L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PAR CORRESPONDANCE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Connaître la personnalité des mathématiciens célèbres n'est pas chose aisée. Leur oeuvre publiée a gommé toute trace d'émotion et de sentiment pour présenter les résultats mathématiques dans toute leur rigueur et leur vérité. Vérité souvent très belle sans doute et admirable, "honneur de l'esprit humain", mais abstraite et froide, figée dans son éternité comme un ciel étoilé par une nuit d'hiver glacée. Ce qui en a éloigné plus d'un, curieux de sciences mais rebuté par son aridité. A tort : les lettres écrites par les mathématiciens à leurs amis ou collègues nous révèlent des personnalités sensibles et passionnées, essayant de résoudre au mieux, non seulement les problèmes scientifiques qu'ils se sont posés mais aussi les mille et un tracas de leur vie quotidienne et les difficultés causées par les événements politiques et sociaux. Cette rubrique vous présente des lettres, ou de larges extraits que nous pensons représentatifs et révélateurs de la personnalité profonde, mais quelquefois méconnue, de nos illustres savants. Dans ce numéro :

Gauss et la géométrie non euclidienne; correspondance avec Farkas Bolyai.

Gauss pouvait avoir quelque chose d'irritant pour un jeune mathématicien contemporain : ce dernier n'étant jamais sûr que sa propre découverte n'avait pas déjà été pressentie, voire annoncée ici ou là dans la correspondance du "Mathematicorum Princeps" ; ceci en toute simplicité, sans malice, mais qui n'empêchait pas de meurtrir le jeune débutant. C'est ce qui s'est passé avec la géométrie non euclidienne et les deux Bolyai, Farkas le père, Janos son fils.

Né dans une famille noble de Hongrie en 1775, Wolfgang (*) Bolyai von Bolya raconte sa rencontre avec Gauss à Göttingen en automne 1796 :(**) "*J'y fis alors la connaissance de Gauss qui y étudiait [depuis l'automne de 1795], et dont je suis encore aujourd'hui l'ami, mais combien loin de pouvoir me comparer à lui. Il était très modeste et très réservé : ce n'est pas trois jours, comme avec Platon, mais pendant des années, qu'on eût pu vivre avec lui sans reconnaître combien il était grand. Quel malheur pour moi de n'avoir pas su ouvrir et lire ce livre sans titre et muet, je n'avais pas idée de l'étendue de son savoir, et lui, en voyant mes goûts, m'estima beaucoup sans savoir combien j'étais peu de chose. Ce qui nous unit fut notre passsion commune (qui ne se révélait pas extérieurement) pour les Mathématiques et notre conformité morale, de sorte que souvent, occupés chacun de nos propres pensées, nous nous promenions ensemble pendant des heures sans dire un mot*".

© L'OUVERT 89 (1997)

(*) Dénomination germanique de Farkas.

(**) cf. Paul Stäeckel et Friedrich Engel : *Gauss, les deux Bolyai et la géométrie non euclidienne*, Gauthier Villars Paris 1897, p. 6. Les traductions françaises des lettres citées ici, sont extraites de ce fascicule.

Ces communications de W. Bolyai même sont complétées par des paroles que Gauss doit avoir dites, comme le raconte Sartorius von Waltershausen, dans le cours des années précédentes. "*Bolyai est le seul qui ait jamais su entrer dans mes idées métaphysiques relatives aux Mathématiques.*"

Gauss quitta Göttingen durant l'automne 1798 et les deux amis se rencontrèrent une seule et dernière fois encore le 24 mai 1799 à Clausthal dans le Harz, avant le retour de F. Bolyai dans son pays natal pour y exercer le métier de professeur de mathématiques, physique et chimie au collège de Maros Vásárhely. Mas ils continuèrent à s'écrire, pas très régulièrement, presque jusqu'à leur mort. (1855 pour Gauss; 1856 pour F. Bolyai). Il est probable que les deux amis se soient entretenus, lors de cette rencontre, des fondements de la géométrie et particulièrement du problème des parallèles et de l'axiome V (appelé axiome XI dans les textes qui suivent, selon une autre numérotation des axiomes euclidiens).

