta > 0$. Le lecteur qui aurait des doutes peut toujours faire une démonstration en bonne et due forme...

On déduit aisément de tout cela que tout voisinage fermé d'un point (x, y) dans E rencontre tout voisinage fermé d'un autre point (x', y') de E , ce qui n'est pas si banal, surtout si on se réfère aux espaces topologiques dont on a l'habitude!

La connexité de l'espace topologique E est alors facile à démontrer. Si celle-ci n'avait pas lieu, il existerait deux ouverts U et U' non vides de E tels que $U \cup U' = E$ et $U \cap U' = \emptyset$. Ce serait alors aussi des fermés. En appelant (x, y) un point de E appartenant à U et (x', y') un point de E appartenant à U' on aurait alors un voisinage fermé de (x, y) sans point commun avec un voisinage fermé de (x', y') , ce qui est contraire à ce qu'on vient de démontrer!

C. L'éventail de Knaster-Kuratowski

1. La description de ce dernier exemple très particulier suppose connu un autre espace plus célèbre que l'on appelle l'ensemble triadique de Cantor. Pour définir celui-ci, on considère d'abord l'ensemble K_0 égal à l'intervalle $[0, 1]$ que l'on partage en trois intervalles égaux. En supprimant l'intervalle intermédiaire ouvert $] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} [$ (appelé “tiers médian”), il reste un ensemble fermé K_1 constitué des deux intervalles $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$.

Ce qu'on a fait alors avec $[0, 1]$, on le recommence avec $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$: on les divise chacun en trois et on supprime leur tiers médian. Il reste un nouvel ensemble fermé K_2 formé de quatre intervalles $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ et $[\frac{8}{9}, 1]$.

On recommence ensuite avec ces quatre intervalles la même opération pour définir K_3 , et ainsi de suite. Une fois définie la suite illimitée de ces ensembles K_n , on ne

conserve que leurs points communs : l'ensemble K de ces points est par définition l'**ensemble triadique de Cantor**. En d'autres termes, on a

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n.$$

2. L'ensemble ainsi défini a de nombreuses propriétés remarquables qui en font un objet de choix pour les mathématiciens. Nous nous contenterons d'utiliser les résultats suivants :

(i) K est un ensemble fermé dans $\mathbf{R}$.

C'est une conséquence immédiate de la définition de K comme une intersection d'ensembles fermés.

(ii) K est totalement discontinu.

Dans le présent contexte, cela revient à dire que K ne contient aucun intervalle de longueur non nulle. Cela résulte facilement de ce que K_n est constitué d'intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$: si on suppose qu'il existe un intervalle I inclus dans K de longueur $l > 0$ et si on choisit un entier n tel que $\frac{1}{3^n} < l$, on aboutit à une contradiction car I doit être inclus dans K_n , donc dans un de ces intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$.

(iii) Il existe dans K un sous-ensemble dénombrable L partout dense.

Cette dernière propriété signifie que tout voisinage d'un élément x de K contient au moins un élément de L .

L'ensemble L dont on se servira ici est constitué des nombres 0 et 1 (extrémités de l'intervalle $K_0 = [0, 1]$), des nombres $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ (qui sont extrémités des intervalles constituant l'ensemble K_1), des nombres $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$ et $\frac{8}{9}$ (autres extrémités qui s'introduisent quand on considère les intervalles constituant l'ensemble K_2), et ainsi de suite.

Il est clair que toutes ces extrémités appartiennent en fait à tous les ensembles K_n , donc finalement à K ; on dira que ce sont les **points limites** de K . Leur ensemble L est dénombrable, comme réunion dénombrable d'ensembles finis et pour vérifier que tout voisinage V d'un élément x de K contient un point de L , il suffit de considérer un réel $\varepsilon > 0$ tel que $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset V$ (V étant ici considéré comme un voisinage dans $\mathbf{R}$, ce qui n'est pas gênant) et de choisir un entier n tel que $\frac{1}{3^n} \leq \varepsilon$: le point x appartient alors à un des intervalles constituant K_n et si a est une des extrémités de l'intervalle en question, on a $|x - a| \leq \frac{1}{3^n} \leq \varepsilon$; d'où le résultat.

