RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 1997

La séance de remise des prix de ce 24ème Rallye Mathématique d'Alsace a été inaugurée par Monsieur Jean-Yves MERINDOL (nouveau Président de l'Université Louis Pasteur). Il a commenté les nombres qui décrivent l'état du Rallye de cette année pour informer élèves et professeurs présents de certaines de leurs particularités.

- C'est le 24ème rallye Mathématique d'Alsace : eh bien 24 vérifie l'égalité $\sum_{k=1}^{24} k^2 = 70^2$. C'est le seul entier n, autre que 1, tel que la somme des n premiers carrés d'entiers soit un carré.
- Il y avait 1270 candidats. De 1270 il ne sait ce qu'on en peut dire mais par contre, $127 = 2^7 - 1$ est un nombre de Mersenne premier. Ajoutons que c'est le quatrième nombre de Mersenne premier et que 127 est l'exposant du douzième nombre de Mersenne premier.
- En première, 17 binômes ont été primés. Eh bien 17 est la longueur de la plus longue progression arithmétique connue dont tous les termes sont premiers. Le premier terme de cette progression est 3 430 751 869 et la raison 87 297 210.
- En terminale, 16 binômes se voient récompensés. On peut relever que pour seize entiers consécutifs, l'un d'eux est premier avec tous les autres, et seize est la plus grande valeur qui donne cette propriété vérifiée en fait pour tout entier $k \leq 16$*.

Corrigé des Epreuves de Première

Sujet 1 :

Enoncé :

Si x est un nombre réel, le seul nombre réel dont le cube est égal à x s'appelle la racine cubique de x et se note $\sqrt[3]{x}$.

Par exemple : $\sqrt[3]{1000} = 10 = 2 \times 5 = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125}$

On définit $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

Montrer que α est un nombre entier.

* Si vous voulez prolonger le jeu de Monsieur MERINDOL, reportez-vous au livre de François le LIONNAIS "Les nombres remarquables".

Solution :

La définition donnée dans l'énoncé suggère de s'intéresser à α^3. Pour simplifier l'écriture, posons $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ et $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ α s'écrit alors $\alpha = a - b$.

Alors :
$$\begin{aligned}\alpha^3 &= (a-b)^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\\ &= a^3 - b^3 + 3(ab^2 - a^2b)\\ &= a^3 - b^3 + 3ab(b-a)\end{aligned}$$

or $a^3 = \sqrt{5}+2$ et $b^3 = \sqrt{5}-2$ d'où $a^3 - b^3 = 4$

et $ab = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\,\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)\,(\sqrt{5}-2)} = \sqrt[3]{5-4} = \sqrt[3]{1} = 1$

On obtient ainsi :
$$\begin{aligned}\alpha^3 &= 4 + 3(b-a)\\ &= 4 - 3\alpha\end{aligned}$$

donc
$$\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$$

C'est à dire α est racine du polynôme du troisième degré $P(x) = x^3 + 3x - 4$

On remarque que 1 est la racine évidente de ce polynôme. On peut donc le factoriser par $(x - 1)$ et on obtient :
$$P(x) = (x-1)(x^2+x+4)$$

Or le discriminant de $x^2 + x + 4$ est -15, ce qui implique que $x^2 + x + 4$ n'a pas de racines réelles.

1 est la seule racine de P, on en déduit que : $\alpha = 1$

Commentaires :

Cet exercice a été abordé par tous les candidats et correctement traité par bon nombre d'entre eux. On notera cependant des usages abusifs de la calculatrice, avec manipulations diverses des valeurs approchées de a et b.

Bien que beaucoup de candidats aient pensé à calculer α^3, certains n'ont pas pensé à introduire un polynôme, ce qui laisse supposer que cette démarche n'est pas familière aux élèves.

L'égalité $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\,.\,\sqrt[3]{y}$ a été utilisée sans démonstration par les élèves. Une justification même succincte aurait été la bienvenue.

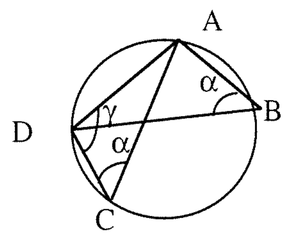
Sujet 2 :

Enoncé

Trois sirènes, Andromaque, Bérénice et Céphise, goûtent un repos bien mérité au bord d'un lac circulaire.

Emile, champion de natation à vitesse constante de son village de Climbach, sait que depuis son lieu de méditation, le Dorisfels (un charmant rocher au bord du lac), il lui faut une minute pour rejoindre Céphise, sept minutes pour retrouver Bérénice et cinq pour revoir Andromaque.
Céphise et Bérénice se reposent toutes deux à 500 mètres d'Andromaque.
Un journaliste venu admirer les exploits d'Emile, fait le tour du lac à pied en partant du Dorisfels ; il a rencontré Andromaque puis Bérénice et enfin Céphise.
Trouver la vitesse d'Emile le Champion et le rayon du lac.

