

LA MÉSAVENTURE DES COMPTABLES D'UTOPIA

Eric KERN

Fréquentant régulièrement des bouquinistes et des antiquaires, nous avons eu connaissance récemment de l'existence d'un texte étrange écrit sur un objet étrange, que, pour simplifier, nous appellerons un parchemin. L'étude du parchemin est d'une grande complexité. Dans un moiré qui semble en perpétuel mouvement apparaissent et disparaissent des phrases qui semblent avoir été reproduites à l'infini, avec d'imperceptibles changements de calligraphie et même parfois de sens. La texture du parchemin est elle-même si étrange qu'il semble impossible de la décrire. Après bien des efforts, nous pensons avoir réussi à rassembler quelques pièces du puzzle, en un texte cohérent, qui semble n'être qu'une histoire très banale, écrite sous forme d'un conte. Malgré toutes les réserves qui s'imposent, nous ne pouvons pas résister au plaisir de la communiquer.

Il y a très très longtemps, existait un royaume du nom d'Utopia. Les gens d'Utopia étaient de toutes les tailles, de la taille des gens actuels à des tailles infiniment petites et étaient en nombre infini.

Aussi, avait-on réparti ces gens en une infinité de castes : les grands, les demi-grands, les tiers de grands et ainsi de suite. Il n'y avait qu'un nombre fini de gens dans chaque caste.

Pour satisfaire les sujets de ce royaume, tous les articles devaient être reproduits en une infinité de dimensions : les grandes tailles, les demi-tailles, les tiers de taille et ainsi de suite.

Le prix d'un même article était bien sûr d'autant plus petit que l'article était menu. Ce dernier était déterminé avec une très grande précision, qui nécessitait un affichage avec une infinité de décimales.

Ceci n'était pas la seule bizarrerie de ce royaume. L'année était en effet divisée en une infinité de mois : le premier, le deuxième, le troisième et ainsi de suite.

Dans chaque caste il y avait des gens qui savaient additionner très rapidement une infinité de nombres successifs qui pouvaient, de ce fait, espérer accéder à la dignité de Comptable!

Il y avait aussi les Prêtres Mathématiciens qui connaissaient quelques secrets concernant ces additions, mais qui répugnaient à les révéler, de peur de se retrouver à mendier au coin de la rue (sic).

Le roi, qui n'avait pas la vie facile, avait nommé un Grand Argentier qui devait veiller à ce que les finances du royaume ne se transforment en un désastre.

Utopia ne faisait en effet commerce qu'avec un autre royaume du nom d'Aipotu qui avait les mêmes bizarreries qu'Utopia. Les sujets d'Utopia n'avaient d'intérêt que pour les objets fabriqués en Aipotu et inversement.

Les gens de ces deux pays étant très belliqueux, il importait, chaque année, d'équilibrer les importations et les exportations, afin d'éviter une guerre.

Pour survivre les Prêtres Mathématiciens avaient transmis aux Comptables quelques uns de leurs secrets.

Dans chaque caste des aides-comptables étaient chargés chaque mois de déterminer le total des exportations et des importations réalisées par la caste, les deux nombres obtenus étant ensuite recopiés sur une grande feuille de transactions.

Les feuilles des transactions présentées aux Comptables d'Utopia à la fin de l'année, comportaient une première ligne dans laquelle était inscrite le nom des mois et une première colonne dans laquelle figurait le nom des castes. Dans la première case de la première ligne qui était aussi la première case de la première colonne était apposé le sceau du Grand Argentier. La colonne de chaque mois était subdivisée en deux colonnes, une pour les importations et une pour les exportations. La ligne de chaque caste était subdivisée en deux lignes, une pour les importations une pour les exportations.

Les Prêtres Mathématiciens avaient indiqué aux Comptables et au Grand Argentier deux façons bien distinctes pour faire le bilan de l'année écoulée:

1) Additionner pour chaque mois les importations ainsi que les exportations pour l'ensemble des castes, reporter le résultat obtenu dans la colonne correspondante d'une dernière ligne, puis pour cette dernière ligne effectuer la somme des importations et la somme des exportations inscrites dans cette ligne, après avoir consciencieusement effectué toutes les opérations.

2) Additionner pour chaque caste les importations ainsi que les exportations pour l'ensemble des mois de l'année, reporter le résultat obtenu dans la ligne correspondante d'une dernière colonne, puis pour cette dernière colonne effectuer la somme des importations et la somme des exportations inscrites dans cette colonne, après avoir consciencieusement effectué toutes les opérations.

