

## **UNE EXPERIENCE D'ECHANGE A DISTANCE SUR LA MODELISATION D'UNE PISCICULTURE**

par Kaare SVENSGAARD (Sonderborg Gymnasium)  
et Richard CABASSUT (lycée international de Strasbourg)

### **1) la mise en place de l'échange:**

#### Origine de l'échange :

La MAFPEN de Strasbourg a organisé pendant plusieurs années des stages de formation des enseignants dans le cadre d'un projet TRIFOLIUM. Un professeur de mathématiques d'un lycée de Strasbourg a rencontré en 1994-95, au cours d'un de ces stages, un professeur de mathématiques d'un lycée danois de Sonderborg. L'année suivante, ces professeurs ont organisé un échange entre classes de premières, avec séjours réciproques d'une semaine des classes. A cette occasion, ils ont mesuré la difficulté d'impliquer l'enseignement des mathématiques dans ce type d'échanges. Aussi ont-ils décidé de mettre en place des échanges à distance au cours desquels ils pourraient expérimenter des thèmes concernant l'enseignement des mathématiques.

#### Classes susceptibles de participer à l'échange :

Le professeur français avait en charge des classes de première S et de première L avec ou sans option mathématiques. Le professeur danois enseignait dans des classes de première ou terminale, scientifiques ou linguistiques. D'autres professeurs de l'établissement français ont été sollicités pour proposer des thèmes d'échanges compatibles avec les classes danoises mais ont finalement décliné l'offre, invoquant des contraintes de programmes ou des difficultés à communiquer en langue étrangère.

#### Choix du thème et de la classe:

Plusieurs thèmes ont été envisagés : un travail sur les éléments d'Euclide à partir des travaux du mathématicien danois Georg Mohr et de son livre *Euclides Danicus* (voir « l'Ouvert n°74, pages 45 à 47), un échange de solutions d'exercices tirés de l'épreuve « mathématiques sans frontières » (pour laquelle il existe une équipe d'organisation au Danemark), des échanges à partir de cassettes vidéo en anglais sur le théorème de Pythagore, les polynômes ou les suites. Mais aucun passage à l'acte ne se produisait et l'année scolaire avançait. Début février, le collègue danois proposa un important dossier sur un problème de modélisation d'une pisciculture. Le dossier avait été composé à partir d'un article en danois et d'un article en anglais<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Autentiske matematikanvendelser, Matematiklaererforeningen 1991, « Vaekstmodeller for orreder. Ferskvandsfiskerilaboratoriet », H.C. Hansen, Askov Hojskole, pages 6 à 17 ; ISBN 87-89229-46-0 .  
Mathematical Submodels in Water Quality Systems, Amsterdam, 1989, chapter 16 « Fisch Growth »  
by Jon From and Gorm Rasmussen.

Ce thème a été retenu, même si dans l'exposé de la situation il est fait mention de fonctions exponentielles et puissances à exposants réels, thèmes qui ne sont pas aux programmes de première française . En effet il nous a paru plus important d'entreprendre un échange même si le thème retenu ne correspond pas idéalement aux programmes des classes de l'échange plutôt que d'attendre indéfiniment de trouver un thème idéal.

Le professeur français travaillait pour sa classe de première scientifique avec d' autres professeurs et classes sur un projet pédagogique : même progression pédagogique sur l'année avec des contrôles communs aux trois classes. Devant la rigidité de ce système, et la pression du programme à finir dans le temps imparti, c'est la classe de première L, option mathématiques , qui a été choisie comme classe participant à l'échange.

## 2) un exemple de modélisation d'une pisciculture :

### 1) justification du modèle :

On étudie un modèle interdisciplinaire, en mathématique et en biologie , utilisé dans les piscicultures danoises et développé au laboratoire de recherche sur la pêche en eau douce de Silkeborg par Jan From et Gorm Rasmussen. Ce modèle décrit la croissance du poisson en fonction notamment de la quantité d'aliments absorbés, ce qui permettrait éventuellement une optimisation financière de la pisciculture.

