# SUITE DE FIBONACCI : LE ZERO ET L'INFINI.

par Gérard Kuntz (Irem de Strasbourg)

## Introduction.

Les élèves qui travaillent en environnement informatique ont tous rencontré des suites ou des fonctions au comportement étrange : leur limite, calculée par voie théorique, n'est pas celle que suggère la calculatrice[1]. Un exemple classique est donné par la suite[2] définie par $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Sa limite théorique (quand n tend vers l'infini) est e. Sur une calculatrice, les valeurs approchées frôlent e pour basculer brusquement à un. Le phénomène a été suffisamment expliqué : il est inutile d'y revenir. Il peut être intéressant, en revanche, de proposer une situation qui permette de comprendre *en profondeur* la nature des divergences entre les démarches théorique et informatique. La suite de Fibonacci en est un exemple particulièrement remarquable.

## Le contexte de l'activité.

Le problème qui suit[3] a été traité par les élèves d'une terminale S du lycée Couffignal à Strasbourg, dans le cadre d'activités mathématiques en environnement informatique. Ils ont travaillé en binômes, avec de fréquents allers et retours entre l'expérimentation avec Derive et le raisonnement théorique, comme le texte les y invite. L'enseignant (et son stagiaire) sont intervenus à la demande des élèves : ils ont bien pris soin de ne pas se substituer à eux pour résoudre les questions qui leur étaient soumises, se bornant à reformuler les interrogations, à suggérer des parallèles avec d'autres situations, à renvoyer à certaines parties du cours. L'ensemble du travail a pris, de ce fait, huit heures (quatre séances de deux heures, y compris le compte-rendu d'activité).

1 Eléments de réflexion sur l'utilisation numériques des calculatrices programmables en Première S et en Terminale C et E. Aline Robert. Repères-Irem n° 11.

2 L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a. Gérard Kuntz. Repères Irem n° 11, page 25.

3 Une première forme du problème est due à Nicole Vogel (voir l'article cité en note 2, pages 20 à 22). Mon collègue du lycée Couffignal, Philippe Michel, a rédigé (et testé avec des élèves) les questions 1 à 4. J'y ai ajouté les questions 5 et 6, pour préciser les phénomènes observés.

## Texte détaillé de l'activité.

On appelle suite de Fibonacci, toute suite réelle **u** définie par ses deux premiers termes $u_0$ et $u_1$ et par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

**1.** On considère la suite de Fibonacci telle que $u_0$=0 et $u_1$=1.

Déterminer ses 10 premiers termes.

Etablir à l'aide de la fonction *itère* un programme permettant de calculer $u_n$. (on pourra considérer la suite de vecteurs $V_n$ de coordonnées $(u_n, u_{n-1})$ ). Calculer $u_{100}$.

**2. a)** Montrer que s'il existe une suite géométrique non nulle qui soit de Fibonacci, alors sa raison q est solution de l'équation : $x^2 = x + 1$.

On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

**b)** a et b étant deux réels fixés, montrer que la suite **v** de terme général $v_n = a\alpha^n + b\beta^n$ est une suite de Fibonacci dont on déterminera les deux premiers termes.

**c)** Réciproquement, soit **u** une suite de Fibonacci. Montrer que son terme général peut s'écrire : $u_n = a\alpha^n + b\beta^n$. Exprimer a et b en fonction de $u_0$ et $u_1$.

**d)** Déterminer $u_n$ en fonction de n, dans le cas où $u_0$=0 et $u_1$=1.

**e)** Montrer que les seules suites de Fibonacci convergentes sont celles dont le terme général peut s'écrire : $u_n = b\beta^n$. Déterminer leur limite.

**3.** Déterminer une valeur approchée à $10^{-6}$ près des termes de rang 10, 20, 30, 40 et 100 de la suite de Fibonacci **u** définie par $u_0$=1 et $u_1 = \beta$.

Faire de même pour la suite **v** définie par $v_n = \beta^n$. Que constatez-vous?