Tout ceci avait été consigné dans des textes sacrés qui précisaient que les résultats obtenus par chacune des méthodes étaient les mêmes. Les textes précisaient que pour éviter des conflits avec Aipotu il importait que le total annuel des importations de l'ensemble des castes ne doive pas différer substantiellement du total annuel des exportations de l'ensemble des castes. Ceci avait été révélé aux Prêtres Mathématiciens.

Les Grand Argentiers, qui ne faisaient confiance à personne, avaient dans un lointain passé divisé les Comptables en deux groupes: les Comptables du Nord et les Comptables du Sud. Ceux du Nord effectuaient les calculs suivant la première méthode des textes sacrés, ceux du Sud devant utiliser la deuxième méthode.

Les deux nombres calculés chaque année par les Comptables du Nord, qui étaient les mêmes que ceux calculés par les Comptables du Sud étaient tellement grands qu'il fallait beaucoup de temps rien que pour les énoncer.

Les Grand Argentiers, qui comme tous les dignitaires étaient plus ou moins corrompus, pour gagner du temps, ne s'intéressaient depuis longtemps qu'à une seule chose : la différence entre la recette et la dépense calculée par les Comptables, ceci dans le seul but d'éviter la guerre avec Aipotu. Bien que très belliqueux les

sujets d'Utopia n'aimaient pas l'idée de se faire tuer, ce qui aurait été inévitable en cas de conflit armé. Il en était de même pour les sujets d'Aipotu.

Chaque mois il y avait bien sûr des sujets avarés qui exportaient un maximum d'articles mais ces derniers étaient miraculeusement compensés par des sujets dépensiers et endettés. Un même sujet pouvait d'ailleurs se révéler avare un mois et dépensier le mois suivant, mais cela ne se produisait pas trop souvent.

Aussi, au grand désespoir des Comptables, toute une année de calcul se résumait en une seule chose : annoncer le nombre zéro au Grand Argentier. Ceci était l'occasion d'une grande fête où tout Utopia faisait ripaille pendant des jours et des jours.

Depuis des temps immémoriaux tout se passait absolument sans problème. La légende parlait bien d'une année catastrophique mais ce n'était qu'une légende.

Les Comptables avaient beau savoir calculer très rapidement, il leur fallait exactement une année pour faire leurs comptes et étaient très malheureux de ne jamais pouvoir prendre de vacances. Etant très respectés par tous les sujets du royaume, aucun Comptable ne renonça jamais à sa charge. On sait aussi que les Comptables ne connaissaient aucune des propriétés des nombres : ce n'était que des Comptables.

Or un jour naquit un Comptable qui calculait quatre fois plus vite que les autres Comptables. Aussi la première année de son entrée en fonction s'ennuya-t-il prodigieusement ! Notre Comptable, en effet, aimait son métier mais n'aimait que son métier ; l'idée de passer des vacances au soleil ne l'avait même pas effleuré. Il passa donc le reste de l'année, c'est à dire les trois quarts de l'année à réfléchir comment il pourrait remplir plus agréablement les années futures. Presque désespéré, il eut enfin l'idée qui allait faire de lui l'homme le plus célèbre d'Utopia. Après avoir rempli ses obligations statutaires, ce qui ne lui prit que le quart de l'année, il s'amusa d'abord à faire le calcul des Comptables du Sud, étant lui-même un Comptable du Nord. Ceci lui permit de remplir la première moitié de l'année. Pendant cette première moitié de l'année il avait aussi fait confectionner et remplir à ses frais, une feuille de calcul dans laquelle pour chaque mois et chaque caste ne figurait qu'un seul nombre, savoir la différence entre les exportations et les importations.

Pendant la moitié de l'année qui lui restait il se mit à additionner les résultats ainsi obtenus d'abord colonne par colonne en reportant les résultats dans une dernière ligne, puis ligne par ligne en reportant les résultats obtenus dans une dernière colonne. Après avoir additionné les nombres de la dernière colonne, puis les nombres de la dernière ligne quelle ne fut sa surprise de découvrir qu'il obtenait zéro. Dans cette feuille de calcul il y avait tantôt des nombres positifs tantôt des nombres négatifs mais ceci ne posait aucun problème à un Comptable. Tous ces calculs remplirent sa deuxième année de Comptable.

