VARIATIONS AUTOUR D'UN PROBLÈME DE MOQUETTE

A. FRUCHARD A. TROESCH

Peut-on recouvrir le sol de n'importe quelle pièce rectangulaire avec un rouleau de moquette de largeur fixée en coupant cette moquette uniquement dans le sens de la largeur ? Lorsque l'une des dimensions de la pièce est un nombre entier de fois la largeur du rouleau, c'est évidemment possible. Mais une pose astucieuse permettrait-elle de recouvrir d'autres pièces ?

Chercher une réponse à ces questions revient à chercher une réponse à l'énoncé apparemment plus général :

Énonce 1. — *Un rectangle partitionné en un nombre fini de rectangles ayant chacun au moins un côté de longueur entière a-t-il nécessairement un côté de longueur entière ?*

Lorsqu'on prend la largeur du rouleau comme unité de longueur, ces problèmes sont bien équivalents puisque toute partition en rectangles dont l'un des côtés est de longueur entière conduit à une partition en rectangles ayant une longueur 1 en redécoupant ces rectangles.

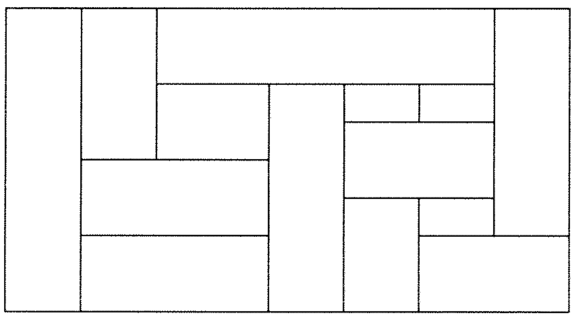

FIG. 1 – *Exemple de pose : un centimètre représente la largeur du rouleau*

Un rectangle est ici un pavé semi-ouvert de $\mathbb{R}^2$, $R = [a, a+l[\times[b, b+h[$. Pour abréger, un rectangle dont une des longueurs l ou h est entière sera appelé *rectangle entier* (à ne pas confondre avec les rectangles à sommets dans $\mathbb{Z}^2$). De même, nous appellerons *partition entière* d'un rectangle une partition en rectangles entiers.

Un article de mathématiques n'étant pas un roman policier, coupons court à tout suspens en dévoilant la réponse à l'énoncé 1 : OUI.

Nous sommes bien conscients qu'il s'agit là d'un exercice, peut-être déjà connu du lecteur, mais au-delà du résultat, c'est la variété des preuves et la comparaison de diverses approches mathématiques qui nous paraît intéressante. Aussi, nous suggérons au lecteur de réfléchir sur cet énoncé avant de continuer sa lecture. S'il trouve une preuve différente de celles que nous proposons, qu'il nous en fasse part.

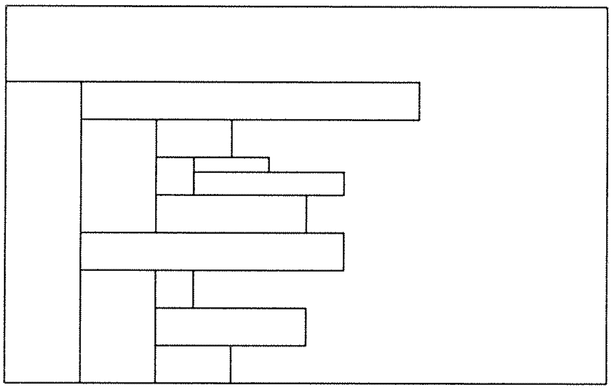

FIG. 2 – *Amorce d'une partition en rectangles*

Voici une preuve qui a l'avantage d'être courte :