Solution



On a par hypothèse :

AC = AB = 500 m

Posons $x = CD$. Alors $AD = 5x$, $BD = 7x$ et la vitesse d'Emile le Champion en mètres par minute vaut x. A, B, C, D étant cocycliques, on sait que $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$.
Posons $\alpha = \widehat{DBA}$.

La formule d'Al-Kashi[1] (relation de Pythagore généralisée) dans un triangle quelconque s'écrit, avec les notations habituelles :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c. \cos A$$

Appliquée aux triangles ABD et ACD, elle fournit les égalités :

$$25x^2 = 49x^2 + 500^2 - 2 \,.\, 500 \,.\, 7x \,.\, \cos\alpha \quad (1)$$

$$25x^2 = x^2 + 500^2 - 2 \,.\, 500x \,.\, \cos\alpha \quad (2)$$

[1] Al Kashi, mathématicien persan, né à Kasan, a travaillé à l'observatoire de Samarkand où il est mort en 1429. Il a élaboré des méthodes très performantes de calcul trigonométrique et algébrique approché. Par exemple, une résolution de l'équation $x^3 + 1 = 3x$ sous la forme d'une suite (x_n) vérifiant $x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^3 + 1)$. Ou bien un calcul de la circonférence donnant $2\pi = 6,2831853071795865$ un des plus anciens documents connus de calcul en fraction décimale. Mais aucun fait historique vérifié ne permet de lui attribuer la formule dite d'Al Kashi, attribution qui reste un mystère (à notre connaissance).

d'où, en éliminant cos α entre (1) et (2) :

$$x^2 = \frac{6\ .\ 500^2}{192} \quad \text{soit, puisque x est positif}$$

$$x = \sqrt{\frac{6\ .\ 500^2}{192}} = \frac{125}{\sqrt{2}} \quad \text{m.min}^{-1}$$

Posons $\gamma = \widehat{CDA}$. La formule d'Al-Kashi pour le triangle DCA nous donne :

$$500^2 = 25x^2 + x^2 - 2.5x^2 . \cos\gamma$$

d'où, comme $x = \dfrac{125}{\sqrt{2}}$,

on en tire : $\cos\gamma = -\dfrac{3}{5}$.

Mais $\sin\gamma$ est positif, donc $\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \dfrac{4}{5}$.

Notons R le rayon du cercle circonscrit au triangle ACD (R est par conséquent le rayon du lac).

On sait que $2R = \dfrac{AC}{\sin\gamma}$ d'où $R = \dfrac{500}{2 \times \dfrac{4}{5}} = 312{,}5\text{m}.$

Commentaires

"Sais-tu quel est Emile ?
T'es-tu fait raconter le nombre des exploits...Mais qui peut les compter ?
Intrépide, et partout suivi de la victoire,
Charmant, fidèle enfin, rien ne manque à sa gloire."

(D'après Andromaque)

Champion de natation à vitesse constante, lecteur enthousiaste de Racine, Emile nous a donné l'occasion de proposer à nos candidats un problème de géométrie.

La résolution reposait sur les relations métriques dans un triangle quelconque et notamment la formule d'Al-Kashi.

Très souvent abordé, cet exercice n'a été entièrement résolu que par de rares binômes.

Faut-il y voir un manque de familiarisation des élèves avec la géométrie du triangle quelconque ?

Il convenait ici d'oublier les repères, le théorème de Pythagore et de se replonger dans des propriétés de géométrie usuelles sans doute moins en vogue à l'heure actuelle.

Puisse ce sujet, à défaut d'inciter à la lecture de Racine ou à la découverte des charmants alentours de Climbach, donner l'envie de refaire un peu de géométrie.

"Et sur quoi jugez-vous que j'en perds la mémoire, Prince ?
Aurai-je perdu tout le soin de ma gloire ?"

(Phèdre).

Sujet 3 :

Enoncé :

Cette année-là, Claude dit à François : " au casino d'Alexandrie, je connais une étrange machine. Elle génère 3 nombres réels positifs a, b et c. On gagne si l'un des 3 nombres a (1-a), b (1-b), c (1 -c) est inférieur ou égal à 1/4. Comme d'habitude, j'y gagne à tous les coups".

François lui répondit : "je connais une machine similaire à Assouan. Mais on y gagne si l'un des 3 nombres a(1-b), b(1-c), c(1-a) est inférieur ou égal à 1/4. J'y gagne à coup sûr".

Préférez-vous tenter votre chance à Alexandrie ou à Assouan ?

Solution :

Etude du Casino d'Alexandrie

Les 3 réels a, b, c étant positifs, on s'intéresse à 3 produits construits de la même manière.