Gauss à W. Bolyai (Helmstedt, le 16 décembre 1799)

"*Je regrette bien de n'avoir pas profité de notre voisinage rapproché d'autrefois, pour connaître davantage les travaux sur les premiers principes de la Géométrie; je me serais ainsi certainement épargné bien des peines inutiles, et j'aurais eu l'esprit plus en repos, autant que quelqu'un de mon caractère peut l'avoir, lorsqu'il reste encore tant à désirer relativement à un tel sujet. Quant à moi, mes travaux sont déjà bien avancés (autant que m'a permis de le faire le peu de temps que m'ont laissé mes occupations de nature toute différente); mais la voie dans laquelle je suis entré ne conduit pas au but que l'on cherche, et que tu affirmes avoir atteint, mais conduit plutôt à mettre en doute l'exactitude de la Géométrie.*

Je suis, il est vrai, arrivé a bien des choses, qui seraient par la plupart des hommes regardées comme une démonstration valable, mais qui, à mes yeux, ne démontrent pour ainsi dire RIEN; par exemple, si l'on pouvait démontrer l'existence possible d'un triangle rectiligne, dont l'aire serait plus grande que toute surface donnée, je serais alors en état de démontrer avec une rigueur parfaite toute la Géométrie.

La plupart, il est vrai, voudraient donner à cela le rang d'un axiome, moi non; il serait bien, en effet, possible, quelque éloignés entre eux que l'on choisisse les trois sommets du triangle dans l'espace, que son aire fût néanmoins toujours inférieure (infra) à une limite donnée. Je possède quelques théorèmes pareils, mais je ne trouve en aucun d'eux quelque chose de satisfaisant. Fais-nous donc bientôt connaître ton travail; tu auras acquis alors droit à la reconnaissance, mais non pas celle, il est vrai, du gros du public (auquel appartiennent cependant nombre de gens regardés comme d'habiles mathématiciens); je m'aperçois, en effet, davantage chaque jour que le nombre des vrais géomètres est extrêmement restreint, et que la plupart des gens ne sont capables ni de porter un jugement sur les difficultés de pareils tavaux, ni même de les comprendre; mais jouis de la reconnaissance de tous ceux dont l'opinion seule peut avoir effectivement du prix pour toi!

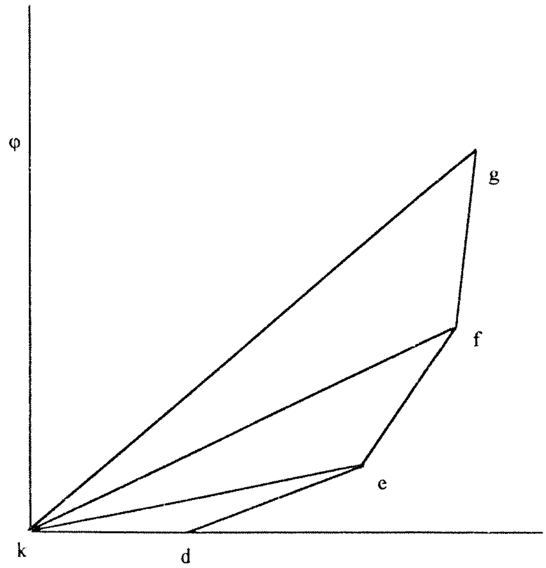
Il se trouve, à Brunswick, un émigré nommé Chauvelot, qui n'est pas mauvais géomètre et qui prétend avoir complètement établi la théorie des droites parallèles; son travail sera imprimé bientôt, mais je n'en attends rien de bon. Dans les Archives de Hindeburg, neuvième Partie, se trouve également une nouvelle recherche, d'un certain Hauff, sur le même sujet; c'est au-dessous de toute critique."

F. Bolyai enverra effectivement une "*Théorie de Göttingen, relative aux parallèles*" en automne 1804 et que Gauss commente ainsi :

Gauss à W. Bolyai (Brunswick, le 25 novembre 1804)