Dans les années qui suivirent, notre Comptable s'amusa à faire des simulations en faisant modifier légèrement (ce n'était pas un homme téméraire) les valeurs de la feuille officielle. Il en arriva à la conclusion que même lorsque le résultat final ne valait pas zéro ce résultat était le même que celui qu'il obtenait en utilisant les méthodes indiquées par les textes sacrés.

Notre Comptable qui avait un énorme besoin d'affection ne put s'empêcher de faire part de sa découverte dans tous les endroits qu'il fréquentait. La rumeur se fit bientôt si forte que tout le monde en Utopia ne parlait plus que de cela. Notre Comptable était devenu l'homme le plus célèbre du royaume.

Les Prêtres Mathématiciens regardaient avec amusement et avec tendresse notre comptable découvrir par des tâtonnements des résultats qui semblaient inédits, mais qui étaient enseignés aux novices peu de temps après leur entrée en séminaire. Les novices, qui n'avaient pas la maturité des prêtres avaient même en cachette composé une chanson très ironique à son sujet, qu'ils chantaient pendant leurs soirées.

Ce résultat intéressait énormément la guilde des Comptables. Non seulement il suffisait d'une demi-année pour faire les calculs, mais la feuille de calcul nécessaire pour effectuer les opérations avait une surface quatre fois plus petite que celle utilisée pour faire les calculs en suivant les canons imposés par les textes sacrés. Ceci était un argument de poids quand on sait que les Comptables payaient les feuilles de calcul avec leurs propres deniers. Il semblerait d'ailleurs que notre Comptable soit mort dans la misère, ayant investi toutes ses économies en feuilles de calcul pour faire ses simulations.

On décida donc de tirer au sort un Comptable dans chacune des castes qui rappelons-le étaient en nombre infini. On fit ceci dans le Nord et dans le Sud. Les Comptables ainsi désignés étaient chargés de faire des simulations, utilisant la nouvelle méthode en modifiant légèrement les valeurs fournies par les aides Comptables. Chaque année la simulation était la même pour tous les Comptables et invariablement on trouvait le même résultat, calculé par un même Comptable à la fois par lignes et par colonnes puisqu'un seul Comptable pouvait réaliser ces deux opérations en une seule année.

Les calculs de chaque simulation étaient aussi réalisés par les grands maîtres de la guilde en utilisant les canons sacrés. Invariablement ils en arrivaient à une conclusion : le Comptable, désormais légendaire d'Utopia, ne s'était pas trompé. Il n'y avait aucune raison de suivre les textes sacrés.

Cette expérience fut répétée année après année ceci pendant des siècles et des siècles. La guilde des comptables fut ainsi en possession de plusieurs infinités de résultat de simulations. Il faut savoir en effet que chaque siècle était formé d'une infinité d'années, la première, la deuxième, et ainsi de suite.

La guilde était très puissante dans le royaume aussi fit-elle pression auprès du Grand Argentier pour avoir le droit d'utiliser les nouvelles méthodes de calcul qui venaient d'être découvertes. Le roi qui était très influençable ne tarda pas à céder et signa la nouvelle charte des Comptables avec approbation et privilège du roi. Cet événement fut l'occasion d'une fête dans tout le royaume : ce fut la plus grande fête qu'ait jamais connu Utopia. La nouvelle méthode ne tarda pas à être divulguée aux gens d'Aipotu qui avaient de nombreux espions et qui l'adoptèrent aussi.

Les Comptables du Nord continuaient d'additionner par colonnes alors que les Comptables du Sud effectuaient des additions par ligne. Le Grand Argentier avait

été intransigeant à ce sujet.

Les Prêtres Mathématiciens tentèrent bien de s'opposer à pareille hérésie mais rien n'y fit : les gens d'Utopia avaient perdu la foi et le peuple, ainsi que le pouvoir avait remplacé les anciens dieux par des nouveaux moins exigeants et tellement plus agréables à servir. Les Prêtres Mathématiciens qui depuis longtemps n'étaient plus que tolérés furent chassés de leur temple et les quelques prêtres qui perpétuaient la tradition étaient réduits à la mendicité.

Les Comptables étaient les gens les plus heureux de tout le royaume. Le travail qui incombait à leur charge était fait en une moitié d'année et, n'ayant aucun intérêt particulier pour d'autres disciplines, passaient la deuxième moitié de l'année à bronzer au soleil. Ils devinrent ainsi les dignitaires les plus corrompus du royaume. Des siècles et des siècles se passèrent ainsi pendant lesquels on perdit jusqu'au souvenir des textes sacrés, quand arriva l'**Année de la Grande Confusion**. Cette année là il semble que les sujets d'Utopia et d'Aipotu furent atteints d'une étrange maladie.