**4.** Soit $\varepsilon$ un réel non nul de valeur absolue inférieure à $10^{-6}$.

x est la suite de Fibonacci définie par $x_0 = 1$ et $x_1 = \beta + \varepsilon$.

y est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\beta + \varepsilon$.

**a)** Déterminer a et b tels que $x_n = a\alpha^n + b\beta^n$.

**b)** En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

**c)** Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

**d)** Expliquer alors le phénomène constaté au **3.**

**5.** Refaire l'étude de la question 4. en changeant la valeur de $\varepsilon$ (on prendra pour $\varepsilon$ les valeurs $10^{-10}$, $10^{-50}$ et $10^{-100}$).

**6.** Calculer *la valeur exacte de* $u_{100}$. Calculer une valeur approchée de cette valeur exacte en faisant varier la précision. Expliquer le phénomène observé.

## Des préalables d'une grande complexité.

La principale difficulté sur laquelle ont longuement buté les élèves est liée à *la définition de la suite de Fibonacci comme suite récurrente*. Elle est aggravée par la nécessité d'en connaître *deux termes consécutifs* pour calculer le suivant. Cette situation, présentée en cours dans le chapitre sur la récurrence, n'avait pas laissé grand souvenir... Une très longue errance a précédé la résolution de la question **2.c.** La plupart des élèves n'ont pas su traduire la phrase « u est une suite de Fibonacci », puis ont confondu allègrement l'hypothèse (qui leur posait un problème) et la conclusion (il est plus facile de raisonner quand on dispose d'une expression formelle de la suite). L'idée de la récurrence a émergé tardivement. Il a fallu ensuite beaucoup de temps pour que l'hypothèse de récurrence soit correctement formulée (avec deux propositions liées par la conjonction de coordination « et »). Vérifier l'hypothèse de récurrence pour les valeurs initiales n'est pas allé de soi : son expression conduit à un système dans lequel sont mêlés a, b, $u_0$ et $u_1$, nombres au statut flou. Quelles sont les données? Où sont les inconnues? Le fait qu'une hypothèse de récurrence ne soit vraie, pour les premières valeurs de n, que sous certaines conditions (qui garantissent l'unicité de la solution) a produit une perplexité certaine.
Il faut reconnaître que *les difficultés passées en revue sont considérables* : le fait qu'elles semblent avoir été finalement dépassées (si on en croit les comptes-rendus) est très encourageant. Il a été possible alors de passer aux questions 3 et 4, qui mettent en évidence des résultats étonnants que nous allons maintenant décrire et expliquer.

## Des divergences troublantes.

Dans la partie **2.c**, le résultat suivant a été démontré : *la suite de Fibonacci de premiers termes $u_0$ et $u_1$ est égale à la suite de terme général $u_n = a\alpha^n + b\beta^n$*, avec $a = \dfrac{u_0\beta - u_1}{\beta - \alpha}$, $b = \dfrac{u_1 - u_0\alpha}{\beta - \alpha}$, $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. (Derive calcule a et b sans difficulté).

En particulier, pour $u_0=1$ et $u_1=\beta$, on obtient la suite de Fibonacci définie par $v_n = \beta^n$. On dispose alors de *deux définitions de la même suite*, l'une récurrente, l'autre géométrique de raison β. On pourrait s'attendre à deux séries de valeurs approchées voisines à partir de ces deux points de départ. Il n'en est rien.

Voici les valeurs obtenues avec Derive :

| **n** | $u_n$ | $v_n$ |
|---|---|---|
| 10 | 0.008134 | 0.008130 |
| 20 | 0.000519 | 0.000066 |
| 30 | 0.055728 | 0.000001 |
| 40 | 6.85410 | $4.3.\ 10^{-9}$ |
| 100 | $2.372.\ 10^{13}$ | $1.21.10^{-21}$ |

Le comportement de $v_n$ est attendu : cette suite géométrique de raison voisine de -0.6 tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En revanche, $u_n$ n'a vraiment pas l'air d'être égale à $v_n$ : elle semble évoluer vers l'infini avec n, en contradiction totale avec la théorie!