Avec les notations

$R = \bigcup_{k=1}^{m} R_k$ où $R_k = [a_k, a_k + l_k[\times[b_k, b_k + h_k[$ et $\{x\}$ pour la partie fractionnaire de x, on a :

$$\begin{aligned}
(e^{2\pi i\{l\}} - 1)(e^{2\pi i\{h\}} - 1)e^{2\pi i(a+b)} &= (e^{2\pi i(a+l)} - e^{2\pi ia})(e^{2\pi i(b+h)} - e^{2\pi ib}) \\
&= -4\pi^2 \int_a^{a+l} e^{2\pi ix}dx \int_b^{b+h} e^{2\pi iy}dy \\
&= -4\pi^2 \int_R e^{2\pi i(x+y)}dxdy \\
&= -4\pi^2 \sum_{k=1}^{m} \int_{R_k} e^{2\pi i(x+y)}dxdy \\
(1)\ (e^{2\pi i\{l\}} - 1)(e^{2\pi i\{h\}} - 1)e^{2\pi i(a+b)} &= \sum_{k=1}^{m}(e^{2\pi i\{l_k\}} - 1)(e^{2\pi i\{h_k\}} - 1)e^{2\pi i(a_k+b_k)} = 0
\end{aligned}$$

donc $\{l\} = 0$ ou $\{h\} = 0$. □

Après cette preuve austère, voici une petite anecdote pour détendre l'atmosphère. Cela se passe dans un prestigieux séminaire de mathématiques. À peine l'orateur a-t-il achevé la démonstration de son résultat principal qu'un auditeur lui présente un contre-exemple imparable. Après un long moment de perplexité et après mûre réflexion, l'orateur visiblement soulagé s'exclame : "Oui, mais j'ai une autre démonstration ! "

Voici donc quelques preuves supplémentaires au cas où un lecteur nous présenterait un contre-exemple.

1 Preuve élémentaire

Elle consiste, à partir d'une partition en rectangles entiers, à construire une autre partition ayant un nombre plus petit de rectangles entiers. Par récurrence on arrive ainsi à une partition formée d'un seul rectangle entier.

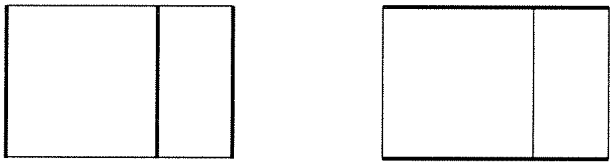

FIG. 3 – *Les lignes grasses matérialisent les côtés de longueur entière*

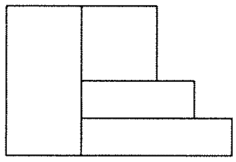

FIG. 4 – *Escalier*

On appelle *configuration entière* une union disjointe de rectangles entiers (au sens du début). On dit qu'une configuration entière est *réductible* s'il existe une configuration entière ayant même union, mais comportant un nombre moindre de rectangles. Par exemple deux rectangles entiers disjoints dont les adhérences ont un côté commun forment une configuration réductible : la première configuration de la Figure 3 est réductible parce que le côté commun est entier, la deuxième parce que la somme de deux entiers est un entier.

Une généralisation de cette configuration est l'*escalier*, constitué d'un rectangle juxtaposé à une pile de rectangles de longueurs décroissantes (voir Figure 4).

Pour montrer que cette configuration est réductible nous examinons les deux cas :