Pour une période de temps donnée, la différence entre les quantités absorbées (INPUT) et celles perdues par un poisson (OUTPUT) est appelée croissance (GROWTH) et correspond à l'équivalent en énergie des variations des différentes parties du corps du poisson . L'unité choisie par le biologiste est le gramme d'oxygène chimiquement nécessaire ( 1 gCOD= 14,31 kJ = 27 g de poids frais).<sup>2</sup>

$$\text{GROWTH} = \text{INPUT} - \text{OUTPUT} \quad (1)$$

### Modélisation des quantités absorbées (INPUT) :

La première hypothèse est que les éléments absorbés (INPUT) dépendent de trois paramètres :

le poids (w) du poisson (un gros poisson mange plus qu'un petit),

le niveau d'alimentation (f) qui est un indicateur compris entre 0 et 1 ( si f = 0 le poisson ne reçoit aucune nourriture et si f = 1 le poisson peut manger autant qu'il veut) et qui est défini comme étant proportionnel à la quantité de nourriture présente dans l'eau ,

la température (T) de l'eau en degré Celsius (l'activité de recherche de nourriture et la digestion du poisson dépendent de la température de l'eau).

Comment trouver la relation exprimant INPUT en fonction de w , f et T ?

Des hypothèses théoriques reposant sur les connaissances biologiques des truites permettent de proposer le modèle suivant.

Comme f est proportionnel par définition à la quantité de nourriture présente dans l'eau , on suppose que la quantité de nourriture ingurgitée INPUT est proportionnelle à la quantité de nourriture présente et donc proportionnelle à f.

---

<sup>2</sup> COD est l'abréviation de Chemical Oxygen Demand .

Comme  $f$  est proportionnel par définition à la quantité de nourriture présente dans l'eau, on suppose que la quantité de nourriture ingurgitée INPUT est proportionnelle à la quantité de nourriture présente et donc proportionnelle à  $f$ .

Si un gros poisson est  $L$  fois plus long qu'un petit poisson et si on suppose que la croissance est isotrope, le gros poisson sera alors  $L^3$  fois plus gros en volume que le petit et chaque surface du gros poisson sera  $L^2$  fois plus importante que celle du petit. On suppose de plus que le gros poisson et le petit assimilent la même quantité de nourriture par centimètre carré de surface d'intestin. En conséquence, le gros poisson absorbe  $L^2$  fois plus de nourriture que le petit poisson. Si on choisit le poids du petit poisson comme unité et si on note  $w$  le poids du gros poisson on a :  $w = L^3$  donc  $L = w^{1/3}$  soit  $L^2 = w^{2/3}$ . Et la quantité de nourriture ingurgitée INPUT est proportionnelle à la surface de l'intestin, et donc proportionnelle à  $L^2$  ou encore  $w^{2/3}$ .

En conclusion le modèle théorique propose :  $INPUT = f \times h(T) \times w^{2/3}$  (2) où  $h(T)$  est une fonction à déterminer.

On ajuste ensuite le modèle théorique par des expérimentations dans des aquariums. En fixant deux paramètres sur trois, on peut observer les variations de INPUT en fonction d'un paramètre.

L'expérimentation pratiquée avec les truites de type arc-en-ciel *Oncorhynchus mykiss* pour une période d'observation de un jour permet de proposer le modèle final suivant, en notant  $dR/dt$  la quantité absorbée (INPUT) par jour :

$$dR/dt = 0,086 f \times \exp(0,0761 T) \times w^{0,6767} \quad (3)$$

#### Modélisations des quantités perdues (OUTPUT) :

La justification de la modélisation des rejets est beaucoup plus complexe que précédemment et fait appel pareillement à la théorie et à de nombreux contrôles expérimentaux parmi lesquels ceux de Jan From et Gorm Rasmussen. Les pertes sont réparties avec les modèles suivants :