Il suffit donc d'étudier l'application dérivable

$$f : [0\,,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x\,(1-x).$$

dont la dérivée est $f'(x) = -2x + 1$

Le tableau de variations de f est immédiat :

x	0		1/2		1		$+\infty$
f(x)	0	$\nearrow$	1/4		$\searrow$		$-\infty$

D'après ce tableau, pour tout réel positif x, le produit x (1 - x) est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

On conclut que les trois nombres a (1 - a), b (1 - b) et c (1 - c) sont inférieurs ou égaux à $\frac{1}{4}$.

On gagne à tous les coups à Alexandrie.

Etude du Casino d'Assouan

Si l'un des 3 réels a, b ou c est supérieur ou égal à 1, l'un des 3 produits est négatif, et par conséquent inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Il reste alors à étudier le cas où les 3 réels sont compris entre 0 et 1.

L'étude précédente assure que :

$$0 \le a(1-a) \le \tfrac{1}{4}$$

$$0 \le b(1-b) \le \tfrac{1}{4}$$

$$0 \le c(1-c) \le \tfrac{1}{4}$$

Ayant 3 inégalités entre nombres positifs, on peut faire leur produit.

On a alors $0 \le a(1-b)\, b(1-c)\, c(1-a) \le \tfrac{1}{4^3}$.

On est ramené au problème suivant :

Si α, β et γ sont 3 réels positifs tels que $0 \le \alpha\beta\gamma \le \tfrac{1}{4^3}$ alors l'un au moins est inférieur ou égal à $\tfrac{1}{4}$. En effet, si ce n'était pas le cas,

$$\alpha > \tfrac{1}{4} \qquad \beta > \tfrac{1}{4} \qquad \gamma > \tfrac{1}{4}$$

d'où $\alpha\beta\gamma > \tfrac{1}{4^3}$.

Donc, l'un au moins des réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\tfrac{1}{4}$.
On gagne donc aussi à tous les coups à Assouan.

Commentaires

La première partie (Alexandrie) a été bien traitée. La seconde (Assouan) a rarement été menée jusqu'au bout.

Nombreux sont ceux qui se sont contentés de cas particuliers en oubliant les cas litigieux.

D'un point de vue plus technique, on notera le nombre important d'erreurs concernant les manipulations d'inégalités (problèmes de signes, multiplications membre à membre abusives).

Corrigé des Epreuves de Terminale

Sujet 1 :

Enoncé :

Si x est un entier naturel, on note p(x) le produit de ses chiffres. Démontrer que 12 est l'unique entier naturel x compris entre 0 et 100 tel que $x^2 - 10x - 22 = p(x)$.

Solution :

Nous devons déterminer l'ensemble des nombres *n* satisfaisant les trois conditions suivantes :

$$n^2 - 10n - 22 = p(n). \qquad (1)$$

$$n \in N \qquad (2)$$

$$0 \leq n \leq 100. \qquad (3)$$

Pour tout entier entre 0 et 100, on a : $0 \leq p(n) \leq 81$.

Par conséquent, les nombres cherchés satisfont les inégalités : $0 \leq x^2 - 10x - 22 \leq 81$. (4)

Ceci nous permet de déterminer un ensemble fini de nombres entiers qui contient tous les nombres recherchés. Il suffit pour cela de résoudre les deux inéquations de (4) et de retenir les solutions entières entre 0 et 100.

<u>Première inégalité</u> : $0 \leq x^2 - 10x - 22$. (4')

Le membre de droite est un polynôme du second degré dont nous déterminons le tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 - 10x - 22$		+	0	-	0	+	

où : $x_1 = 5 - \sqrt{47}$ et $x_2 = 5 + \sqrt{47}$.
($x_1 \approx -1,85565$ et $x_2 \approx 11,85565$)

Donc, un nombre réel x satisfait (5) si et seulement si :

$$x \in \left]-\infty \ , \ x_1\right] \cup \left[x_2 \ , \ +\infty\right[.$$

C'est à dire, plus petit que x_1 ou plus grand que x_2.

<u>Deuxième inégalité</u> :

$x^2 - 10x - 22 \leq 81$ (4") c'est-à-dire : $x^2 - 10x - 103 \leq 0$ (4" ')

La dernière inégalité fait intervenir un polynôme du second degré dont nous déterminons le tableau de signes :

x	$-\infty$		y_1		y_2		$+\infty$
$x^2 - 10x - 103$		+	0	-	0	+	

où : $y_1 = 5 - 8\sqrt{2}$ et $y_2 = 5 + 8\sqrt{2}$.
($y_1 \approx -6{,}3137$ et $y_2 \approx 16{,}3137$)

donc, un nombre réel x satisfait (5) si et seulement si :

$x \in [y_1 \ , \ y_2]$. C'est-à-dire entre y_1 et y_2.

L'ensemble des solutions réelles de (4) est : $I = [y_1 \ , \ x_1] \cup [x_2 \ , \ y_2]$.

Ainsi, les nombres satisfaisant (1), (2) et (3) sont contenus dans l'ensemble I. Or, les nombres entiers entre 0 et 100 dans cet ensemble sont : 12, 13, 14, 15, 16.

Un calcul rapide nous permet , enfin, de constater que le seul nombre à satisfaire les trois conditions est 12.

Cette réponse a souvent été proposée par les candidats. Elle est plus courte que celle que nous avions envisagée. Elle a cependant l'inconvénient de ne pas être généralisable (en effet, on pourrait changer la question et se demander de façon plus générale si 12 est la seule solution entière de l'égalité (1)).
La solution qui suit permet de répondre à la question. Nous laissons au lecteur le soin de l'adapter.

Supposons x compris entre 0 et 9. Dans ce cas :

$$P(x) = x$$

l'équation s'écrit :

$$x^2 - 11x - 22 = 0$$

Les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{209}}{2} \qquad x_2 = \frac{11 + \sqrt{209}}{2}$$

Or ces deux nombres ne sont pas entiers.

Supposons x compris entre 10 et 99 :

x s'écrit : $x = 10a + b$ (où a et b sont compris entre 0 et 9 avec $a \neq 0$)
et $P(x) = ab$.

Alors l'équation s'écrit :

$$(10a + b)^2 - 10(10a + b) - 22 = ab$$

C'est-à-dire : $$100a^2 + 20ab + b^2 - 100a - 10b - 22 - ab = 0$$

Donc: $$b^2 + b(19a - 10) + 100(a^2 - a) - 22 = 0$$

On a là un trinôme du second degré en b, dont le discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= (19a - 10)^2 - 4(100(a^2 - a) - 22) \\ &= -39a^2 + 20a + 188.\end{aligned}$$

La fonction $a \mapsto \Delta(a)$

est croissante sur $\left]-\infty \ , \ \frac{10}{39}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{10}{39} \ , \ +\infty\right[$

et $\Delta(2) = 72 \qquad \Delta(3) = -103 \qquad \Delta(1) = 169 \qquad \Delta(0) = 188.$

Donc, pour $a \geq 3 \quad \Delta(a) < 0$ et il n'y a pas de solution réelle.

Il reste à voir pour $a = 1, 2$ ($a = 0$ a déjà été traité).

1. Si $a = 1$ l'équation s'écrit alors : $b^2 + 9b - 22 = 0$

   dont les racines sont : $b = 2$ et $b = -11$

2. Si $a = 2$ l'équation s'écrit : $b^2 + 28b + 178 = 0$

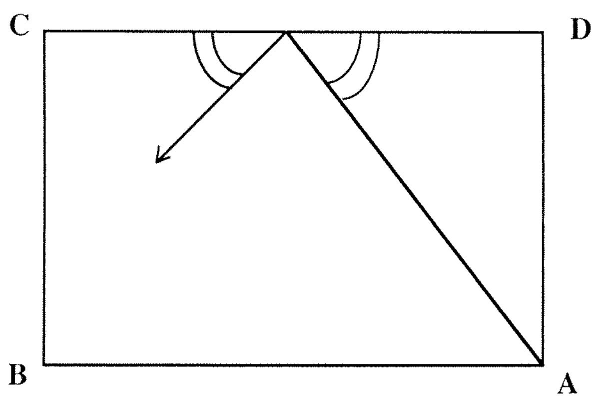
   dont les racines sont $-14 + 3\sqrt{2}$ et $-14 - 3\sqrt{2}$

Toutes les deux négatives et non entières.

Donc, la seule solution est 12.

Sujet 2 :

Énoncé :



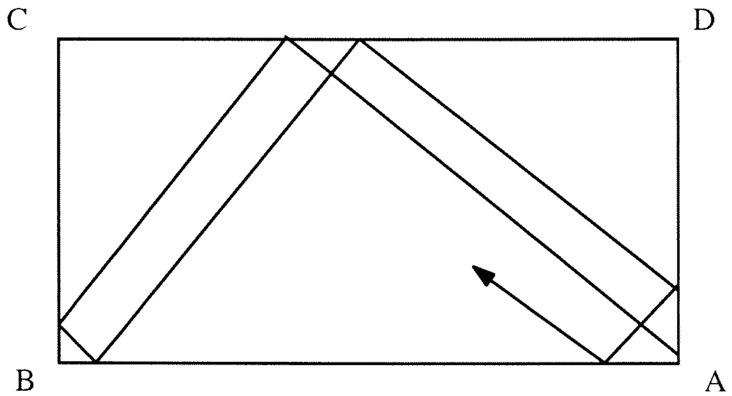
On dispose d'un billard rectangulaire ABCD de longueur AB = 1997 mm et de largeur AD = 1000 mm.