Chaque mois certaines castes avaient surtout envie d'acheter alors que d'autres étaient très productives et exportaient en masse et le mois d'après le même phénomène se reproduisait mais avec d'autres castes. Ceci se répéta pendant l'infinité des mois de l'année. De mémoire de Comptable on n'avait jamais vu une feuille de calcul aussi irrégulière. Les Comptables se mirent donc au travail et horreur, obtinrent pour la première fois depuis des temps immémoriaux un résultat différent de zéro.

Les Comptables du Sud s'étant concertés, il y en avait dans chaque caste et les castes étaient en nombre infini, durent se rendre à l'évidence : tout le monde avait trouvé le même résultat, ce qui excluait la possibilité d'une erreur de calcul. Il en était de même pour les Comptables du Nord. Cette année là les Comptables ne prirent pas de vacances, ils étaient très inquiets.

Le premier jour de l'an, jour de la cérémonie de communication des résultats, les Comptables du Nord selon l'étiquette de la cour annoncèrent donc un résultat positif et ce nombre était un nombre tellement grand que nous renonçons à en donner une description. Les sujets d'Utopia semblaient s'être comportés en gens particulièrement avarés et productifs ce qui, bien qu'excellent pour les finances du royaume, était de mauvais augure pour envisager des relations pacifiques avec Aipotu. Même le roi qui d'habitude n'écoutait que d'une oreille très distraite commençait à frétiller sur son trône.

Puis vint le tour des Comptables du Sud. La plupart des gens de l'assistance pensèrent alors que les Comptables avaient été frappés de folie collective. Ils annonçaient bien le même nombre tout aussi grand que les Comptables du Nord avec une différence de taille : le nombre était précédé du signe moins, c'était un nombre négatif. Les Comptables du Sud prétendaient que les utopiens s'étaient comportés en gens extrêmement dépensiers ce qui était catastrophique pour les finances du royaume.

Le premier moment d'étonnement passé il fallut bien se rendre à l'évidence : les calculs des Comptables avaient été effectués consciencieusement et n'étaient pas

entachés d'erreur. Le grand jour de la prophétie était arrivé. Personne ne savait qui avait fait cette prophétie, mais tout le monde la connaissait. Cette année là il n'y eu pas de fête en Utopia.

Le nombre fourni par les Comptables le premier jour de la deuxième année qui suivit l'Année de la Grande Confusion resta gravé dans la mémoire des sujets d'Utopia qui lui attribuèrent des pouvoirs maléfiques. Bien que n'ayant aucune propriété remarquable digne d'être citée, on l'appela le Nombre de la Confusion et on le désigna par un symbole dont la calligraphie est tellement complexe que nous renonçons à la reproduire.

Il était toutefois urgent de trouver une solution. La rumeur ne disait-elle pas que le Grand Argentier d'Aipotu avait tenté de lever une armée mais que le projet avait avorté, personne ne faisant plus confiance à la banque centrale. Les sujets d'Utopia ne vivaient d'ailleurs plus que de troc ce qui à court terme risquait de plonger tout le pays dans l'anarchie.

Or le fou du roi était un homme sage. Il connaissait l'existence de ces loqueteux que l'on rencontrait parfois en train de mendier au coin d'une ruelle et qui se disaient Prêtres Mathématiciens. Des années passées dans l'étude de vieux grimoires lui avaient appris que c'était un Prêtre Mathématicien qui avait prédit le Jour de la Grande Confusion.

Il envoya donc quérir le mendiant qu'il entr'apercevait lors de sa promenade matinale. Le Prêtre Mathématicien était un homme généreux qui comprit immédiatement quel était le problème des Comptables d'Utopia. Il fit d'abord confectionner des feuilles de calcul qui étaient celles utilisées dans ces temps reculés où les Comptables calculaient en suivant les règles des textes sacrés. Il demanda aux aides-comptables de remplir la feuille de calcul suivant les anciens canons, puis il demanda à l'infinité de Comptables d'Utopia de faire les calculs suivant les règles édictées dans les textes sacrés.

Chaque Comptable n'ayant qu'une seule ligne ou une seule colonne à additionner car tous travaillaient sur la même feuille le calcul fut terminé rapidement. Les totaux par mois et les totaux par caste donnaient bien dans chaque cas des nombres finis, mais oh! stupeur, le calcul des exportations et des importations de l'année et dont la différence était le seul résultat qui intéressait le Grand Argentier fournissait bien deux nombres égaux : les exportations avaient exactement compensé les importations, du moins le pensèrent-ils, mais ces deux nombres étaient infinis.

Dans leur frénésie les Utopiens avaient fait tellement de transactions que celles-ci ne pouvaient qu'être décrites par deux nombres infinis. Ceci est du moins ce que l'on retint de l'explication donnée par le Prêtre Mathématicien aux Comptables qui n'en demandaient d'ailleurs pas tant.

Il donna bien d'autres explications, entre autres :

- 1) La méthode de calcul suivant les textes sacrés était la seule méthode de calcul simple pour déterminer l'état des finances du royaume après une année, ces dernières obéissant à des règles très subtiles.
- 2) Pour certaines années exceptionnelles, aucune méthode de calcul simple ne permettait de donner l'état des finances du royaume.

3) Les canons des textes sacrés avaient été instaurés pour permettre la détection éventuelle de ces années exceptionnelles.

4) Les Prêtres Mathématiciens connaissaient des méthodes de calcul malheureusement très complexes permettant de déterminer l'état des finances du royaume lors des années exceptionnelles.

5) Après une année exceptionnelle, en l'absence de tout calcul, un examen très attentif de l'état des finances du royaume suffisait à savoir si les importations et les exportations avaient été équilibrées cette année là, ceci au moins avec une approximation telle qu'elle permettait aisément de conclure s'il y avait lieu ou non de faire la guerre à Aipotu.

Quand le Prêtre Mathématicien, qui tout à sa joie d'avoir un auditoire, prétendit qu'il était possible que depuis que les Comptables utilisaient leur méthode de calcul il s'était peut-être déjà passé d'autres années toutes aussi catastrophiques que l'Année de la Grande Confusion sans que personne s'en soit rendu compte, on crut que toutes ses années de misère lui avaient troublé l'esprit et on pensa qu'il radotait.

Le Grand Argentier, tout surpris de n'y avoir pensé plus tôt, se rappelant que les finances du royaume n'étaient ni pires ni meilleures qu'avant l'Année de la Grande Confusion, décida que la chose la plus raisonnable était, maintenant que la confiance des sujets du royaume était ébranlée, de frapper une nouvelle monnaie, les anciennes étant caduques, ce qui fut fait sans tarder. La bonne nouvelle se répandit comme une traînée de poudre dans le royaume et les gens d'Aipotu qui avaient beaucoup d'espions en Utopia décidèrent d'adopter la même attitude. On organisa une grande fête pour célébrer l'événement et jamais encore en Utopia on n'avait vu une aussi grande fête.

Il ne nous a pas été possible de donner une forme cohérente au reste du parchemin. Nous ne pouvons donc pas savoir ce qu'il est advenu des Comptables et des Prêtres Mathématiciens, ni même de la suite des relations avec Aipotu.

On ne peut rien dire non plus de la nature de l'espace-temps dans lequel baignait Utopia, tout au plus peut-on émettre l'hypothèse que ce que certains appellent un infundibulum chrono synclastique, voire une structure encore plus mystérieuse, loin d'être une chimère, est une réalité de notre univers.

Le parchemin lui même ne semble avoir été écrit ni par un Comptable, on en dresse un tableau trop noir, ni par un dignitaire, ni par un Prêtre Mathématicien certaines répétitions et quelques maladresses indiquant le contraire. Le principal argument en faveur de cette dernière hypothèse est l'insistance avec laquelle on parle de l'irrégularité de la feuille de calcul de l'Année de la Grande Confusion, alors que tout mathématicien sait que la mésaventure en question n'a rien à voir avec une quelconque irrégularité. La description de Prêtres Mathématiciens répugnant à révéler leurs secrets est un autre argument en faveur de cette thèse. Il nous semble que l'auteur du parchemin n'exprime ici qu'une opinion sans fondements, mais couramment répandue en Utopia, d'ailleurs contredite par l'attitude du Prêtre Mathématicien mendiant. L'auteur du parchemin semble toutefois vouer une grande admiration aux Prêtres Mathématiciens.