- matières fécales =  $0,011861 \times (\exp(1,1057 f) - 1) \times \exp(0,0808 T) \times w^{0,5499} + 0,0162 \times f^{1,4259} \times \exp(0,0577 T) \times w^{0,5471}$  (4) ;
- urine =  $0,000229788 \times (\exp(2,132 f) - 1) \times \exp(0,1112 T) \times w^{0,6572}$  (5) ; on inclut dans ce poste les autres sécrétions externes, comme par exemple les pertes par les ouies ou la peau;
- métabolisme de base =  $0,008464 \exp(0,0911 T) \times w^{0,7751}$  (6), le métabolisme de base étant l'énergie consommée par le poisson pour les nécessités vitales lorsque le poisson est affamé ;

### 3) les exercices proposés aux élèves :

#### Feuille de travail proposée aux élèves :

Un document en anglais présentant la modélisation précédente est distribué aux élèves. Il est accompagné des exercices suivants qui ont été traduits en français dans cet article. Ce document est une traduction de l'article danois de H.C. Hansen cité dans la première note de bas de page.

#### *Exercice 1*

Considérant la croissance  $dw/dt$  par jour de la truite, Jan From et Gorm Rasmussen parviennent à la formule jointe. Vérifier que nous obtenons la même formule en utilisant (1), (3), (4), (5), (6) et (7).

La formule jointe est :  $dw/dt =$

$$\begin{aligned} & f \times 0,086 \times \exp(0,0761 \times T) \times w^{0,6767} - 0,011861 \times [\exp(1,1057 \times f) - 1] \\ & \times \exp(0,0808 \times T) \times w^{0,5499} - 0,0162 \times f^{1,4259} \times \exp(0,0577 \times T) \times w^{0,5471} \\ & - 0,006237 \times [\exp(1,0885f) - 1] \times \exp(0,0769T) \times w^{0,7030} \\ & - 0,000229788 \times [\exp(2,132f) - 1] \times \exp(0,1112T) \times w^{0,6572} \\ & - 0,008464 \times \exp(0,0911T) \times w^{0,7751} \end{aligned}$$

#### *Exercice 2*

Réaliser un programme sur ordinateur qui permette, lorsqu'on entre les valeurs de  $f$ ,  $T$  et  $w$ , d'obtenir  $dw/dt$ . S'assurer que le programme est construit de telle manière que les données individuelles (nourriture, matières fécales...) puissent être imprimées lorsqu'on en a besoin. Les exercices ci-dessous sont basés sur ce programme.

#### *Exercice 3*

Grâce au modèle informatique, définir un budget d'énergie pour un poisson de 10 gCOD, avec un niveau d'alimentation de 0,5, dans une eau qui est à 5 degrés Celsius. Déterminer le pourcentage de nourriture qui est transformé en croissance, en matières fécales, en urine, en métabolisme de base et en activité.

#### *Exercice 4*

Il est très important pour un pisciculteur de trouver le niveau d'alimentation optimal pour un poisson de taille donnée à une température donnée. La quantité significative est appelée le ratio

d'utilisation  $dw/dR$  et se calcule comme la croissance, c'est-à-dire, comme un pourcentage de la nourriture ingurgitée, soit:

$$dw/dR = [ (100 dw/dt) : dR/dt ] \%$$

Vous devrez déterminer le ratio d'utilisation pour un poisson de 10 gCOD, dans une température de 5 degrés Celsius pour les niveaux d'alimentation  $f = 0,1 ; 0,2 ; \dots ; 0,9 ; 1,0$  et , grâce à ce résultat, déterminer le niveau d'alimentation optimal, c'est-à-dire, la valeur de  $f$  pour laquelle le ratio d'utilisation est maximal.

Vérifier que le gros poisson a un ratio d'utilisation plus élevé que le petit poisson et observer aussi l'influence de la température.

#### *Exercice 5*

Dans l'exercice 4, vous aurez remarqué que les niveaux d'alimentation les plus élevés ne conduisent pas nécessairement à une importante croissance, comparé à des niveaux d'alimentation moyens. Une des raisons est peut être que le pourcentage de nourriture assimilée par la truite diminue lorsque la quantité de nourriture augmente. Le coefficient d'assimilation  $a_k$  est une mesure particulière qui détermine comment le poisson assimile la nourriture:

$$a_k = ( \text{nourriture} - \text{matières fécales} ) / \text{nourriture}$$

Utiliser le modèle informatique pour dessiner des courbes de  $a_k$ , fonction de  $f$ , pour un poisson de 10 g et de 100 g , à une température de 5 et de 20 degrés Celsius. Tirez en une conclusion en quelques mots.