Il comprend un trou à chaque coin. On envoie une boule depuis le coin A suivant la bissectrice de l'angle BAD. Elle rebondit ensuite sur les bords, comme indiqué sur la figure. On néglige les frottements. Montrer que la boule atteindra un trou et déterminer au bout de combien de rebonds.

Plusieurs méthodes de résolution ont été envisagées. Nous citerons les trois principalement rencontrées.

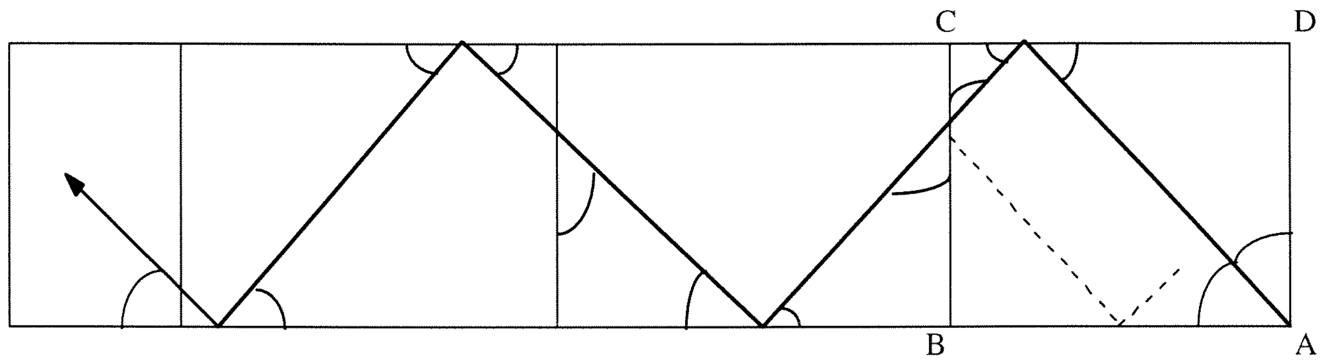
Solution :

1) La détermination de la trajectoire de la boule sur la figure proposée :



Le calcul portait alors sur les impacts successifs de la boule sur les côtés.

2) Un raisonnement par symétries successives relativement aux côtés BC et AD.

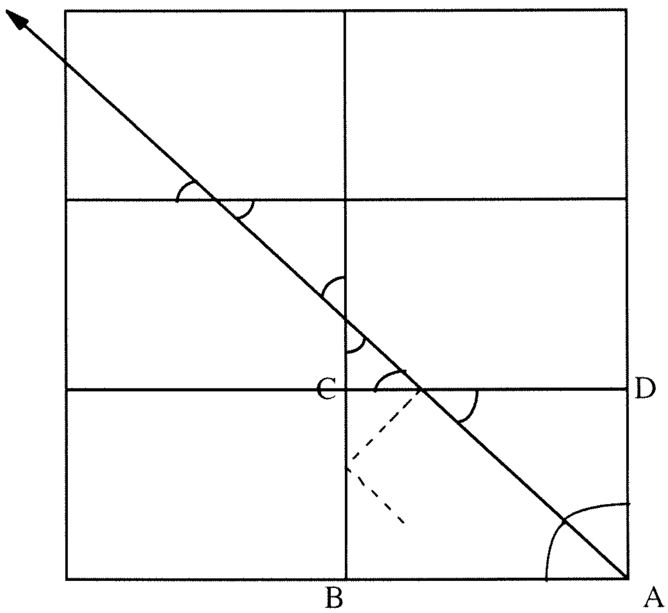


Ainsi représentée, la trajectoire est une ligne brisée. On peut se placer dans le repère orthonormé

$$R = \left(\mathcal{A},\ \frac{\overline{\mathcal{AB}}}{\left\|\overline{\mathcal{AB}}\right\|},\ \frac{\overline{\mathcal{AD}}}{\left\|\overline{\mathcal{AD}}\right\|} \right)$$

dans lequel les calculs des coordonnées successives sont simples.

3) Un raisonnement par symétries successives relativement à chaque côté du triangle permet de simplifier considérablement la représentation de la trajectoire.



Dans le repère orthonormé $R = \left(A, \frac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|}, \frac{\overline{AD}}{\|\overline{AD}\|} \right)$,

l'équation de la "trajectoire" est $y = x$

La boule atteindra un trou si et seulement si il existe 2 entiers k et l avec $(k,l) \neq (0,0)$ tels que la trajectoire rencontre le point de coordonnées $(1997\,k \;,\; 1000\,l)$.
On doit donc avoir $1997\,k = 1000\,l$.

Il est clair que $k = 1000$ et $l = 1997$ conviennent donc la boule atteindra bien un trou.

Cherchons la plus petite valeur possible pour k .

1997 étant un nombre premier, comme 1000 doit diviser $1997\,k$, nous avons nécessairement k multiple de 1000.