Enfin, nous avons essayé de garder l'atmosphère, empreinte parfois de tendresse, parfois de grande naïveté, qui se dégage à la lecture du parchemin et nous espérons y être parvenus.

APPENDICE

Cette histoire m'a été suggérée lors d'une tentative pédagogique de démonstration de la formule d'inversion des signes de sommation dans les séries doubles, qui s'énonce:

Soient $a_{n,m} \in \mathbf{R}^r$ pour $n, m \geq 0$. Si

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \|a_{n,m}\| < +\infty$$

alors on peut intervertir les sommations:

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m},$$

les différentes séries intervenant dans cette égalité étant absolument convergentes.

Si (1) n'est pas vérifié, l'égalité (2) n'est plus vérifiée en général. Donnons le contre-exemple classique. Posons, pour $n \geq 1, m \geq 1$:

$$a_{n,m} = \frac{1}{n^2 - m^2} \quad \text{si } n \neq m \quad \text{et} \quad a_{n,n} = 0.$$

On a donc :

- $a_{m,n} = -a_{n,m}$;
- $a_{n,m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} \right)$ si $n \neq m$.

Posons:

$$b_{n,m} = \frac{1}{n+m} \quad \text{et} \quad c_{n,m} = \frac{1}{n-m} \quad \text{si } n \neq m \quad \text{et} \quad b_{n,n} = c_{n,n} = 0.$$

On a:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m+p} b_{n,m} &= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n+m} + \sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{1}{n+m} \\ &= \sum_{k=m+1}^{2m-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2m+1}^{2m+p} \frac{1}{k} = \sum_{k=m+1}^{2m+p} \frac{1}{k} - \frac{1}{2m}, \\ \sum_{n=1}^{m+p} c_{n,m} &= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n-m} + \sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{1}{n-m} = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

On a donc aussi :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m+p} (b_{n,m} - c_{n,m}) &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^{2m+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} - \frac{1}{2m} \\ &= \sum_{k=1}^{2m+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} - \frac{3}{2m} = \sum_{k=p+1}^{2m+p} \frac{1}{k} - \frac{3}{2m}. \end{aligned}$$

Il en résulte $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} = \frac{3}{4m^2}$ et par suite aussi :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3}{4m^2} = -\frac{3}{4}\zeta(2) = -\frac{1}{8}\pi^2.$$

Les deux sommes sont différentes de zéros et opposées!

Donnons maintenant des indications pour la démonstration de la formule d'inversion des signes de sommation :

- 1) Si $a_n \in \overline{\mathbf{R}}_+$ pour $n \geq 0$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup_{p \geq 0} \sum_{n=0}^p a_n$.
- 2) Si $a_{n,m} \in \overline{\mathbf{R}}_+$ pour $n, m \geq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} &= \sup_{p \geq 0} \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \sup_{p \geq 0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^p a_{n,m} \\ &= \sup_{p \geq 0} \sup_{q \geq 0} \sum_{m=0}^q \sum_{n=0}^p a_{n,m} ; \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} &= \sup_{q \geq 0} \sum_{m=0}^q \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sup_{q \geq 0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^q a_{n,m} \\ &= \sup_{q \geq 0} \sup_{p \geq 0} \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^q a_{n,m}. \end{aligned}$$

L'égalité (2) résulte alors de:

$$\sup_{p \geq 0} \sup_{q \geq 0} \sum_{m=0}^q \sum_{n=0}^p a_{n,m} = \sup_{p \geq 0} \sup_{q \geq 0} \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^q a_{n,m} = \sup_{q \geq 0} \sup_{p \geq 0} \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^q a_{n,m}.$$

La convergence des séries dans $\mathbf{R}$ signifiant que $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} < +\infty$.

E. KERN

3) Si $a_{n,m} \in \mathbf{R}$ pour $n, m \geq 0$ et si $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| < +\infty$, on pose :

$$b_{n,m} = \sup(0, a_{n,m}) \geq 0 \quad \text{et} \quad c_{n,m} = \sup(0, -a_{n,m}) \geq 0,$$

de sorte que

$$|a_{n,m}| = b_{n,m} + c_{n,m} \quad \text{et} \quad a_{n,m} = b_{n,m} - c_{n,m}.$$

Et par suite:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (b_{n,m} - c_{n,m}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{n,m} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,m} - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (b_{n,m} - c_{n,m}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}. \end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat lorsque $a_{n,m} \in \mathbf{R}$. Le passage à $\mathbf{R}^r$ est clair.