A VOS STYLOS

PROBLÈME 44

Énoncé (proposé par Paul Erdös) :

Le grand mathématicien hongrois Paul Erdös, qui vient de disparaître, fut l'inventeur de très nombreux problèmes. En hommage à sa mémoire, voici un problème d'Erdös que nous soumettons à nos lecteurs.

Etant donnés deux entiers naturels m et n tels que $m < n$, on considère une partition de l'intervalle d'entiers $[m, n[= \{m, m+1, m+2, \dots n-1\}$ en deux sous-ensembles A_1 et A_2 disjoints : $[m, n[= A_1 \cup A_2$. On dira que c'est une *partition d'Erdös* si l'entier n peut, d'au moins une manière, s'écrire comme somme d'éléments distincts de l'un des A_i.
Exemple.— $m = 1$, $n = 8$, $[1, 8[= \{1, 2, 4, 5\} \cup \{3, 6, 7\}$ est une partition d'Erdös de $[1, 8[$ car $8 = 1 + 2 + 5$.
Le couple (m, n) est un *couple d'Erdös* si toute partition de $[m, n[$ en deux sous-ensembles est une partition d'Erdös. L'objectif du problème est d'identifier les couples (m, n) qui sont des couples d'Erdös.

1°) Montrer que $(1, 11)$ n'est pas un couple d'Erdös.
Montrer que $(1, 12)$ et $(2, 15)$ sont des couples d'Erdös.

2°) Trouver d'autres couples d'Erdös, et les déterminer tous si possible.

Indications (par M.-P. Muller) :

La démarche.— On recherche une partition $[m, n[= A_1 \cup A_2$ qui ne soit pas d'Erdös : si une partie contient des éléments de somme n, la partition sera mise hors jeu.
Les premiers pas.— Le plus simple est d'éliminer d'abord les partitions pour lesquelles un A_i contient *deux* éléments de somme n. Nous pouvons "voir" ces partitions en disposant les nombres $m, \dots, n-1$ dans un tableau de manière à mettre en vis-à-vis deux nombres de somme n :
si $n = 2p + 1$:

		m	$m+1$	$\dots$	k	$\dots$	$p-1$	p
$n-1$	$\dots$	$n-m$	$n-m-1$	$\dots$	$n-k$	$\dots$	$p+2$	$p+1$

si $n = 2p + 2$:

		m	$m+1$	$\dots$	k	$\dots$	$p-1$	p	$p+1$
$n-1$	$\dots$	$n-m$	$n-m-1$	$\dots$	$n-k$	$\dots$	$p+3$	$p+2$	

(certaines cases peuvent être vides). Ainsi, les partitions que nous éliminons d'abord sont celles pour lesquelles une colonne complète est dans un A_i. Dorénavant, deux éléments d'une même colonne ne seront jamais dans une même partie. Notons aussi que les éléments des colonnes incomplètes à gauche n'interviennent jamais dans une somme= n : leur appartenance est donc indifférente. En somme, il reste autant de cas à examiner que de partitions de la première ligne seule!

Pour continuer. La disposition adoptée pour les nombres $[m, n[$ permet aussi de "situer" trois éléments, ou plus, dont la somme est n. Deux remarques simples peuvent être faites dans ce cas.

1. Au plus un seul de ces éléments est sur la deuxième ligne,et il est alors plus à droite que les autres:

$* * *$
$\quad *$

2. Lorsque la partition n'est pas d'Erdös, si deux nombres u et v sont dans A_i et si $u + v$ est dans une colonne complète et distincte de celles de u et v, alors $u + v$ est aussi dans A_i. En effet, dans le cas contraire, nous aurions son vis-à-vis $n - u - v$ dans A_i, et u, v, $n - u - v$ de somme n dans A_i. Une application simple lorsque $m = 1$: si 1 et u sont dans A_1 avec $u < p$, alors $u + 1$ et, par induction, $u + 2, u + 3, ..., p$ sont tous dans A_1.

A partir de ces considérations, montrer que :
- le couple (1,n) est d'Erdös si et seulement si $n \geq 12$
- pour n impair, $(2, n)$ est d'Erdös si et seulement si $n \geq 15$
- mais $(2, 16)$ n'est pas d'Erdös
- si (m, n) est d'Erdös, alors (km, kn) aussi
- et donc $(2, n)$ est d'Erdös si $n \geq 23$
- si m est la partie entière de $(n + 1)/4$, alors (m, n) n'est pas d'Erdös.

PROBLÈME 46

Énoncé (proposé par R. Schäfke) :

Soit la matrice carrée $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $a_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$ (coefficient binomial).
Montrer que M est définie positive, de déterminant égal à 1, et que si λ est valeur propre de M alors $1/\lambda$ est également valeur propre de M.