On en déduit que $k = 1000$ est la plus petite valeur possible. Par suite $k = 1000$ et $l = 1997$ donnent le résultat.

Trouvons à présent le nombre de rebonds.

Il y a rebond chaque fois que la boule passe d'un rectangle à un autre dans le schéma ci-dessus.
Elle tombe dans le trou de coordonnées $(1997\,k \;,\; 1000\,l)$ avec $k = 1000$ et $l = 1997$.

Le trou est dans la $1997^{ème}$ ligne "horizontale" de rectangles. Il y a donc eu 1996 rebonds contre les faces AB ou CD du billard. Le trou est dans la $1000^{ème}$ colonne "verticale" de rectangles.

Il y a donc eu 999 rebonds contre les faces AD ou BC du billard.
La boule fait donc 2995 rebonds avant de disparaître.

Commentaires :

Cet exercice a en général semblé inspirer nos candidats. La première méthode a donné lieu aux résolutions les plus confuses (difficultés de représentation de la trajectoire sur la figure proposée, passage d'un "trou" lors des rebonds successifs).

Sujet 3 :

Enoncé :

Saint-Exupéry a quitté le service de l'aéropostale et s'est reconverti dans l'importation de plantes tropicales.
Dans les soutes de son triplan bimoteur, il transporte des boutures de baobab ("baobab baobabensis") et des rosiers des sables ("rosa arenarum"). Il dispose du même nombre de boutures de chaque espèce. Elles sont mélangées et réparties dans deux caisses.
A ce stade de leur croissance, les deux espèces sont encore indiscernables.
Le petit prince ouvre une des deux caisses au hasard et y dérobe une bouture pour la cultiver sur sa planète personnelle.
Le petit prince a l'impression que lorsque l'une des caisses ne contient aucun baobab, il a plus de chance d'avoir une bouture de rosier.
Pouvez-vous l'aider ?
Pouvez-vous lui dire quelle serait la meilleure situation pour lui ?

Solution :

Dans ce problème, on devait imaginer les deux procédures de choix les plus simples que le Petit Prince pouvait adopter.

Dans la première, le Petit Prince ouvre les deux boîtes puis choisit une bouture au hasard parmi les boutures sous ses yeux.

Cela conduit à une situation où la probabilité d'avoir une bouture de rosier est de un demi indépendamment du nombre de boutures de rosier dans chacune des boîtes.

Dans ce premier cas, la question du problème n'avait pas de sens. On pouvait donc en conclure que cette procédure n'était pas celle choisie par notre personnage.

Dans la seconde procédure, notre personnage choisit une des deux boîtes, l'ouvre puis fait son choix parmi les boutures sous ses yeux.

C'est dans ce cas que la distribution des boutures de rosier dans les boîtes change la probabilité d'obtenir un rosier. C'était la procédure à étudier.

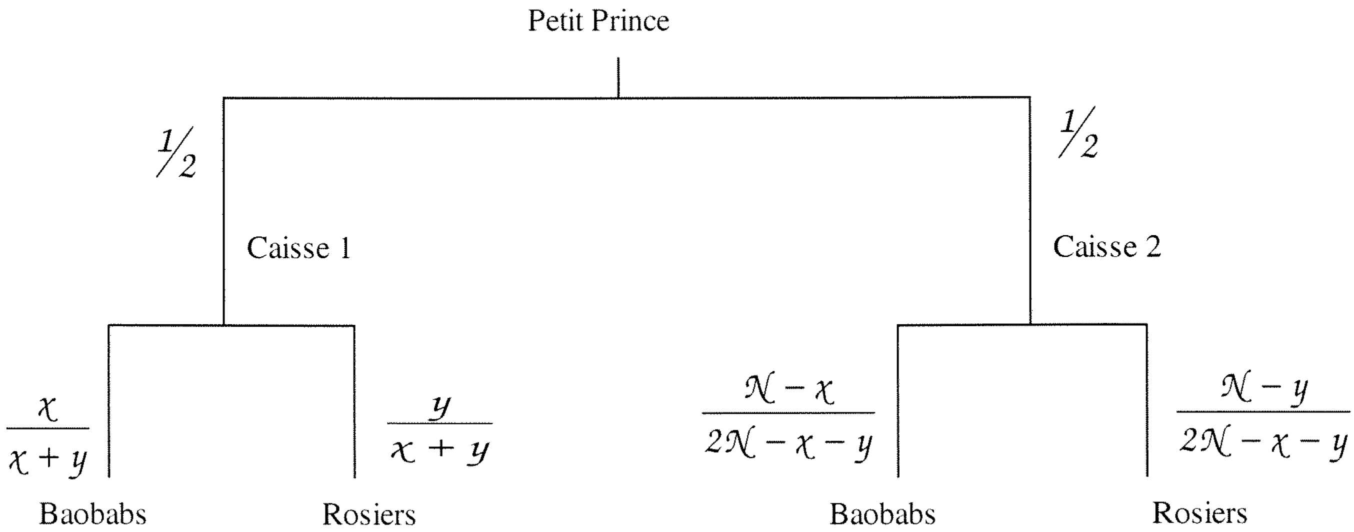
Au cours de cette étude, le choix des variables et des notations pouvait faciliter ou compliquer le travail. Peu de candidats sont allés au delà du calcul de la probabilité de l'évènement " le Petit Prince choisit un rosier" que nous noterons $\mathcal{R}(x,y)$.