En fait, comme il y a deux extrémités possibles pour l'intervalle utilisé, on peut même affirmer que tout voisinage V de x contient au moins un élément de K autre que x . Cela nous fournit la dernière propriété de K qui nous sera utile :

(iv) L'ensemble K n'a pas de point isolé.

3. On peut démontrer (et on verra ci-dessous une démonstration indirecte) que K n'est pas dénombrable – ce qui donne tout son intérêt à la propriété (iii) ci-dessus. En attendant cette démonstration, il nous faut admettre qu'on ne voit pas pourquoi le complémentaire M de L dans K ne pourrait pas être vide. Cela ne nous empêchera pas de considérer cet ensemble dans la suite !

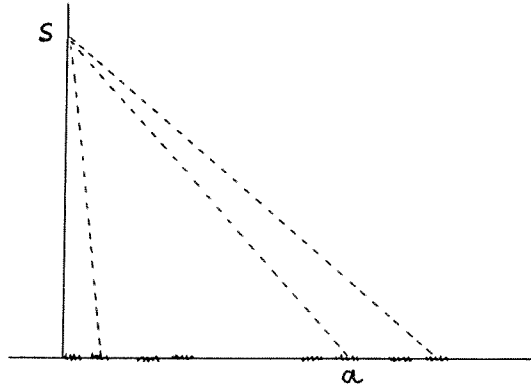
4. Ces résultats étant acquis, considérons dans $\mathbf{R}^2$ le point $s = (0, 1)$ et pour tout $a \in K$, le segment S_a joignant s au point $(a, 0)$. La réunion des segments S_a est un “éventail” très joli (qu’on pourrait appeler l’éventail de Cantor), mais ce n’est pas lui qui nous intéresse vraiment ici. En fait, sur chacun des segments S_a on considère soit l’ensemble Q_a des points (x, y) dont l’ordonnée y est rationnelle, soit l’ensemble I_a des points (x, y) dont l’ordonnée y est irrationnelle. C’est le premier ensemble que l’on utilisera si $a \in L$ et le second sinon, c’est-à-dire si $a \in M$. Pour mieux comprendre, on posera

$$E_a = \begin{cases} Q_a & \text{si } a \in L \\ I_a & \text{sinon.} \end{cases}$$

L’éventail de **Knaster-Kuratowski** (du nom de deux mathématiciens polonais dont le premier est moins connu que le second) est alors, par définition, l’ensemble

$$E = \bigcup_{a \in K} E_a.$$

C’est un ensemble qu’il n’est pas facile de représenter



et qui paraît avoir beaucoup de trous. . . Les apparences sont cependant trompeuses. Comme on l’a annoncé, c’est un ensemble connexe, mais dont la connexité ne tient que par le point s : si on enlève s , ce qui reste est totalement discontinu.

5. Il est facile de démontrer que $E - \{s\}$ est effectivement totalement discontinu dans $\mathbf{R}^2$. On commence, pour cela, par remarquer que tout point (x, y) de $E - \{s\}$ est évidemment sur un segment S_a nécessairement unique (i.e. où a est nécessairement unique). Si on associe à tous les couples (x, y) de $E - \{s\}$ l’unique élément a de K tel que $(x, y) \in S_a$, on définit une application p de $E - \{s\}$ dans K , qui est la restriction d’une projection centrale, de centre s , et qui est bien sûr continue. Si C est alors une partie connexe non vide de $E - \{s\}$ son image par p est un ensemble connexe, donc un intervalle, mais comme c’est un intervalle contenu dans K et que K est totalement discontinu (propriété (ii) du n° 2), $p(C)$ est nécessairement réduit à un point a de K , ce qui veut dire que C est contenu dans le segment S_a .

