NOMBRES DE FIBONACCI ET PERMUTATIONS

Dominique DUMONT(*)

On appelle permutation sur les trois lettres a, b, c tout "mot" formé de ces trois lettres exactement. Enumérons les permutations sur trois lettres : *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*. Nous en dénombrons 6. Sur deux lettres il n'y en a que 2 : *ab* et *ba*. Combien sur quatre lettres a, b, c, d? Un mot de quatre lettres tel que *cadb* s'obtient en insérant la lettre d dans le mot *cab*, ce qui peut se faire à 4 places différentes et donne *dcab*, *cdab*, *cadb* et *cabd*. Ainsi chaque mot de trois lettres donne naissance à 4 mots de quatre lettres, ce qui donne en tout $6.4 = 24$ permutations sur quatre lettres, et puisque $6 = 1.2.3$, on a $24 = 1.2.3.4$. Chacune des 24 donne à son tour naissance à 5 permutations sur 5 lettres, d'ou $1.2.3.4.5 = 120$ permutations sur 5 lettres, et d'une manière genérale le nombre de permutations sur n lettres est égal à $1.2.3...n$, entier qu'on note $n!$ et qu'on appelle "factorielle n".

Supposons à présent qu'on restreigne ce dénombrement aux permutations satisfaisant la condition suivante : chaque lettre doit se trouver soit à la place qu'elle occupe dans le mot initial *abcd*, soit à une place voisine, immédiatement à gauche ou à droite de cette place initiale. Ainsi nous prenons en compte une permutation telle que *acbd*, mais pas *cabd*... car c se trouve ici trop loin de sa troisième place initiale. Combien a-t-on de permutations de ce type, que nous appellerons des F-permutations?
- sur deux lettres, *ab* et *ba* conviennent toutes deux
- sur trois lettres, *abc*, *bac*, *acb*, soit 3 F-permutations
- sur quatre lettres, *abcd*, *bacd*, *acbd*, *abdc*, *badc*, 5 F-permutations.

Si nous notons F_n le nombre de F-permutations sur n lettres, nous avons donc $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$. Nous remarquons que $F_4 = F_3 + F_2$ et nous allons voir que nous aurons de même $F_5 = F_4 + F_3 = 8$. En effet considérons une F-permutation sur les 5 lettres a, b, c, d, e. La lettre se trouve soit en cinquième place soit en quatrième. Si elle se trouve en cinquième place c'est qu'on l'a simplement accolée au bout d'une de nos $F_4 = 5$ permutations sur quatre lettres : *abcde*, *bacde*, *acbde*, *abdce*, *badce*. Si e se trouve en quatrième place, la seule lettre qui puisse se trouver en cinquième place est d, et on a simplement concaténé (mot technique pour dire "accoler") le mot *ed* à l'une des $F_3 = 3$ permutations sur 3 lettres : *abced*, *baced*, *acbed*. Comme il n'y a pas d'autre possibilité nous avons bien démontré la relation $F_5 = F_4 + F_3$, et notre preuve s'étend évidemment au cas de n lettres, ce qui nous

(*) paru dans Encyclopédie philosophique Article "Combinatoire" PUF conduit à la relation de récurrence (R) :

$$(R) \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = 1, F_2 = 2$$

Les nombres F_n, s'appellentles nombres de Fibonacci.
Les F-permutations nous conduisent à d'autres identités sur les F_n par exemple à la relalion (P) – P comme Pythagore - que voici :

$$(P) \quad F_{2n} = F_n^2 + F_{n-1}^2 \quad \text{pour tout } n$$

Examinons par exemple le cas $n = 4$, considérons les F-permutations sur 8 lettres, permutations du mot $abcdefgh$. Pour en fabriquer une, nous pouvons nous contenter de concaténer une F-permutation sur $abcd$ et une F-permutation sur $efgh$. Nous avons $F_4 = 5$ choix pour la première et dans chaque cas autant pour la seconde, ce qui fait en tout $F_4^2 = 25$ F-permutations sur 8 lettres, qui se caractérisent par le fait que les deux goupes de lettres a, b, c, d et e, f, g, h ne sont pas interpénétrés, la quatrième place étant occupée par d ou par c. Il reste le cas où cette quatrième place est occupée par e, et où d occupe alors la cinquième place. Une telle F-permutation sur 8 lettres se fabrique en concaténant une F-permutation de abc, suivie du mot ef, puis d'une F-permutation de fgh. Il y en a donc $F_3^2 = 9$ de ce type. Au total

$$F_8 = F_4^2 + F_3^2 = 25 + 9 = 34$$

Notre démonstration s'étend évidemment au cas de n quelconque. Elle s'étend aussi au cas où l'on concatène des permutations de longueurs inégales, ce qui conduit à d'autres identités analogues, et encore aux cas où l'on concatène plus de deux permutations, ce qui donne lieu à d'autres identités encore. On voit ici que l'interprétation combinatoire d'une suite de nombres entiers permet de trouver des identités sur ces nombres.
Or il existe une toute autre méthode pour trouver des identités, une méthode bien plus classique qui est tout simplement celle du calcul. Considérons par exemple la relation (B) – B comme Bézout - que voici :

$$(B) \quad F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^n \quad \text{pour tout } n$$

Pour démontrer cette identité, il suffit de procéder par récurrence, en vérifiant d'abord qu'elle est vraie pour $n = 2$, et en montrant que si elle est vraie pour $n - 1$ elle est vraie pour n. Si elle est vraie pour $n - 1$ on a :

$$\begin{aligned}
&F_{n-1}^2 = F_n F_{n-2} + (-1)^{n-1} \\
&F_{n-1}^2 + F_n F_{n-1} = F_n F_{n-2} + F_n F_{n-1} + (-1)^{n-1} \\
&(F_{n-1} + F_n)F_{n-1} = F_n(F_{n-2} + F_{n-1}) + (-1)^{n-1} \\
&F_{n+1}F_{n-1} = F_n F_n + (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

elle est donc vraie pour n.