On note $\mathcal{N}$ le nombre de baobabs et de rosiers ($\mathcal{N}$ baobabs et $\mathcal{N}$ rosiers). On note de même x le nombre de baobabs et y celui de rosiers dans première caisse.

Il y a donc :

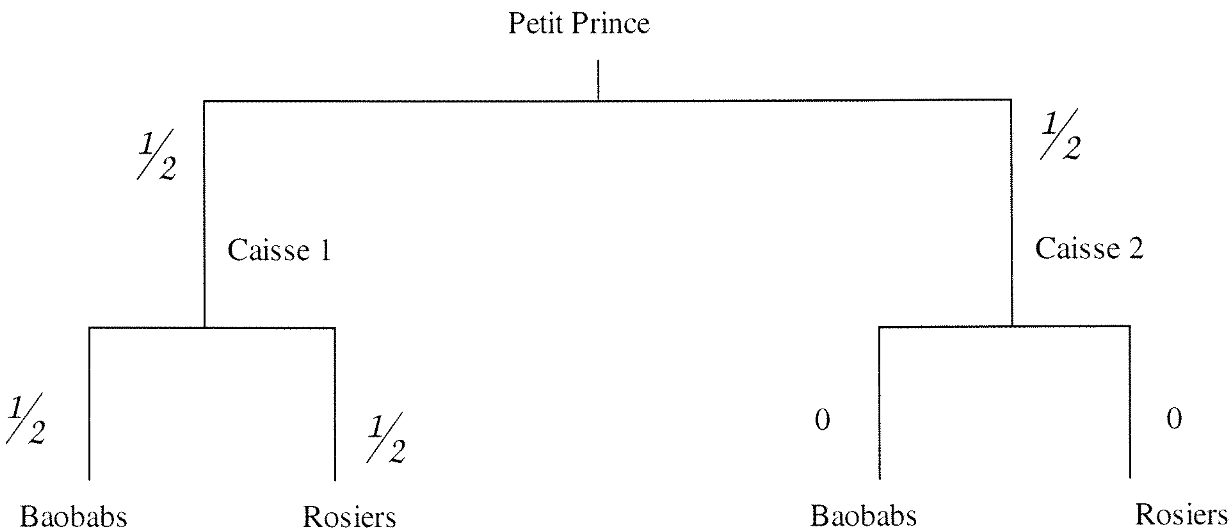
- ◊ $\mathcal{N} - x$ baobabs dans la deuxième caisse
- ◊ $\mathcal{N} - y$ rosiers dans la deuxième caisse
- ◊ $x + y$ boutures dans la première caisse
- ◊ $2\mathcal{N} - x - y$ boutures dans la deuxième caisse

Pour connaître la probabilité qu' en ouvrant l'une des deux caisses au hasard, le Petit Prince choisisse un rosier, nous faisons un arbre.



Ou si : $x = \mathcal{N}$ *et* $y = \mathcal{N}$

On a un arbre semblable si $x = 0$ *et* $y = 0$



La probabilité d'avoir un rosier est :

$$\mathcal{P}(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{\mathcal{N}-y}{2\mathcal{N}-x-y}\right] & si \quad 0 < x+y < 2\mathcal{N} \\[2ex] \dfrac{1}{4} & si \;\; x+y=0 \quad ou \quad x+y=2\mathcal{N} \end{cases}$$

La difficulté est maintenant de savoir pour quelles valeurs de x et y (entiers, compris chacun entre 0 et $\mathcal{N}$) cette probabilité est la plus grande. Les deux caisses n'ont pas de signe distinctif. Le problème présente donc une symétrie : la situation est la même s'il y a x baobabs et y rosiers dans la première caisse ou s'il y a x baobabs et y rosiers dans la deuxième caisse. Ce qui se traduit par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}-x\,;\mathcal{N}-y) \;=\; \mathcal{P}(x\,;y)$$

On peut donc se contenter d'observer les cas où : $\begin{array}{l} 0 \le x \le \mathcal{N} \\ 0 \le y \le \mathcal{N}/2 \end{array}$

Nous nous pencherons tout d'abord sur les cas où : $\begin{array}{l} 0 \le x \le \mathcal{N} \\ 0 < y \le \mathcal{N}/2 \end{array}$