**Une explication de nature théorique.**

La question **4.** fournit la clé d'interprétation d'un phénomène dont les élèves avaient rencontré d'autres manifestations au cours d'activités antérieures. Mais il a été nécessaire, pour qu'ils puissent s'en saisir, de préciser une propriété dont la démonstration dépasse le programme actuel de Terminale *: aucun rationnel, à fortiori aucun décimal, n'est égal à* $\sqrt{5}$.
De ce fait, le nombre ε introduit par l'énoncé a pu prendre sens (cela ne s'est pas fait sans difficultés) : en mode approché, Derive ne connaît pas $\sqrt{5}$. Il utilise *une valeur approchée décimale* de β que l'énoncé note β+ε. ε ne saurait être nul (sinon β serait décimal). Il est en valeur absolue inférieur ou égal à $10^{-6}$ (précision imposée).
Ainsi, à l'insu de l'utilisateur novice, *Derive remplace les suites u et v par deux nouvelles suites : la première, x, est de Fibonacci. Ses deux premiers termes sont 1 et $\beta+\varepsilon$. La seconde, y, est géométrique de raison $\beta+\varepsilon$, toujours voisine de -0.6.*
Pour la suite géométrique, rien de bouleversant. Sa limite est toujours nulle quand n tend vers l'infini. En revanche, le calcul de a et b pour la suite x donne :

$x_n = \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}\alpha^n + (1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}})\beta^n$. A partir de là, les choses s'éclairent. x est somme de deux suites géométriques de raison α et β. La première tend vers l'infini (sa raison est supérieure à un et ε est différent de zéro), la seconde a comme limite zéro. Donc : $\lim_{n \to \infty} x_n = \pm\infty$ (ε pourrait être négatif).

*Enfin, ce résultat paraît indépendant de la précision : il repose sur le fait que ε est différent de zéro.* Il restait à vérifier cette affirmation : une nouvelle surprise attendait les élèves.

## Et si on augmentait la précision?

Voici le tableau de *valeurs (ordre de grandeur de $x_n$ et $y_n$ selon la précision demandée)* proposé dans un des comptes-rendus

| ε | n | $x_n$ | $y_n$ |
|---|---|---|---|
| $10^{-6}$ | 100 | $3.5\ 10^{14}$ | $1.2\ 10^{-21}$ |
| $10^{-6}$ | 150 | $9.9\ 10^{24}$ | $4.4\ 10^{-32}$ |
| $10^{-6}$ | 200 | $2.8\ 10^{35}$ | $1.5\ 10^{-42}$ |
| $10^{-10}$ | 100 | $3.5\ 10^{10}$ | $1.2\ 10^{-21}$ |
| $10^{-10}$ | 150 | $9.9\ 10^{20}$ | $4.4\ 10^{-32}$ |
| $10^{-10}$ | 200 | $2.8\ 10^{31}$ | $1.5\ 10^{-42}$ |
| $10^{-50}$ | 100 | $1.2\ 10^{-21}$ | $1.2\ 10^{-21}$ |
| $10^{-50}$ | 150 | $9.6\ 10^{-20}$ | $4.4\ 10^{-32}$ |
| $10^{-50}$ | 200 | $2.7\ 10^{-9}$ | $1.5\ 10^{42}$ |
| $10^{-100}$ | 100 | $1.2\ 10^{-21}$ | $1.2\ 10^{-21}$ |
| $10^{-100}$ | 150 | $-3.3\ 10^{-21}$ | $4.4\ 10^{-32}$ |
| $10^{-100}$ | 200 | $-9.7\ 10^{11}$ | $1.5\ 10^{-42}$ |

Pour une précision supérieure ou égale à $10^{-50}$, *les profondes différences entre les valeurs approchées de $x_n$ et $y_n$ disparaissent mystérieusement!* Quand n passe de 100 à 150 puis à 200, certaines différences réapparaissent, mais uniquement dans l'ordre de grandeur de ces nombres, *tous deux très voisins de zéro.*

Les énormes différences avec les valeurs calculées pour de faibles précisions ont beaucoup surpris les élèves malgré leur usage intensif de l'outil informatique. Pour comprendre, il leur fallait retourner vers la théorie, et plus particulièrement vers la forme de $x_n$ :

$$x_n = \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}\alpha^n + (1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}})\beta^n.$$

*Pour n fixé*, l'augmentation de la précision se traduit par une diminution du premier terme de $x_n$. Quand la précision passe de $10^{-6}$ à $10^{-50}$, ce terme devient négligeable face à la seconde partie de $x_n$, elle-même voisine de zéro (il est multiplié par $10^{-44}$ !). Le paradoxe de la partie précédente semble s'être évanoui!

En réalité, *il n'est que masqué*. Si l'on prend des valeurs de n plus grandes, le même phénomène se reproduit, *puisque le premier terme de $x_n$ tend vers l'infini*. Le problème réside dans la capacité des ordinateurs à mener ces calculs à terme. Ceux dont disposaient les élèves ne permettaient pas d'aller, en un temps raisonnable, au-delà des valeurs numériques explorées. *Sur des ordinateurs plus puissants, l'exploration aurait conduit aux mêmes constats, avec simplement des valeurs numériques plus extrêmes.*

Il est d'ailleurs possible de préciser le coût à payer pour faire réapparaître le paradoxe du paragraphe précédent, en fonction de la précision exigée. Des élèves se sont demandés comment rendre $x_n$ supérieur à 1000 (il sera *alors très différent* de $y_n$). Ils ont résolu l'inéquation $\alpha^n \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \geq 1000$ : elle est vérifiée pour $n \geq \frac{Ln(\frac{1000\sqrt{5}}{\varepsilon})}{Ln\alpha}$. Ainsi par exemple, pour une précision de $10^{-100}$, le résultat est atteint pour n>317; pour une précision de $10^{-1000}$, il faut calculer ... 4801 termes! (c'est très au-delà des possibilités d'investigation de nos ordinateurs).
Certains élèves ont parlé « d'une sorte de forme indéterminée » pour expliquer le phénomène. Quand la précision augmente, ε prend des valeurs de plus en plus voisines de 0. Il faut alors, pour mettre en évidence les comportements différents des deux suites $x_n$ et $y_n$, prendre des valeurs de n de plus en plus grandes. Cette remarque peu orthodoxe (ε et n n'ont pas le même statut) montre néanmoins qu'ils ont compris quelque chose d'essentiel dans ce travail.

## Conclusion.

*Sur tout ordinateur travaillant en mode approché (aussi puissant soit-il),* $x_n$ et $y_n$ connaissent des destins très différents : la première évolue vers l'infini, la seconde vers zéro. Plus la précision de calcul est grande, plus il faut de termes pour mettre la propriété en évidence. *Le fait que $\sqrt{5}$ ne soit pas décimal est la raison profonde de cette situation.*
*Le calcul exact de $x_{100}$* ne présente aucune difficulté pour Derive. L'idée naturelle est de calculer une valeur approchée de ce nombre pour échapper aux difficultés signalées. Mais cette démarche réserve bien des surprises (en fonction de la précision exigée) : nous laissons au lecteur le plaisir de les découvrir et de les interpréter[4].
Les élèves ont, au travers de cette activité, touché du doigt la grande complexité de l'ensemble des réels. Ils ont compris la nécessité d'en préciser les propriétés. Ils ont constaté, une fois encore, que l'outil informatique ne dispense pas de réfléchir...

[4] $x_{100}$ est la différence de deux termes très grands et très voisins. C'est une situation où l'outil informatique fournit des résultats approchés très sensibles à ... l'approximation choisie. L'interprétation détaillée des résultats numériques obtenus avec Derive n'est pas simple. Etienne Meyer et Gérard Bétrémieux m'y ont aidé. Je tiens leur contribution à la disposition des lecteurs.