#### *Exercice 6*

Avant d'évaluer l'intérêt du modèle, vous devez examiner le but de ce modèle. Si l'on dit que le but de ce modèle est d'aider les pisciculteurs, alors la meilleure manière d'évaluer le modèle serait de discuter avec un pisciculteur qui l'utilise.

À présent, sachant que l'on dépense des millions pour l'assainissement de l'eau, vous devriez trouver d'autres objectifs, plus importants, de ce modèle.

Essayer de formuler un objectif d'un modèle, de telle façon qu'il prenne en compte les perspectives environnementales.

Lien avec le programme de mathématiques :

Ce thème a pu être relié aux extraits suivants du programme officiel français de mathématiques de première L :

- résoudre des problèmes issus de la vie courante ou d'autres disciplines et avoir une maîtrise minimale du calcul littéral nécessaire lors de l'étude des fonctions,
- dégager sur des exemples étudiés les différentes phases d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats,
- exploiter conjointement les aspects graphiques, numériques et algébriques ainsi que l'étude des variations de fonctions, employer des calculatrices ;
- études qualitatives ( croissance , allure des représentations graphiques ...), interprétations graphiques,
- programmation des valeurs d'une fonction d'une variable,
- exemples d'étude de comportements de fonctions, de lectures de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique, d'étude de situations décrites au moyen de fonctions.

**4) réalisation de l'échange :**

*le calendrier et les conditions de l'échange pour la classe française:*

février : proposition danoise du thème.

mars : réponse française avec proposition d'un plan de travail .

séance en classe du 4 mars (1heure): lecture du texte anglais jusqu'à l'exercice 1 inclus. Explications des termes anglais, définition des fonctions INPUT et OUTPUT. Définition mathématique sommaire des fonctions exponentielles et puissances, avec usage de la calculatrice.

séance en classe du 5 mars (1heure): activités de programmation à la calculatrice pour répondre à l'exercice 2 de l'activité de pisciculture.

Les élèves sont répartis en 5 groupes par types de calculatrice. Un rapporteur par groupe rédige un compte rendu. Il est répondu aux questions suivantes concernant la programmation : comment passe-t-on en mode programmation ? comment nomme-t-on un programme ? quel algorithme de calcul définir pour résoudre l'exercice 2 ? comment code-t-on cet algorithme dans le langage de programmation de la calculatrice étudiée ? comment afficher les résultats ?

Les rapporteurs doivent rendre leurs rapports rédigés pour le 7 mars.

séance en classe du 11 mars (1heure) :

Commentaires sur les rapports de chaque groupe. Résolution de l'exercice 3.

Pour le 14 mars les différents rapporteurs rendent les différents calculs de GROWTH en faisant varier w, T et f.

séance en classe du 14 mars (10 minutes) : Relever les devoirs. Lecture de l'exercice 5. Préparer la programmation du calcul du coefficient d'assimilation pour le 16 mars. Apporter du papier millimétré pour le 16 mars.

séance en classe du 16 mars (1heure):

Commentaires sur les rapports de chaque groupe. Résolution de l'exercice 4 avec répartition en différents groupes pour représenter les variations du ratio en fonction d'une variable prise parmi les trois T, w, f. Les groupes sont formés en fonction des valeurs des 2 variables fixées. Résolution des exercices 5 et 6. Bilan.

séance en classe du 18 mars (1heure):

Répartition en groupes de langues (anglais et allemand) pour rédiger nos réponses pour l'envoi aux élèves danois.

séance en classe du 23 mai (3/4 heure): Lecture des documents danois. Commentaire sur Excell.

séance en classe du 4 juin (1heure): Passage en salle d'ordinateurs pour présentation et manipulation d'Excell.

horaire total en classe: environ 7 heures.