Si maintenant on projette C sur l'axe des ordonnées, cette fois-ci par projection orthogonale, on définit une application $q : (x, y) \mapsto y$, évidemment continue, qui transforme C en un intervalle de $\mathbf{R}$. Comme $C \subset S_a \subset Q_a$ si $a \in L$ et que $C \subset S_a \subset I_a$ sinon, on voit que l'intervalle $q(C)$ obtenu ne contient que des nombres rationnels dans le premier cas ou que des nombres irrationnels dans le second. Cela n'est possible que si $q(C)$ est réduit à un point b . On voit ainsi que C est à l'intersection du segment oblique S_a et d'une droite horizontale. Il est donc bien réduit à un point.

6. Il est plus difficile, on s'en doute, de démontrer que E est connexe. Le raisonnement qu'on va faire utilise un profond théorème de topologie qu'on appelle le **théorème de Baire** et selon lequel dans un espace métrique complet les ensembles que Bourbaki qualifie de “maigres” n'ont pas de point intérieur.

Indiquons pour ceux qui l'ignoreraient qu'un ensemble est dit **maigre**, dans un espace topologique E , s'il est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles fermés de E , tous sans point intérieur. Un sous-ensemble d'un ensemble maigre est maigre; une réunion dénombrable d'ensembles maigres est maigre et tout ensemble dénombrable A formé de points non isolés de E est maigre aussi si E est séparé (§ B, n° 4) : ces hypothèses impliquent en effet que pour tout $a \in A$, $\{a\}$ est fermé sans être ouvert – donc sans point intérieur.

Un ensemble maigre peut être “boursoufflé” – je veux dire avec un intérieur non vide – mais cela n'arrive pas dans un espace métrique complet : c'est le théorème de Baire, que, pour les besoins de la cause, nous admettrons provisoirement, en attendant de le démontrer *in fine*.

En fait, nous appliquerons le théorème de Baire à l'ensemble triadique de Cantor qui hérite de $\mathbf{R}$ le fait d'être métrique et complet, cette dernière particularité venant de ce qu'il est fermé dans $\mathbf{R}$ (n° 2, (i)).

7. Pour démontrer que l'éventail de Knaster-Kuratowski E est connexe, plaçons-nous dans l'hypothèse où l'on dispose de deux ouverts U et V de E tels que $U \cup V = E$ et $U \cap V = \emptyset$. Quitte à intervertir au besoin U et V , on peut supposer que U contient s . Notre affirmation de la connexité de E sera alors démontrée si on déduit de tout cela que U est nécessairement égal à E (et donc que V est vide).

8. Fixons d'abord un élément a de K et intéressons-nous aux nombres réels $v \in [0, 1]$ ayant la propriété que $(x, y) \in U$ à chaque fois que $(x, y) \in E \cap S_a$ avec $y \geq v$. Il est clair que le nombre 1 est un de ces nombres (c'est même, bien sûr, le plus grand possible).

Si on appelle v_o la borne inférieure de l'ensemble des nombres v en question, il est facile de vérifier que si $(x, y) \in E \cap S_a$ avec $y > v_o$, alors $(x, y) \in U$.

Le nombre v_o dépend évidemment de a ; on l'écrira aussi, de ce fait, $v_o(a)$. C'est l'ordonnée d'un point de S_a et d'un seul dont l'abscisse sera désignée par u_o ou, en cas de confusion, par $u_o(a)$. Si $v_o = 0$ (ce qui peut arriver – et on verra plus loin que c'est même ce qui arrive le plus souvent), on en déduit que tous les points

de S_a qui appartiennent à E appartiennent en fait à U , à l'exception éventuelle du point $(a, 0)$.

Si $v_o > 0$, il n'est pas assuré que $(x, y) \in V$ si $(x, y) \in E \cap S_a$ avec $y < v_o$, mais on peut affirmer qu'il y a sur S_a des points $(x, y) \in V$ aussi proches qu'on veut du point (u_o, v_o) de S_a : s'il en était autrement, il y aurait des nombres v ayant la propriété qu'on a décrite plus haut et qui seraient plus petits que v_o , contrairement à la définition de v_o .

On peut donc dire en résumé que lorsque $v_o > 0$, le point (u_o, v_o) est à la fois adhérent à U et à V (y compris, il vaut mieux le vérifier directement pour être tranquille, si $v_o = 1$). Ce fait entraîne que (u_o, v_o) ne peut appartenir alors à E , sinon ce serait un point de E adhérent à la fois à U et à V (dans E !), donc un point appartenant en même temps à U et à V (car U et V sont fermés dans E) ce qui est en contradiction avec le fait que $U \cap V = \emptyset$.

9. Lorsque $a \in M$ (le complémentaire de L dans K), on peut déduire de ce qui précède que $v_o(a)$ est nécessairement un rationnel car si c'était un irrationnel, on serait en présence d'un point (u_o, v_o) de E (revoir la définition de cet ensemble : n° 4) avec $v_o > 0$ – ce qui est impossible comme on vient de le voir.

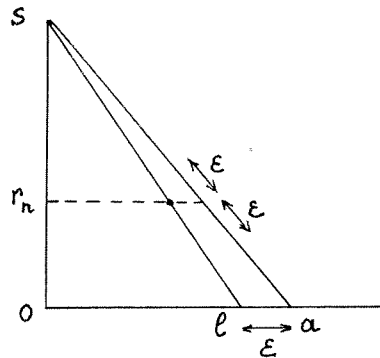
Cela va nous permettre de partager l'ensemble M en une suite (M_n) d'ensembles intéressants pour notre démonstration. On sait en effet, que les nombres rationnels compris entre 0 et 1 forment un ensemble dénombrable. Cela permet de les ranger en une suite illimitée $r_0, r_1, \dots, r_n$ où l'on supposera $r_n \neq r_m$ si $m \neq n$ et $r_o = 0$ pour fixer les idées. Cette suite étant choisie, il est alors légitime de considérer, si n est un entier naturel donné, tous les points $a \in M$ tels que $v_o(a) = r_n$. Ces points formeront l'ensemble M_n annoncé. Il résulte de ce qu'on vient de dire sur la nature du nombre $v_o(a)$ lorsque $a \in M$ que

$$M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n \cup \dots$$

On peut ajouter que ces ensembles M_n sont deux à deux disjoints et qu'il n'est pas interdit que certains d'entre eux soient vides. En fait, nous allons voir qu'à l'exception de M_0 ils sont tous maigres dans K (n° 6). De façon plus précise, nous allons démontrer le résultat plus fort selon lequel, si $n > 0$, l'adhérence $\overline{M}_n$ de M_n dans K n'a pas de point intérieur (c'est ce qu'Bourbaki appelle un ensemble **rare**, mais il n'est pas nécessaire de s'embrouiller l'esprit avec un excès de vocabulaire).

Raisonnons par l'absurde en supposant que pour un entier $n > 0$, il y a dans $\overline{M}_n$ un point intérieur k . Alors $\overline{M}_n$ est un voisinage de k . Comme L est dense dans K (propriété (iii) du n° 2), $\overline{M}_n$ contient au moins un élément l de L . Le fait que l soit ainsi adhérent à M_n signifie aussi que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un élément $a \in M_n$ tel que $|l - a| \leq \varepsilon$. On a $v_o(a) = r_n > 0$ par définition. Si on considère alors sur le segment S_l l'unique point d'ordonnée r_n , on obtient en fait un point de E et il est facile de voir qu'il existe dans le disque centré en ce point et de rayon

2ε au moins un point de U et au moins un point de V (en fait situés sur S_a).



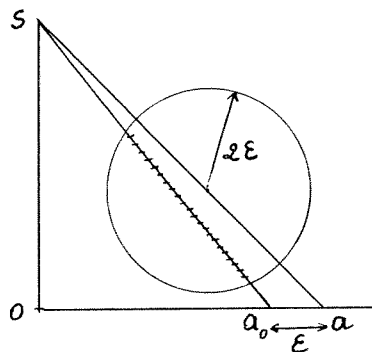
Comme le centre du disque ne dépend pas de ε , cela veut dire que c'est un point adhérent à U et à V , ce qui est absurde car en tant qu'élément de E , ce serait un point commun de U et de V .