1. — La marche supérieure de l'escalier est de longueur entière

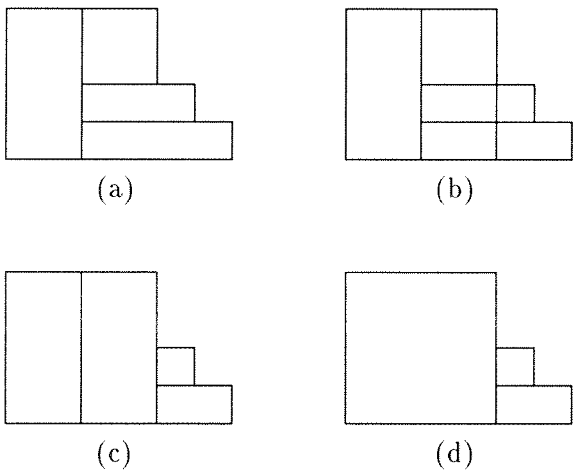

FIG. 5 – *Marche supérieure de longueur entière*

On peut alors subdiviser tous les autres rectangles de la pile en un rectangle ayant cette longueur, le rectangle restant étant alors lui aussi entier (cf. Figure 5 (b)): c'est clair si c'est le côté vertical qui est de longueur entière, sinon le côté horizontal aura une longueur qui est la différence de deux entiers. L'étape suivante consiste alors à fusionner tous les rectangles ayant la même longueur horizontale que la marche supérieure de l'escalier (cf. Figure 5 (c)), et enfin, à fusionner le rectangle ainsi obtenu avec le rectangle juxtaposé à l'escalier (cf. Figure 5 (d)). On obtient ainsi une configuration ayant un rectangle de moins.

2. — La marche supérieure de l'escalier est de hauteur entière

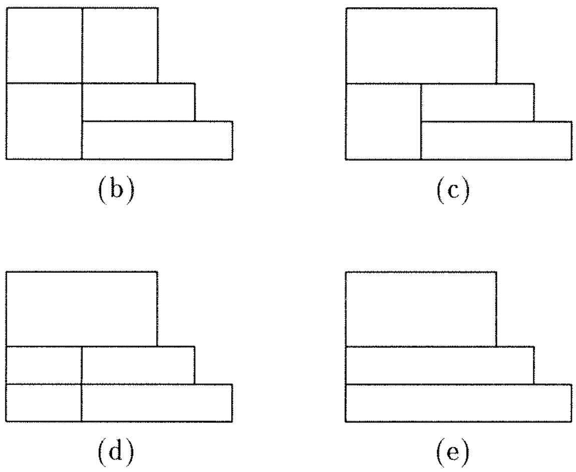

FIG. 6 – *Marche supérieure de hauteur entière*

Nous commençons par subdiviser le rectangle de gauche en le coupant horizontalement en un rectangle de hauteur h, et un rectangle restant qui est également entier. C'est clair si la longueur du côté horizontal est entière, sinon, sa hauteur est la différence de deux entiers (cf. Figure 6 (b)). On peut alors fusionner les deux rectangles supérieurs . On obtient ainsi une configuration ayant le même nombre de rectangles, mais contenant un escalier en ayant un de moins (cf. Figure 6 (c)).

Ou bien le nouvel escalier est réductible d'après le paragraphe précédent, si la longueur de son côté horizontal est entière, ou bien contient un escalier ayant un rectangle de moins. Par itération de ce procédé (cf. Figure 6 (d)) on aboutit finalement à une configuration ayant le même nombre de rectangles, mais contenant un escalier à une seule marche, dont nous avons déjà vu qu'il est réductible (cf. Figure 6 (e)). Ainsi toute configuration en escalier est réductible . La preuve de l'énoncé 1 repose alors sur le lemme suivant :

Lemme . — *Toute partition entière d'un rectangle contient un escalier.*

Preuve :
Considérons le rectangle R du pavage situé dans le coin inférieur gauche (cf. Figure 7). Les rectangles adjacents à droite de R forment une pile dont la hauteur est supérieure ou égale à la hauteur de R. Si elle est strictement supérieure à la hauteur de R, ce sont les rectangles reposant sur R qui auront une largeur totale égale à la largeur de R. Dans les