## **5) évaluation de l'échange :**

Méthodes de travail : Pour certaines séances, les élèves ont travaillé en groupe (de langues ou de calculatrices) avec un rapporteur. Pour certaines résolutions d'exercices (lorsqu'il s'agissait de faire des calculs en fixant deux paramètres parmi trois) les élèves se sont répartis les calculs à faire.

Certains élèves ont déclaré : « un aspect très positif de ce travail était qu'il nous a permis de faire quelque chose de différent de la norme ».

Ordinateurs ou calculatrices ? L'approche danoise et l'approche française sont très différentes. Les conditions matérielles d'accès à la salle d'ordinateurs pour les classes françaises (une seule salle pas toujours disponible, un nombre limité de poste où Excell est implanté, pas de classes en groupe dans l'horaire de première L) ont orienté le professeur vers l'usage des calculatrices. Par contre des ordinateurs plus facilement disponibles et une culture d'utilisation de l'ordinateur pour rédiger des devoirs ont orienté le professeur danois vers l'usage de Excell. Ceci a conduit la classe de première L à découvrir l'intérêt de l'usage d'un tableur : une visite de salle d'ordinateurs a permis d'illustrer cette découverte, dans des conditions il est vrai un peu rudes avec 30 élèves pour 8 ordinateurs.

Représentations de courbes : Le fait d'avoir représenté les courbes avec des choix d'unité et d'origine différents d'un groupe à l'autre a souligné, à la comparaison des résultats, l'importance d'un choix judicieux .

Utilisation des calculatrices : Les erreurs d'écriture (oubli de parenthèses, de signes et d'opérations) sont encore nombreux. En programmation, l'importance de programmer l'affichage des résultats intermédiaires est apparu indispensable pour mieux contrôler les calculs et pour localiser plus facilement dans le programme où se situait l'erreur.

Prolongement : Ce travail pouvait se prolonger par deux autres exercices. L'un propose de montrer comment se fait le passage de la formule de modélisation théorique (2) à la formule (3). Mais il exige des ajustements linéaires de nuage de points expérimentaux avec utilisation de la fonction logarithme. Le deuxième exercice propose de simuler l'évolution du poids d'une truite au cours d'une année, lorsqu'on connaît la courbe d'évolution de la température au cours de l'année, pour les deux niveaux d'alimentation  $f = 0,5$  et  $f = 1$ . On a renoncé à ces prolongements à cause de contraintes de programmes et de temps.

Interdisciplinarité : Le professeur de biologie de la classe française a été contacté dès le mois de février mais il n'a pas été possible de mener un travail commun. De même la question relative à l'environnement dans l'exercice 6 est restée sans réponse pour la classe française. On s'est donc satisfait de la réponse danoise : « La plupart des piscicultures danoises sont situées à proximité de courants d'eau. Elles prennent l'eau de ces courants et la rejettent une fois utilisée. Bien entendu l'eau est polluée par la nourriture non mangée par les poissons. Le niveau d'alimentation  $f$  étant proportionnel à la nourriture ajoutée dans l'eau, plus  $f$  est élevé, plus la pollution est grande. L'eau est également polluée par l'urine et les excréments des poissons. Construire une station de traitement des eaux à la sortie de chaque pisciculture est très cher. Le modèle devrait inclure ce coût de traitement de l'eau, et maximiser le profit de la pisciculture compte tenu de ce coût supplémentaire. » Ce thème environnemental est certainement un thème culturel, car ces préoccupations sont plus développées au Danemark qu'en France. Il est intéressant de montrer qu'il peut être abordé par le biais d'une activité mathématique.

Faisabilité : Un des objets de ce compte rendu est de persuader le lecteur qu'un échange à distance est faisable, même avec une mise en place tardive au cours de l'année scolaire, malgré un thème qui peut paraître dépaysant pour l'un des partenaires ou au regard d'une lecture trop stricte des programmes, en lui donnant un volume horaire limité et en lui assignant une ambition mesurée.

## **6) perspectives :**

Utilisation de l'ordinateur : Le professeur français va essayer d'utiliser l'ordinateur en classe entière, dans le cas où les classes n'ont pas de groupes de travaux dirigés ou de modules dans leur emploi du temps, avec un ordinateur relié à un écran de télévision ou à un rétroprojecteur.