Indication (par P. Renfer) :

On introduit la matrice triangulaire $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $t_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$ (où l'on convient que le coefficient binomial $\binom{i-1}{j-1}$ est nul si $i < j$), on montre que M est le produit de T par sa transposée : $M = T.{}^tT$, puis on calcule T^{-1} (qui a, aux signes près, les mêmes coefficients que T), et enfin on montre que M et M^{-1} ont même polynôme caractéristique.

PROBLÈME 47

Énoncé (proposé par M. Krier) :

On considère un polygone plan P à n côtés, de sommets consécutifs $A_0, A_1, \cdots A_n$, avec $A_n = A_0$. Sur chaque segment A_iA_{i+1} on construit un carré $A_iA_{i+1}B_iC_i$, toujours du même côté pour un observateur qui se déplacerait sur le polygone.
L'objectif du problème est de déterminer P de telle sorte que les $2n$ points B_i et C_i soient sur un même cercle.
1°) Rechercher les polygones P convexes. Il y a la solution évidente où l'on prend pour P un polygone régulier. Est-ce la seule solution?
2°) Indiquer comment on peut obtenir les polygones non convexes ayant la propriété demandée.

Solution (par P. Renfer) :

Si les points B_i et C_i sont sur un même cercle de centre O, alors les points A_i sont tous sur un autre cercle de même centre O, car la médiatrice de $[B_iC_i]$ coïncide avec celle de $[A_iA_{i+1}]$. Soit α_i le demi-angle au centre, interceptant la corde $[A_iA_{i+1}]$

1) Cas des polygones convexes

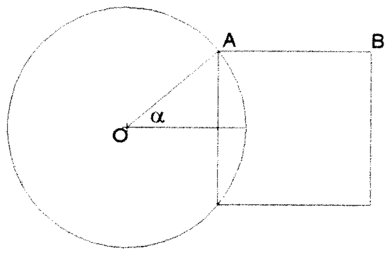
Si le polygone P est convexe, alors: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi$, avec $0 < \alpha_i \leq \pi$ pour $1 \leq i \leq n$.
La solution évidente du polygone régulier correspond à : $\alpha_i = \frac{\pi}{n}$, pour tout i. Pour obtenir d'autres solutions, il s'agit d'étudier s'il est possible d'avoir $\alpha_i \neq \alpha_j$ avec $OB_i = OB_j$.

Distinguons suivant que les carrés sont à droite ou à gauche d'un observateur se déplaçant sur le polygone, dans le sens trigonométrique :

a) carrés à droite

Pour $\alpha \in]0, \pi[$, posons :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = OB^2 &= (\cos\alpha + 2\sin\alpha)^2 + \sin^2\alpha \\ &= 3 + 2(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha) \\ &= 3 + 2\sqrt{2}\sin\big(2\alpha - \frac{\pi}{4}\big) \end{aligned}$$



α	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$f'(\alpha)$		$+$		0		$-$			
$f(\alpha)$	1	3	5	$3+2\sqrt{2}$	5	3	1	$3-2\sqrt{2}$	1

Donc pour deux angles distincts α et β, de somme inférieure à π, on a :

$$f(\alpha) = f(\beta), \quad \text{si} \quad \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}.$$

On peut obtenir un polygone solution, en choisissant l'un des α_i égal à β et tous les autres égaux à α, avec

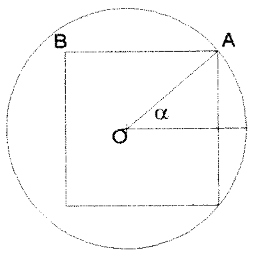
$$0 < \alpha \leq \frac{3\pi}{8} \quad , \quad \frac{3\pi}{8} \leq \beta < \frac{3\pi}{4}, \quad \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}, \quad (n-1)\alpha + \beta = \pi$$

On trouve : $\alpha = \dfrac{\pi}{4(n-2)}$ et $\beta = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4(n-2)}$

b) carrés à gauche

Pour $\alpha \in]0, \pi[$, posons :

$$\begin{aligned} g(\alpha) = OB^2 &= (\cos\alpha - 2\sin\alpha)^2 + \sin^2\alpha \\ &= 3 - 2(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) \\ &= 3 - 2\sqrt{2}\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$



α	0		$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$g'(\alpha)$		$-$	0			$+$				
$g(\alpha)$	1	$\searrow$	$3-2\sqrt{2}$	1	3	5	$3+2\sqrt{2}$	5	3	1

Donc, pour deux angles distincts α et β, de somme inférieure à π, on a :

$$g(\alpha) = g(\beta), \quad \text{si} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

On peut obtenir un polygone solution, en donnant à k angles parmi les α_i la valeur β et aux $(n-k)$ autres la valeur α, distincte de β avec :

$$1 \leq k \leq n-k \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad , \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{4} \quad , \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \quad , \quad (n-k)\alpha + k\beta = \pi$$