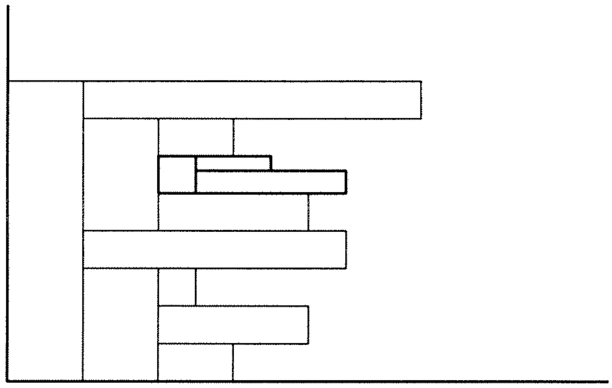

FIG. 7 – *Recherche d'une configuration en escalier*

deux cas nous aurons une configuration formée d'un rectangle et d'une pile de rectangles adjacents ayant une hauteur égale à la longueur du côté de R auquel ils sont adjacents. Pour fixer les idées supposons que cette configuration est horizontale. Si les longueurs des rectangles de la pile adjacente sont décroissantes , le maximum étant sur le bord inférieur du pavage, cette configuration est en escalier, et c'est terminé. Sinon, l'un des rectangles adjacents à R est, ou bien entouré de deux rectangles adjacents ayant des longueurs plus grandes, ou bien au bord du pavage et bordé par un rectangle plus long. Dans les deux cas, ce rectangle forme, avec les rectangles qui lui sont adjacents le long du côté encore libre, une configuration du même type: un rectangle R' bordé par une pile de rectangles dont la hauteur est égale à la longueur du côté de R' auquels ils sont adjacents. On peut donc refaire le même raisonnement. Les nouveaux rectangles sélectionnés sont toujours situés à droite des rectangles précédents. On obtient ainsi une suite injective de rectangles du pavage. Cette suite est donc finie, ce qui signifie que le processus doit s'arrêter, et que l'on aboutit à une configuration en escalier.□

2 Preuve par l'analyse

Elle s'inspire de la courte preuve donnée par la formule (1). Nous la présentons directement en dimension quelconque puisque cela n'est pas plus difficile. Ainsi :

Énoncé 2. — *Un pavé de $\mathbb{R}^n$, partitionné en pavés ayant chacun une longueur entière, a une longueur entière.*

Comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, nos pavés sont semi-ouverts :

$$P = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k[$$

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des réunions finies de pavés de $\mathbb{R}^n$. Cet ensemble est un *clan* c'est-à-dire un ensemble de parties stable par union finie, intersection finie et différence (pour la différence écrire $\bigcup_{i\in I} P_i - \bigcup_{j\in J} Q_j = \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(P_i - Q_j)$, et noter que la différence de deux pavés s'écrit comme la réunion d'au plus $2n$ pavés).

Lemme . — *Il existe une "mesure" à valeurs positives et négatives $\mu_n : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ additive (i.e. $\mu_n(A\bigcup B) = \mu_n(A) + \mu_n(B)$ si $A\bigcap B = \emptyset$) telle que si P est un pavé : $\mu_n(P) = 0$ si et seulement si P a au moins un côté entier.*

Preuve :

a) n**=1**

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Posons $\mu_1([a,b[) = F(b) - F(a)$. Si $a < b < c$ alors $\mu_1([a,b[) + \mu_1([b,c[) = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \mu_1([a,c[)$ et par récurrence la mesure d'un intervalle union finie d'intervalles deux à deux disjoints est la somme des mesures de ces intervalles. On prolonge donc μ_1 par additivité à $\mathcal{P}$. Pour obtenir la deuxième propriété on peut prendre F périodique de période 1, injective sur chaque période, par exemple $F(x) = x - \lfloor x \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x. On a ainsi $\mu_1([a,b[) = 0 \iff b - a$ entier.

b) Dimension n

On définit

$$\mu_n([a_1,b_1[\times \cdots \times [a_n,b_n[) = \mu_1([a_1,b_1[) \times \cdots \times \mu_1([a_n,b_n[).$$

Puisque $\mathbb{R}$ est intègre, il est clair que $\mu_1([a_1,b_1[) \times \cdots \times \mu_1([a_n,b_n[) = 0$ implique qu'il existe i tel que $\mu_1([a_i,b_i[) = 0$.