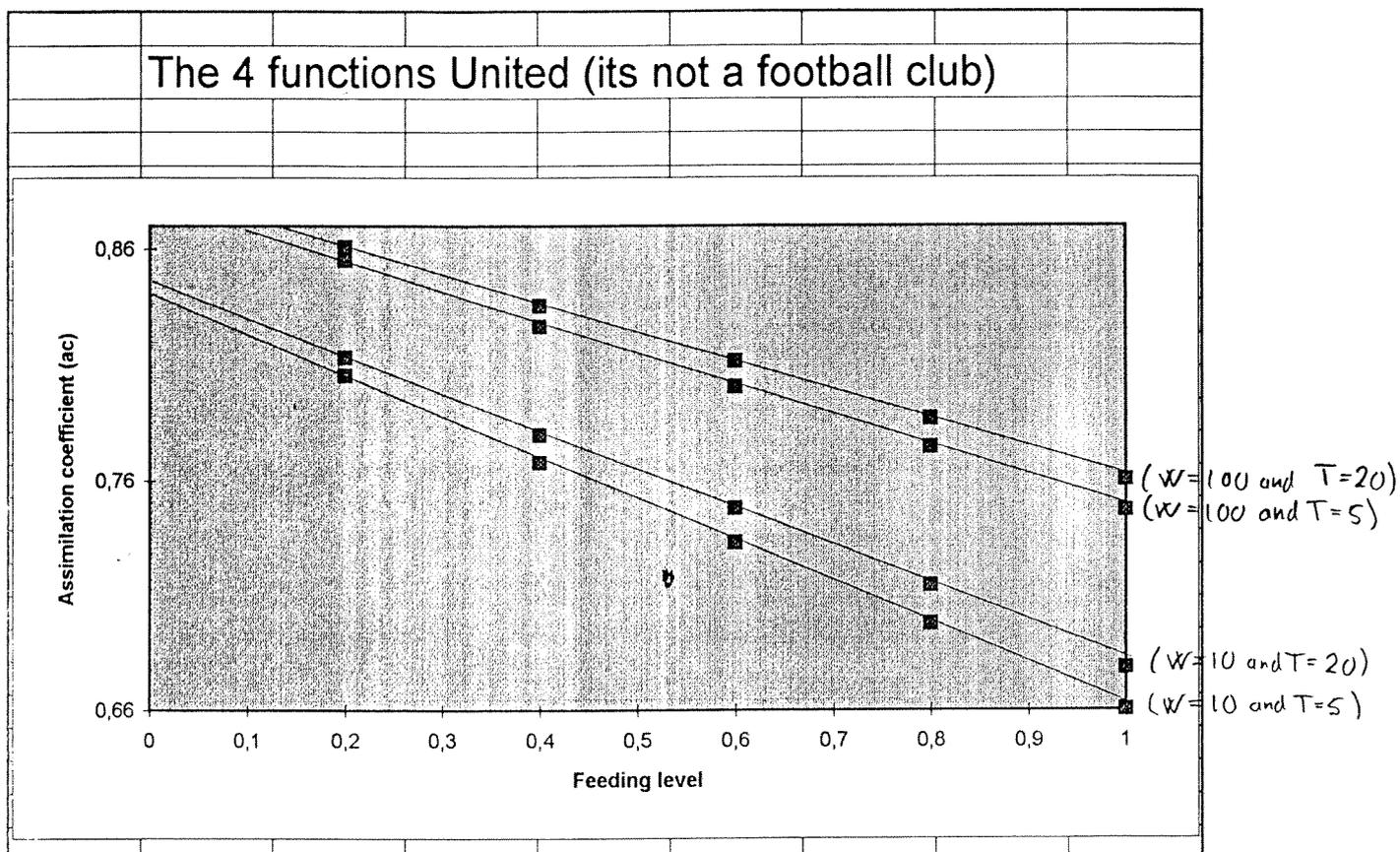
Utilisation d'Internet : Le professeur danois avait souhaité utiliser Internet, ce qui n'était pas possible puisque l'établissement français n'était pas connecté. Cela s'est traduit par un manque de souplesse et de rapidité dans les échanges. La prochaine connexion de l'établissement français à Internet devrait apporter cette amélioration.