10. Comme l'ensemble L est maigre (car c'est un ensemble dénombrable constitué de points non isolés : cf. n° 2, propriété (iv)), on déduit de tout cela que l'ensemble

$$L \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup \dots$$

est lui aussi maigre. D'après le théorème de Baire, cet ensemble ne peut avoir de point intérieur. Cela veut dire aussi que le complémentaire de cet ensemble dans K , qui est M_0 , est partout dense dans K (c'est une autre façon de présenter le théorème de Baire : dans un espace métrique complet, le complémentaire d'un ensemble maigre est partout dense).

Il est facile d'en déduire que U est dense dans E , compte tenu du fait que tous les points de M_0 , sauf peut-être ceux qui sont sur l'axe des abscisses, appartiennent à U (n° 8) :



On a donc (dans E), $U = \overline{U} = E$ et $V = \emptyset$, ce qui était le résultat cherché : cf. n° 7.

11. Reste à démontrer le théorème de Baire : dans un espace métrique complet E les ensembles maigres n'ont pas de point intérieur.

Dire qu'un ensemble $A \subset E$ n'a pas de point intérieur revient à dire qu'il ne peut contenir un ensemble ouvert non vide, autrement dit que pour tout ouvert U non vide de E , on a $U \not\subset A$, relation qui signifie aussi que $U \cap A^c \neq \emptyset$.

Pour démontrer le théorème de Baire, il suffit de démontrer le résultat précédent lorsque $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, sachant que F_n est fermé et que son intérieur est vide : il est en effet évident que lorsqu'un ensemble B n'a pas de point intérieur, la même propriété a lieu pour A si $A \subset B$.

Considérons donc un ouvert U non vide de E . Pour démontrer qu'il existe un point x dans l'ensemble $U \cap A^c$, nous allons construire une suite de Cauchy (x_n) dont la limite sera le point x cherché.

Appelons U_o l'ouvert U considéré. Comme F_1 n'a pas de point intérieur, $U_o \cap F_1^c \neq \emptyset$. Appelons x_1 un point de ce dernier ensemble. Comme celui-ci est ouvert (on rappelle que F_1 est fermé), il existe une boule B_1 de centre x_1 , que l'on peut supposer fermée contenue dans $U_o \cap F_1^c$. Quitte à diminuer le rayon (ce qui ne change rien à l'inclusion obtenue), on peut supposer que ce rayon est ≤ 1 . Si on appelle enfin U_1 la boule ouverte de même centre et de même rayon que B_1 , on a en résumé

$$x_1 \in U_1 \subset B_1 \subset U_o \cap F_1^c \text{ avec } r(B_1) \leq 1$$

où tout le monde aura compris ce que veut dire $r(B_1)$.

Comme F_2 n'a pas de point intérieur, $U_1 \cap F_2^c \neq \emptyset$. Appelons x_2 un point de cet ensemble. Comme il est ouvert (car F_2 est fermé), il existe une boule B_2 de centre x_2 , que l'on peut supposer fermée et de rayon $\leq \frac{1}{2}$, telle que $B_2 \subset U_1 \cap F_2^c$. Si U_2 est la boule ouverte de même centre et de même rayon, on a

$$x_2 \in U_2 \subset B_2 \subset U_1 \cap F_2^c \text{ avec } r(B_2) \leq \frac{1}{2}.$$

En procédant par récurrence, on définit ainsi des points x_n , des ouverts U_n et des boules fermées B_n tels que

$$x_n \in U_n \subset B_n \subset U_{n-1} \cap F_n^c \text{ avec } r(B_n) \leq \frac{1}{n}$$

pour tout $n \geq 1$.