Notons en passant que ce que nous venons de faire consiste à vérifier l'identité, bien plus qu'à la trouver, tandis que la méthode combinatoire de concaténation nous avait véritablement conduits à la relation (P). Nous n'irons pas jusqu'à prétendre que c'est là un phénomène général, et qu'il faut en conséquence préférer la méthode combinatoire. Car on "trouve" aussi des identités par des calculs judicieux.

Il n'en reste pas moins que les deux approches, calculatoire et combinatoire, sont en situation de concurrence, et qu'on est constamment conduit à comparer leurs résultats. Ce faisant, on observe, et c'est paradoxal, que les identités qu'on obtient de façon directe, "naturelle" dans chaque cas, ne sont en général pas les mêmes selon qu'on a utilisé la méthode combinatoire ou la méthode calculatoire. Ainsi, nous pouvons certes obtenir la relation (P) par le calcul et sans combinatoire, mais cela ne se fera pas sans quelque détour et le passage par d'autres identités, alors que la Combinatoire nous l'a fournie directement. A l'inverse, l'identité (B) n'est plus du tout lumineuse lorsqu'on essaie de l'interpréter combinatoirement. Dans un tel cas on est tenté de rechercher une bijection avec une nouvelle classe d'objets permettant de dégager une signification combinatoire de l'identité (B).

Dans l'étude de beaucoup d'objets combinatoires on est amené à faire intervenir des paramètres supplémentaires. Dans le cas des F-permutations on peut ajouter au paramètre n "nombre des lettres" "le paramètre k-nombre de lettres à leur places". Par exemple sur *abcde* on a $k = 3$ car trois lettres, a, b, et e sont à leur place initiale. En raffinant le dénombrement de cette manière on obtient le tableau suivant :

k	$=$		0	1	2	3	4	5	6	7
F_0	$=$	1								
F_1	$=$	1 $=$	0	+ 1						
F_2	$=$	2 $=$	1	+ 0	+ 1					
F_3	$=$	3 $=$	0	+ 2	+ 0	+ 1				
F_4	$=$	5 $=$	1	+ 0	+ 3	+ 0	+ 1			
F_5	$=$	8 $=$	0	+ 3	+ 0	+ 4	+ 0	+ 1		
F_6	$=$	13 $=$	1	+ 0	+ 6	+ 0	+ 5	+ 0	+ 1	
F_7	$=$	21 $=$	0	+ 4	+ 0	+ 10	+ 0	+ 6	+ 0	+ 1

Si nous désignons par F_n^k le coefficient situé sur la n-ième ligne et la k-ième colonne, le nombre de F-permutations ayant n lettres parmi lesquelles k sont à leur place, nous observons la récurrence :

$$(R') \quad F_n^k = F_{n-1}^{k-1} + F_{n-2}^k$$

dont la démonstration est rigoureusement identique à celle de la récurrence (R) ci-dessus. Mais la relation (R') nous permet de comprendre pourquoi notre tableau n'est autre que le célèbre triangle de Pascal réécrit "de travers". On trouve ici le "coefficient binomial" $\binom{n}{k}$, qu'on notait autrefois C_n^k en F_{2n-k}^k.

Extrait du Liber Abbaci de Leonardo Pisano dit Fibonacci (Edition de Baldassarre Boncompagni (Rome 1857)) présentant le célèbre texte sur la multiplication des lapins.

parium	1
primus	2
Secundus	3
tercius	5
Quartus	8
Quintus	13
Sestus	21
Septimus	34
Octauus	55
Nonus	89
Decimus	144
Undecimus	233
Duodecimus	377

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Qvidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense | geminat; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense; ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria 8; ex quibus paria 5 geminant alia paria 5: quibus additis cum parijs 8, faciunt paria 13 in quinto mense; ex quibus paria 5, que geminata fuerunt in ipso mense, non concipiunt in ipso mense, sed alia 8 paria pregnantur; et sic sunt in sexto mense paria 21; cum quibus additis parijs 13, que geminantur in septimo, erunt in ipso paria 34; cum quibus additis parijs 21, que geminantur in octauo mense, erunt in ipso paria 55; cum quibus additis parjis 34, que geminantur in nono mense, erunt in ipso paria 89; cum quibus additis rursum parijs 55, que geminantur in decimo, erunt in ipso paria 144; cum quibus additis rursum parijs 89, que geminantur in undecimo mense, erunt in ipso paria 233. Cum quibus etiam additis parijs 144, que geminantur in ultimo mense, erunt paria 377; et tot paria peperit suprascriptum par in prefato loco in capite unius anni. Potes enim uidere in hac margine, qualiter hoc operati fuimus, scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, uidelicet 1 cum 2; et secundum cum tercio; et tercium cum quarto; et quartum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cum undecimo, uidelicet 144 cum 233; et habuimus suprascriptorum cuniculorum summam, uidelicet 377; et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus.