L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PAR CORRESPONDANCE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Connaître la personnalité des mathématiciens célèbres n'est pas chose aisée. Leur œuvre publiée a gommé toute trace d'émotion et de sentiment pour présenter les résultats mathématiques dans toute leur rigueur et leur vérité. Vérité souvent très belle sans doute et admirable, "honneur de l'esprit humain", mais abstraite et froide, figée dans son éternité comme un ciel étoilé par une nuit d'hiver glacée. Ce qui en a éloigné plus d'un, curieux de science mais rebuté par son aridité. A tort : les lettres écrites par les mathématiciens à leurs amis ou collègues nous révèlent des personnalités sensibles et passionnées, essayant de résoudre au mieux, non seulement les problèmes scientifiques qu'ils se sont posés, mais aussi les mille et uns tracas de leur vie quotidienne et les difficultés causées par les événements politiques et sociaux. Nous ouvrons ici une nouvelle rubrique qui vous présentera des lettres, ou de larges extraits que nous pensons représentatifs et révélateurs de la personnalité profonde, mais quelquefois méconnue, de nos illustres savants.

Aujourd'hui, une lettre de Gauss à Sophie Germain, datée du 30 avril 1807 (jour de ma naissance, ajoutera Gauss, dans sa signature).

Gauss était marié depuis un an et demi (le 9-10-1805 exactement) à Johanna Osthoff "un merveilleux visage de madone dans lequel se reflète la paix de l'âme et la santé, des yeux tendres un peu exaltés, une taille irréprochable et une intelligence vive..." (*) mais qu'il perdra prématurément le 11-10-1809, après la naissance du troisième enfant, à peine âgée de 29 ans. En cette année 1807, Gauss était très heureux sur le plan personnel, mais cependant en butte à de sérieuses difficultés professionnelles. Napoléon venait de battre les troupes prussiennes du duc de Brunschwig à Iéna et Auerstadt, ce qui anéantissait les ressources que Gauss avait trouvées chez ce protecteur. Mais le 25 juillet 1807 un appel comme professeur d'astronomie et directeur de l'Observatoire à Göttingen devait le libérer d'une situation précaire et sans avenir. La situation de Gauss restait cependant difficile du fait des guerres napoléoniennes et de l'occupation française. Heureusement, sa célébrité de mathématicien lui garantissait des appuis non négligeables parmi les savants parisiens que Napoléon écoutait volontiers, d'autant plus que Gauss était depuis 1804 membre correspondant de l'Académie des Sciences de Paris. Parmi les protecteurs parisiens se trouvait un certain Le Blanc qui avait recommandé Gauss aux autorités d'occupation en écrivant une lettre au général Pernety alors responsable des troupes. En réalité, sous le nom de Le Blanc se cachait une des admiratrices les plus ferventes de Gauss, Sophie Germain (1776-1831), laquelle avait eu recours à ce pseudonyme pour se faire accepter d'abord par la communauté scientifique parisienne, ensuite par Gauss lui-même, ce qui en dit long sur l'esprit du temps à l'égard des femmes. Sophie

(*) Lettre de Gauss à F. Bolyai du 28-6-1804.

Germain était véritablement très douée pour les mathématiques (**) et avait étudié avec enthousiasme d'abord la "Théorie des nombres" de Legendre publiée en 1789, et surtout les "Disquisitiones arithmeticae" de Gauss publiées en 1801 dont elle assimilera rapidement et parfaitement les méthodes nouvelles et difficiles, au point qu'elle réalisera une avancée remarquable dans la démonstration du grand théorème de Fermat, connue sous le nom de théorème de Sophie Germain. Elle écrira une dizaine de lettres à Gauss, entre novembre 1804 et mai 1809. Nous reproduisons ici la réponse de Gauss à la troisième lettre. Elle révèle combien Gauss, souvent présenté comme froid et supérieur, était en réalité extrêmement respectueux et chaleureux dans sa correspondance, et très au-dessus des préjugés de son temps concernant la place des femmes, que ce soit en sciences ou ailleurs. La façon avec laquelle il traite Sophie Germain d'égal à égal en lui faisant des confidences sur ses travaux les plus récents est tout à fait révélatrice à cet égard.

N.B. : La lettre est reproduite telle que Gauss l'a écrite, c'est-à-dire en français, mais avec les quelques fautes bien excusables de la part de quelqu'un qui fait l'effort de répondre dans la langue de son correspondant.

Gauss à Sophie Germain

Votre lettre du 20 Fevrier, mais qui ne m'est parvenue que le 12 Mars, a été pour moi la source d'autant de plaisir que de surprise. Combien l'acquisition d'une amitié aussi flateuse et precieuse est-elle douce à mon coeur. L'intérêt vif, que Vous avez pris à mon sort pendant cette guerre funeste merite la plus sincere reconnaissance. Assurément, Votre lettre au Général PERNETY m'eût été fort utile, si j'avois été dans le cas d'avoir recours à une protection specielle de la part du gouvernement françois. Heureusement les evenemens et les suites de la guerre ne m'ont pas touché de trop près jusqu'ici, bienque je sois persuadé, qu'elles auront une grande influence sur le plan futur de ma vie. Mais comment Vous décrire mon admiration et mon étonnement, en voïant se metamorphoser mon correspondant estimé Mr. LEBLANC en cet illustre personnage, qui donne un exemple aussi brillant de ce que j'aurois peine de croire. Le goût pour les sciences abstraites en general et surtoût pour les mysteres des nombres est fort rare: on ne s'en etonne pas; les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se decelent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos moeurs et par nos prejugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches epineuses, sait neansmoins franchir ces entraves et penetrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talens tout à fait extraordinaires, le génie superieur. En effet rien ne pourroit me prouver d'une maniere plus flateuse et moins equivoque, que les attraits de cette science, qui a embelli ma vie de tant de jouissances, ne sont pas chimeriques, que la predilection,

(**) Voir par exemple l'article de Amy Dahan Dalmedico dans "Pour la Science" n^{o} 132, oct. 1988 : "Sophie Germain".

dont Vous l'avez honorée.

Les notes savantes, dont toutes Vos lettres sont si richement remplies, m'ont donné mille plaisirs. Je les ai étudiées avec attention, et j'admire la facilité, avec laquelle Vous avez penetré toutes les branches de l'Arithmetique, et la sagicité avec laquelle Vous les avez su generaliser et perfectionner. Je Vous prie d'envisager comme une preuve de cette attention, si j'ose ajouter une remarque à un endroit de Votre derniere lettre. Il me semble, que la proposition inverse, savoir "si la somme des puissances n^{emes} de deux nombres quelconques est de la forme $hh + nff$, la somme de ces nombres eux-mêmes sera de la meme forme" est enoncée un peu trop generalement. Voici un exemple où cette règle est en défaut:

$$15^{11} + 8^{11} = 8649755859375 + 8589934592 =$$
$$8658345793967 = 1595826^2 + 11.745391^2.$$

Neanmoins $15 + 8 = 23$ ne peut se reduire sous la forme $xx + 11yy$.

Il en est de même de la proposition: si l'un des facteurs de la formule $yy + nzz$ (n étant un nombre premier) est de la forme $(1, 0, n)$ (***), l'autre appartient necessairement à la meme forme. Votre demonstration ne prouve que ce, qu'aucune autre forme indéfinie, que telle qui est equivalente à $(1, 0, n)$, multipliée par la forme $(1, 0, n)$, ne peut donner le produit $(1, 0, n)$, mais cette demonstration ne s'étend pas sur les nombres définis. Soit, pour le déterminant -n, C une classe de formes, quelconque mais ni equivalente à la principale, ni à une autre classe anceps, soit D la classe resultante de la duplication de C (qui sera differente de la principale), enfin soit D' la classe opposée à D. Il s'ensuit, que de la composition de $C+C+D'$ résulte la classe principale. Ainsi si les deux nombres f, g peuvent être representés par une forme de la classe C, et le nombre h par une forme de la classe D', le produit fg x h peut se reduire à $(1, 0, n)$; mais il est facile [de voir] que fg ne se reduit pas seulement à D ou D' mais aussi à $(1, 0, n)$. Nous avons donc ici le cas, qu'un facteur fg et le produit $fg.h$ sont de la forme $(1, 0, n)$, sans que pourtant l'autre facteur y appartienne nécessairement. Au reste on voit facilement que le premier facteur doit être composé sans cela la proposition serait juste. Dans l'exemple ci dessus le facteur $\frac{15^{11}+8^{11}}{23}$ enveloppe le diviseur 67.

Depuis cinq ans des travaux astronomiques – auxquels pour le dire en passant je dois surtout l'heureuse situation, dont j'ai joui pendant le vie de notre duc, le victime malheureux de son attachement fidel à la maison de Prusse – m'ont empeché de me delivrer autant qu'auparavant à ma predilection pour l'Arithmetique et les autres branches de l'analyse. Je n'ai pas pourtant negligé celle ci tout à fait. Tout au contraire j'ai rassemblé peu à peu un grand nombre de recherches, qui un jour fourniront un autre volume – sinon deux – certainement pas moins interessant que le premier. Même dans le dernier hiver j'ai reussi à y ajouter une branche entierement nouvelle. C'est la théorie des residus cubiques et des residus

(***) cf. l'article de M. Guinot : Eureka! $num = \Delta + \Delta + \Delta$ '*L'Ouvert*' n°78 et 79 de 1995.

biquarrés, portée à un degré de perfection égal à celui, qu'a atteint la theorie des residus quarrés. Je mets cette théorie, qui repand un nouveau jour sur les residus quarrés parmi les recherches les plus curieuses donc je me sois jamais occupé. Je ne saurais Vous en donner une idée sans écrire un Memoire expres. Voici pourtant quelque theoreme special, qui pourra servir d'un petit echantillon.

I. Soit p un nombre premier de la forme $3n+1$. Je dis, que 2 (c. à. d. +2 et -2) est residu cubique de p, si p se reduit à la forme $xx+27yy$; que 2 est Non-residu cubique de p, si $4p$ se reduit à cette forme. P.E.7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 94. Vous ne trouveres que $31 = 4+27, 43 = 16+27$, et $2 \equiv 4^3 (mod.31), 2 \equiv (-9)^3 (mod.43)$.

II. Soit p un nombre premier de la forme $8n + 1$. Je dis que +2 et -2 seront residus ou non-residus biquarrés de p, suivant ce que p est ou n'est pas de la forme $xx + 64yy$. Par ex. parmi les nombres 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137. Vous ne trouves que 73=9+64, 89=25+64, 113=49+64, et $25^4 \equiv 2(mod.73), 5^4 \equiv 2(mod.89), 20^4 \equiv 2(mod.113)$.

Les démonstrations de ces theoremes et de ceux qui sont plus generaux sont intimement liées à des recherches delicates. – Voici une autre proposition relative aux residus quarrés, dont la demonstration est moins cachée : je ne l'ajoute pas, pour ne pas Vous derober le plaisir de la developper Vous-même, si Vous la trouveres digne d'occuper quelques momens de Votre loisir.

Soit p un nombre premier. Soient les $p-1$ nombres inferieurs à p partagés en deux classes

$$A \ldots\ldots\ldots 1, 2, 3, 4, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$$
$$B \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2}(p+1), \frac{1}{2}(p+3), \frac{1}{2}(p+5), \ldots p-1.$$

Soit a un nombre quelconque non-divisible par p. Multipliés tous les nombres A par a; prenés en les moindres residus selon le module p, soient, entre ces residus, α appartenant à A et β appartenants à B de sorte que $\alpha + \beta = \frac{1}{2}(p-1)$. Je dis, que a est residu quarré de p lorsque β est pair, non-residu lorsque β est impair.

(...) Suivent quelques indications de corrections à apporter à l'édition des "Disquisitiones arithmeticae"

J'aurois repondu plus tot à Votre lettre, mais la decouverte d'une nouvelle planete par M.Olbers m'a un peu distrait. Par le premier essai que j'ai fait sur son orbite, je trouve son mouvement considerablement plus vite que celui de Cérès, Pallas et Junon, savoir 978" par jour. L'inclinaison de l'orbite de $7^0 6'$. L'excentricite 0,1. Cette planete a beaucoup plus de clarté que Cérès, Pallas et Junon, et j'espere la trouver parmi les observations de l'histoire celeste, peut être même parmi celles de Flamsteed. Je viens d'achever un ouvrage etendu sur les methodes, qui me sont propres, à determiner les orbites des planetes. Mais quoique je l'aie ecrit en allemand, je trouve beaucoup de difficulté d'y engager un libraire.

La guerre a suspendu tout commerce, plusieurs de nos plus grands libraires l'ont refusé. Je suis à present à traiter avec un autre qui se montre un peu plus courageux. S'il trouvera son conte à cette entreprise, peut être il sera encouragé par-là à risquer la publication d'un second volume de mes *disquisitiones*.

Continuez, Mademoiselle, de me favoriser de Votre amitié et de Votre correspondance, qui font mon orgueil, et soïes persuadée, que je suis et serai toujours avec la plus haute estime.

Votre plus sincère admirateur
CH. FR. GAUSS.

Bronsvic ce 30 April 1807
jour de ma naissance.

Buste de Sophie Germain, extrait du livre de Amy Dahan Dalmedico : "Mathématisations, Augustin-Louis Cauchy et l'Ecole Française, Editions du Choix (1993) qui consacre un chapitre à "Sophie Germain et la théorie mathématique des surfaces élastiques".