On a ainsi $U_n \subset B_n \subset U_{n-1} \cap F_n^c \subset U_{n-1} \subset B_{n-1}$, ce qui prouve que la suite (B_n) (ainsi d'ailleurs que la suite (U_n)) est décroissante pour la relation d'inclusion. Ainsi, si $m \leq n$, x_n et x_m appartiennent à B_m . On a donc (en appelant d la distance de l'espace métrique E) $d(x_n, x_m) \leq 2r(B_m) \leq \frac{2}{m}$. Comme $\frac{2}{m}$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$, cela prouve que (x_n) est une suite de Cauchy. Comme l'espace E est complet, cette suite converge vers un point x de E . Comme $x_n \in B_m$ pour tout $n \geq m$ et que B_m est fermé, $x \in B_m$. A fortiori, $x \in U_{m-1} \cap F_m^c$. Cela montre que $x \in U = U_o$ (car $U_{m-1} \subset U_{m-2} \subset \dots \subset U_o$) et que $x \notin F_m$. Comme cette dernière relation a lieu quel que soit m , $x \notin A$. Ainsi $x \in U \cap A^c$. CQFD.

12. Le théorème de Baire montre de manière indirecte qu'un espace métrique complet E sans points isolés ne peut être dénombrable – à moins que E ne soit vide car s'il était dénombrable, il serait maigre (par rapport à lui-même) ce qui

est absurde car on voit mal comment l'ensemble vide (le complémentaire de E dans E) pourrait se faire partout dense dans E ... Pour cette raison, l'ensemble triadique de Cantor n'est pas dénombrable.

Epilogue

Au vu des exemples précédents, la notion topologique d'ensemble et d'espace connexe peut paraître inadaptée au but recherché qui était de définir les ensembles d'"un seul tenant". On pourrait lui préférer (ce qu'on fait d'ailleurs dans certains cas) la notion d'ensemble connexe par arcs (cf. § B, n° 14). On notera cependant que l'adhérence d'un ensemble connexe par arcs n'a pas nécessairement la même propriété. Quoi qu'il en soit, tous les théorèmes des n°12 et 13 du § B sont vrais... En particulier, si on projette l'éventail de Knaster-Kuratowski sur une droite de direction quelconque, on obtient toujours un intervalle de cette droite – sans aucun trou, ce qui est, de toute façon, une propriété remarquable.

Bibliographie

L'article qui précède (sauf le § B) est largement inspiré de celui de D.R. Chalice, intitulé "Paradoxical Connections in the Plane" et paru dans *Singularité* (141, av. de Saxe 69003 Lyon) en avril 1992 (vol. 3, n° 5).

Pour des compléments de topologie, le lecteur pourra consulter le très accessible ouvrage de Jacques Dixmier, **Topologie générale**, P.U.F., 1981 et notamment le chap. X sur les espaces connexes (p. 145-149). Il y trouvera aussi l'énoncé et la démonstration du théorème de Baire pour les espaces métriques complets (p. 74).

A un niveau plus élevé, il y a naturellement la partie des **Eléments de mathématique** de N. Bourbaki, consacrée à la topologie (en deux volumes, chap. 1 à 4, C.C.L.S., 1971 et chap. 5 à 11, C.C.L.S., 1974); on y trouvera notamment tout ce qu'il faut savoir sur les espaces connexes (chap. 1, p. 80-88) et le théorème de Baire (chap. 9, p. 52-56).

Dernière minute : Au moment d'adresser mon manuscrit à la rédaction de '*L'Ouvert*', je relève que les préoccupations récentes du groupe mathématique de Saumur rejoignent celles d'une revue d'aussi haut niveau que '*The Mathematical Intelligencer*' qui, dans sa livraison de l'été 1996 (vol. 18, n° 3) publie un article sur l'école polonaise de topologie (The Beginning of Polish Topology) où les noms de Kazimierz Kuratowski et de Bronislaw Knaster figurent en bonne place. Il y est rappelé que Kuratowski est l'auteur d'un important traité de topologie en deux volumes (1933 et 1950) et que Knaster était passé maître dans la construction d'ensembles aussi étranges que biscornus. L'éventail de Knaster-Kuratowski n'en est qu'un exemple.