On peut obtenir un octogone avec $n = 8$ et $k = 4$.
De façon générale on obtient :

$$\alpha = \frac{4-k}{4(n-2k)}\pi, \quad \text{avec} \quad k \leq 3 \quad \text{et} \quad k \leq n-5 \quad (\text{donc } n \geq 6) \quad \text{pour que} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

2) Cas des polygones non convexes

La contrainte $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi$ s'assouplit en $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m.\pi$, où $m \in \mathbb{N}^*$

a) carrés a droite

On peut obtenir un polygone solution, en donnant à k angles parmi les α_i la valeur β et aux $(n-k)$ autres la valeur α, distincte de β avec :

$$1 \leq k \leq n-k \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{7\pi}{4}$$

Si n est multiple de 8, on peut choisir $k = n/2$.
Si $k \neq n/2$, les angles α et β doivent être choisis commensurables à π.
b) carrés à gauche

On peut obtenir un polygone solution, en donnant à k angles parmi les α_i la valeur β et aux $(n-k)$ autres la valeur α, distincte de β avec :

$$1 < k < n-k \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{4}$$

Si n est multiple de 8, on peut choisir $k = n/2$.
Si $k \neq n/2$, les angles α et β doivent être choisis commensurables à π.

PROBLÈME 48

Énoncé (proposé par R. Garin) :

Pour quel(s) entier(s) naturel(s) n la somme

$$\sum_{k=0}^{n} k^2(n-k)^2$$

est-elle un carré parfait ?

PROBLÈME 49

Énoncé (proposé par R. Kern) :

Dans un triangle ABC, on note a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB, et α, β, γ les mesures respectives des angles en A, B et C.
1) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos\alpha = \cos 2\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 2\beta$.
2) Trouver les triangles pour lesquels a, b, c sont des entiers premiers entre eux et $\cos\alpha = \cos 3\beta$. Parmi ces triangles, déterminer lesquels vérifient $\alpha = 3\beta$.

PROBLÈME 50

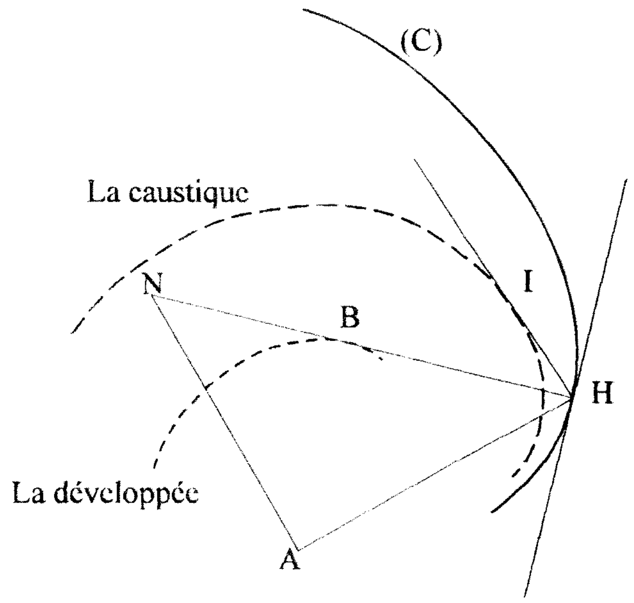
Énoncé (proposé par A. Stoll, IREM de Strasbourg) :

<u>Données</u> :

- Une courbe plane (C) "suffisamment régulière"
- un point A dans le plan de la courbe (C)

<u>Notations</u> : (cf. figure)

- H un point de la courbe (C)
- B désigne le centre de courbure correspondant à H
- N le point de la normale à (C) en H tel que (AN) soit perpendiculaire à (AH)
- I est le point de la caustique issue de A



les angles $\widehat{AHB}$ et $\widehat{BHI}$ sont égaux

<u>Montrer que</u> :

$$\boxed{\frac{|2HN - HB|}{HB} = \frac{HA}{HI}}$$

<u>Applications</u> :

1. En déduire une construction géométrique du centre de courbure d'une parabole en un point quelconque.
2. Montrer que la caustique d'une spirale logarithmique par rapport à son centre est une spirale logarithmique identique.
3. Trouver d'autres applications de la formule ci-dessus.

PROBLÈME 51

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

1°) Démontrer l'identité

$$tg\, x = \frac{x - \frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5}\frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{1.3}{1.2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

2°) Généraliser l'identité précédente au quotient

$$\frac{x - \frac{a(a+2)(a+4)}{a(a+1)(a+2)}\frac{x^3}{3!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}\frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{a(a+2)}{a(a+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+2)(a+4)(a+6)}{a(a+1)(a+2)(a+3)}\frac{x^4}{4!} - \cdots}$$