Pour pouvoir prolonger μ_n par additivité à $\mathcal{P}$ il faut montrer que si un pavé est une réunion disjointe de pavés alors la mesure de ce pavé est la somme des mesures des pavés qui le composent.

Le cas le plus simple est celui où la partition est le produit de partitions de chacun des côtés :

$$P = \bigcup_{\substack{i=1\ldots m_1 \\ j=1\ldots m_2 \\ \ldots}} [a_i,a_{i+1}[\times[b_j,b_{j+1}[\times\cdots$$

Dans la somme correspondante des mesures des petits pavés,

$$\Sigma = \sum_{\substack{i=1\ldots m_1 \\ j=1\ldots m_2 \\ \ldots}} \mu_1([a_i,a_{i+1}[) \times \mu_1([b_j,b_{j+1}[) \times \cdots$$

on regroupe les petits pavés par tranches de pavés ayant la même projection sur le premier axe de coordonnées d_1. Pour une tranche i on peut mettre en facteur le premier facteur $\mu_1([a_i,a_{i+1}[)$ dans chacun des produits. Le facteur restant est indépendant de la tranche : il correspond à la somme Σ_1 des mesures des pavés de dimension $n-1$ obtenue par projection sur l'hyperplan orthogonal à d_1. En utilisant le résultat de la dimension 1

$$\Sigma = (\mu_1([a_1,a_2[) + \cdots + \mu_1([a_{m_1-1},a_{m_1}[))\,\Sigma_1 = \mu_1([a_1,a_{m_1}[)\Sigma_1$$

on se ramène à la dimension $n-1$ et on conclut par récurrence. Dans le cas général, on se ramène au cas simple en subdivisant plus finement le pavé (considérer les hyperplans passant par toutes les faces de la partition initiale). Comme nous venons de le voir, la somme des mesures de ces pavés est égale à la mesure du grand pavé. Mais comme chaque pavé de la partition initiale est une union disjointe de pavés de la nouvelle partition, la mesure du grand rectangle est la somme des mesures des pavés de la partition initiale.□

3 Preuve “ arithmétique ”

L'idée s'inspire de la preuve d'un autre énoncé (pour abréger, nous dirons ici qu'un rectangle $R = [a, a+l[\times[b, b+h[$ avec a, b, l et h entiers est un rectangle de $\mathbb{Z}^2$)

Énoncé 3. — *Un rectangle de $\mathbb{Z}^2$ partitionné en rectangles de $\mathbb{Z}^2$ ayant tous au moins un côté de longueur paire a au moins un côté de longueur paire.*

En effet l'aire totale, somme des aires des rectangles donc somme d'entiers pairs, est paire. Le nombre 2 étant premier, l'un des côtés est nécessairement pair. □

Cela se généralise clairement à tout entier p premier :

Énoncé 4. — *Un rectangle de $\mathbb{Z}^2$ partitionné en rectangles de $\mathbb{Z}^2$ ayant tous au moins un côté divisible par p a au moins un côté divisible par p.*

On en déduit l'

Énoncé 5. — *Pour tout entier premier p, tout rectangle partitionné en rectangles entiers (au sens du début) a au moins un côté dont la longueur a une partie fractionnaire inférieure à $1/p$.*

Preuve :
En effet, après agrandissement φ d'un facteur premier p on obtient un rectangle $\varphi(R)$ partitionné en rectangles ayant un côté de longueur multiple de p. À chaque sommet (x, y) de cette partition on associe la “partie entière” dans $\mathbb{Z}^2$, $(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)$. Ceci conduit à une partition dans $\mathbb{Z}^2$ d'un rectangle $\lfloor \varphi(R) \rfloor$ de $\mathbb{Z}^2$ à laquelle on peut appliquer l'énoncé précédent (noter que si $b - a$ est entier alors $\lfloor pb \rfloor - \lfloor pa \rfloor$ est un multiple de p). Après réduction d'échelle $1/p$ le rectangle $\varphi^{-1}(\lfloor \varphi(R) \rfloor)$ est donc entier (ie. a un côté entier) et ne diffère de R que d'au plus $1/p$. □