Poursuite de l'échange : Cet échange devrait se poursuivre en choisissant éventuellement d 'autres thèmes et d'autres classes. Un thème de modélisation du traitement des fumées a été étudié mais aucun échange n'a encore été réalisé.

**Annexe**

On trouve ci-après des productions d'élèves avec d'abord le graphique de l'exercice n°5 proposé par des élèves danois sous Excell.

L'autre document est un commentaire de synthèse accompagnant des graphiques (non publiés) rédigé en allemand par des élèves français.



1/ Nach der Lektüre des Textes haben wir die unklaren mathematischen bzw. englischen Ausdrücke erläutert.

Das Problem dieser ersten Lektüre war, wie man anhand von Experimenten das Nahrungsniveau (feeding level) festlegt und wie man in der Theorie die Formeln 1, 2, 3, 4, 5 erhält.  
Habt ihr das verstanden?

2/ Aufgrund der verschiedenen Taschenrechner Typen haben wir uns in Gruppen aufgeteilt um die Algorithmen, welche die Lösungen zu den Aufgaben geben, zu programmieren (siehe Programme im Anhang).

Aufgabe 1 : Wir erhalten die verlangte Formel ohne Probleme.

Aufgabe 2 : Siehe Programm Anhang 1.

Die Ergebnisse unserer Taschenrechner erscheinen ausschließlich auf dem Bildschirm, weshalb wir die Ergebnisse per Hand aufschreiben mußten.

Aufgabe 3 : Kein Problem (siehe Anhang 2)

Aufgabe 4 : Studie der Variation der Ratio anhand eines Parameters (2 Parameter sind festgelegt). Dieser Teil scheint uns, der Informativste zu sein (siehe Anhang 3).

• 1. Bemerkung : Wieso kann die Ratio negativ sein?

→ Dieses käme einem abmagernden Fisch gleich oder einem, der Winterschlaf hält.

• 2. Bemerkung : Legt man die Temperatur des Wassers und das Gewicht des Fisches fest, so bemerkt man daß die Ratio mit Anstieg des Nahrungsniveaus zunimmt, bis ein Maximum erreicht wird (dieses Maximum liegt um die 70 bis 80% der maximalen Nahrungsaufnahme aber variiert mit Gewicht des Fisches und Temperatur des Wassers). Dies müßte mit der

maximalen Nahrungsaufnahmekapazität des Fisches übereinstimmen.  
(Siehe Kurve 1-4)

• 3. Bemerkung: Fixiert man das Nahrungsniveau bei 1 und das Gewicht des Fisches, nimmt die Ratio mit Zunahme der Temperatur leicht ab (siehe Kurve 5-6)

Anscheinend bevorzugen die Fische kalte Gewässer, was jedoch mit der Rasse des Fisches zusammenhängen könnte. Diese Frage könnte man eventual einem Fischzüchter stellen.

• 4. Bemerkung: Fixiert man das Nahrungsniveau bei 1 und die Temperatur, so steigt die Ratio mit Zunahme des Fischgewichts (Kurven 7, 8)

Je schwerer der Fisch ist, desto größer sind seine Aufnahme-kapazitäten.

Schlußfolgerung: Aufgrund unserer Ergebnisse raten wir einem Fischzüchter zu kalten Fischbecken, großen Fischen und einem Nahrungsniveau um die 70-80 %.

Aufgabe 5: Fixiert man die Temperatur und das Gewicht des Fisches, so bemerkt man mit Zunahme des Nahrungsniveaus einen abnehmenden Aufnahme-grad: je mehr der Fisch ißt, desto weniger kann er die aufgenommene Nahrung umsetzen (man nährt sich einem Sättigungsgrad).

Aufgabe 6: Man ist unklar, inwiefern die Fischzucht ein Umweltproblem darstellen könnte.