Nous étudierons par la suite le cas où $\begin{array}{l} y = 0 \\ 0 \le x \le \mathcal{N} \end{array}$

1 ^{er} cas : Nous supposons $0 \le x \le \mathcal{N}$ $\;et\;$ $0 < y \le \mathcal{N}/2$
L'énoncé suggère de comparer $\mathcal{P}(x;y)$ et $\mathcal{P}(0;y)$

$$2\left[\mathcal{P}(x\,;y)-\mathcal{P}(0\,;y)\right] = \left[\frac{y}{x+y}+\frac{\mathcal{N}-y}{2\mathcal{N}-x-y}\right] - \left[1+\frac{\mathcal{N}-y}{2\mathcal{N}-y}\right]$$

$$= \frac{y}{x+y}+\frac{\mathcal{N}-y}{2\mathcal{N}-x-y}-1-\frac{\mathcal{N}-y}{2\mathcal{N}-y}$$

$$= x\left[-\frac{1}{x+y}+\frac{\mathcal{N}-y}{(2\mathcal{N}-x-y)(2\mathcal{N}-y)}\right]$$

or : $\quad 2\mathcal{N} - y = \mathcal{N} + (\mathcal{N} - y) \geq x + y \quad$ car $\quad \mathcal{N} - y \geq y \quad (y \leq \mathcal{N}/2)$

$$2\left[\mathcal{P}(x\ ;\ y) - \mathcal{P}(0\ ;\ y)\right] \leq x\left[-\frac{1}{x+y} + \frac{\mathcal{N}-y}{(2\mathcal{N}-x-y)(x+y)}\right]$$

$$\leq \frac{x}{x+y}\left[\frac{\mathcal{N}-y}{(2\mathcal{N}-x-y)} - 1\right]$$

or : $$\left[\frac{\mathcal{N}-y}{(2\mathcal{N}-x-y)} - 1\right] \leq \frac{x-\mathcal{N}}{2\mathcal{N}-x-y} \leq 0$$

Donc :

$$\mathcal{P}(x\,;y) \leq \mathcal{P}(0\,;y) \quad pour \quad 0 \leq x \leq \mathcal{N} \quad et \quad 0 < y \leq \mathcal{N}/2$$

On veut voir pour quelle valeur de $y\ (0 < y \leq \mathcal{N}/2)$ la fonction $y \mapsto \mathcal{P}(0\,;y)$est maximale.

$$\mathcal{P}(0\,;y) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\mathcal{N}-y}{2\mathcal{N}-y}\right] = \frac{1}{2}\left[2 - \frac{\mathcal{N}}{2\mathcal{N}-y}\right]$$

Or la fonction : $\quad y \mapsto f(y) = 2\mathcal{N} - y \quad$ est décroissante sur $[0, 2\mathcal{N}[$ d'où la fonction :

$$y \mapsto \frac{\mathcal{N}}{2\mathcal{N}-y}$$

qui est croissante sur l'intervalle où l'on se place et donc : $y \mapsto \mathcal{P}(0\,;y)$ est décroissante.

Le maximum est atteint pour $y = 1$ et vaut :

$$\mathcal{P}(0\,;1) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\mathcal{N}-1}{2\mathcal{N}-1}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\mathcal{N}-1/2-1/2}{2\mathcal{N}-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3/2 - \frac{1/2}{2\mathcal{N}-1}\right]$$

2 ème cas : Nous supposons $0 \leq x \leq N$ *et* $y = 0$ **, d'abord :**

$$P(x\,;0) = \frac{1}{2}\left[\frac{N}{2N - x}\right] \text{ si } x \text{ non nul}$$

$$\text{et } \quad P(0\,;0) = \frac{1}{4}$$

Il nous reste à comparer $P(x;0)$ à $P(0;1)$.

On remarque que :

$P(0\,;0) \; - \; P(0\,;1) \;\leq\; 0$ pour tout N

Et pour x non nul :

$$P(x\,;0) - P(0\,;1) = \frac{1}{2}\left[\frac{N}{2N - x}\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{N - 1}{2N - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{N}{2N - x} - 1 - \frac{N - 1}{2N - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-4N^2 + 3N + 3Nx - 2x}{(2N - x)\;(2N - 1)}\right]$$

Or :

$$-4N^2 + 3N + 3Nx - 2x \leq 0$$

si et seulement si $\quad -2x + 3Nx \leq 4N^2 - 3N$

si et seulement si $\quad x \leq \dfrac{4N^2 - 3N}{3N - 2}$

or $\quad \dfrac{4N^2 - 3N}{3N - 2} \geq N \quad$ *pour tout* $N \geq 1$

Donc $P(x;0)$ - $P(0;1)$ est négatif pour tout entier x compris entre 0 et N.

Ceci nous permet d'affirmer que la probabilité d'avoir un rosier est la plus grande lorsque l'une des deux caisses contient un rosier et aucun baobab.