L'énoncé 1 se déduit des propriétés archimédiennes de $\mathbb{R}$, de l'infinité des nombres premiers et de la compacité de $\{1, 2\}$:

$$(2) \quad \left(\forall p \text{ premier } \exists k \in \mathbb{N}\ \exists j \in \{1,2\} \text{ et } 0 \leq x_j - k < \frac{1}{p}\right) \Longrightarrow \exists j \in \{1,2\} \text{ et } x_j \in \mathbb{N}.$$

Commentaires

1. — Nous attribuons le fait d'avoir trouvé cette preuve à notre penchant pour l'Analyse Non Standard. Celle-ci a au moins l'avantage de simplifier à nos yeux les formulations : on fixe un nombre premier p infiniment grand. Par exemple l'énoncé (2) est remplacé dans ce contexte par :

   Si x est un réel standard infiniment proche d'un entier, alors x est entier.

2. — Nous sommes à la recherche d'une preuve totalement algébrique utilisant la propriété d'intégrité d'un anneau bien choisi ($\mathbb{R}$ pour la preuve d'analyse, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour celle arithmétique...).

4 Généralisations aux dimensions supérieures

À notre avis les preuves présentées sont classées par ordre croissant de simplicité. Nous allons voir qu'elles sont aussi classées par ordre croissant de puissance, la méthode offrant les meilleures généralisations étant la dernière. La première méthode ne semble pas se généraliser directement. Déjà en dimension 3 le problème nous paraît inextricable, faute d'avoir trouvé un ensemble de configurations réductibles à la fois élémentaire et complet en ce sens que toute partition entière d'un pavé en contient une.

La preuve d'analyse a déjà fourni l'énoncé 2 pour la dimension n. Seule la preuve arithmétique offre une généralisation directe prouvant l'énoncé suivant

Énoncé 6. — *Un pavé de $\mathbb{R}^n$ partitionné en un nombre fini de pavés ayant tous au moins c côtés de longueur entière a au moins c côtés de longueur entière.*

Preuve :
Après agrandissement d'un facteur p premier quelconque et prise de partie entière on obtient un pavé de $\mathbb{Z}^n$ partitionné en pavés de $\mathbb{Z}^n$ ayant c côtés divisibles par p, donc de volume divisible par p^c. Si p est supérieur à la longueur maximale d'un côté du pavé de départ, chaque longueur de la partie entière du rectangle agrandi contient au plus un facteur p dans sa décomposition en fateurs premiers, donc au moins c de ces longueurs sont divisibles par p. Ainsi au moins c longueurs du pavé initial ne diffèrent d'un entier que de $1/p$ au maximum, et ceci pour tout p premier assez grand. □

Remarque finale
On peut aussi obtenir l'énoncé 6 à partir de l'énoncé 2. Supposons par l'absurde que le nombre de côtés entiers du grand pavé est inférieur ou égal à $k-1$. Dans ce cas il existerait $n-k+1$ côtés de P ayant une dimension non entière. Considérons une $(n-k+1)$-face P' de P ayant ces côtés. La partition du pavé P induit alors, par intersection sur P', une partition de P' dont chaque pavé a au moins un côté de longueur entière. Il en résulte que P' a au moins un côté de longueur entière, d'où la contradiction.

Adresse des auteurs :

A. FRUCHARD
Département de Mathématiques
Pôle Sciences et Technologie
Avenue Marillac
17042 LA ROCHELLE cedex 1
Tél. 05 46 45 87 92
e-mail : `afruchar@math.univ-lr.fr`

A. TROESCH
I.R.M.A.
Université Louis Pasteur
7, rue René-Descartes
67084 STRASBOURG cedex
Tél. 03 88 41 66 67
e-mail : `troesch@math.u-strasbg.fr`