Maintenant ... encore quelque chose à propos de ta Communication géométrique. J'ai lu ton mémoire avec le plus grand intérêt et la plus grande attention et j'ai été vraiment réjoui de la profonde perspicacité dont tu fais preuve. Mais ce n'est pas une louange inutile que tu désires; celle-ci, à un certain point, pourrait aussi sembler partiale, car la marche de tes idées a beaucoup de similitude avec celle que j'ai autrefois moi-même employée dans la recherche de la solution de ce noeud gordien, recherche vaine encore jusqu'ici. C'est seulement mon jugement sincère et sans détour que tu désires. Le voici : ta méthode ne me satisfait pas encore. Je vais chercher à mettre en pleine lumière, avec toute la clarté possible, la pierre d'achoppement que j'y trouve encore (et qui appartient ausssi au même groupe d'écueils sur lesquels ont échoué jusqu'ici mes propres recherches). J'ai cependant toujours l'espoir que ces écueils finiront, avant la fin de ma vie, par me livrer enfin passage. Mais j'ai ici en ce moment, tant d'autres affaires en train, que je ne puis actuellement y penser; crois-moi, cela me réjouirait du fond du coeur, si tu me devançais et si tu réussissais à surmonter tous les obstacles. Je ferais alors, avec le plus grand plaisir, tout ce que je puis pour faire reconnaître ton mérite et pour le mettre en pleine lumière. J'arrive maintenant à la question. A toutes les autres conclusions, je ne trouve aucune objection essentielle à faire : ce qui, pour moi, n'est pas concluant, c'est simplement le raisonnement dans l'Article XIII. Tu supposes ici prolongée d'une manière indéterminée, une ligne II. ... $kdefg$ ... formée de segments tous rectilignes et égaux kd, de, ef, fg, etc..., et où les angles kde, def, efg, etc... sont égaux entre eux, et tu veux démontrer qu'en procédant ainsi plus ou moins longtemps II devra nécessairement dépasser $k\varphi$. A cet effet, tu fais tourner la ligne droite $kd\infty = Q$, autour de k, du côté où est situé II, en sorte qu'elle passera successivement, en le rencontrant, de chaque côté du polygone II au côté suivant. Tu fais voir à merveille que Q, passant à la façon d'échelons par d, c, f, g etc..., se rapproche chaque fois davantage de $k\varphi$; contre tout ceci, aucune objection à faire, mais maintenant tu continues ainsi :

"Quapropter Q moveri potest modo prescripto, usque dum in $k\varphi\varphi'\infty$ pervenerit..." et voilà la conclusion qui ne me semble pas évidente.
De ton raisonnement, à mon avis, il ne s'ensuit pas le moins du monde que l'angle, autour duquel Q...(1), en cheminant le long d'un côté de II qui se rapproche de $k\varphi$, ne devienne pas toujours moindre ; de la sorte, l'agrégat de tous les rapprochements successifs, quel que fût leur nombre, pourrait bien ainsi n'être jamais [suffisamment] grand pour amener Q en $k\varphi$ si tu pouvais démontrer que $dke = ekf = fkg$, etc..., alors la chose serait nette et claire.
Le théorème est du reste exact, mais difficile à démontrer en toute rigueur sans présupposer d'avance la théorie des parallèles. On pourrait donc toujours appréhender que les angles dke, ekf, fkg etc... ne diminuassent successivement.



Si cela avait lieu (exempli gratia seulement) en progression géométrique, de sorte que l'on eût $ekf = \psi \times dke, fkg = \psi dke$, etc... ($\psi$ étant plus petit que 1), alors la somme de tous les rapprochements, quelque grand que l'on prenne leur nombre, resterait toujours inférieure à $\frac{1}{1-\psi} \times ekf$, et cette limite pourrait encore alors être toujours inférieure à l'angle droit $dk\varphi$. Tu as exigé de moi un jugement sans détour : je te l'ai donné, et je te répète encore l'assurance que cela me ferait le plus grand plaisir si tu surmontais toutes ces difficultés".

Ainsi, les espoirs que F. Bolyai avait fondé sur son travail furent anéantis au point de le faire renoncer à toute recherche. Il écrira dans son autobiographie : "*Comme je n'étais pas satisfait de mes tentatives pour démontrer l'axiome des parallèles, et qu'après les avoir pendant bien longtemps poursuivies jusqu'aux limites du possible, j'en perdais le repos, mon feu pour les mathématiques s'éteignit et je me tournai vers la poésie (*)* Ajoutant : "*Si jadis j'eus pu arriver à un résultat dans la question de l'axiome XI, je ne me serais occupé ni de la construction des poêles ni de l'art*

(1) Ici se trouvent des
lettres devenues illisibles par l'effet de
l'usure d'un pli dans le papier de la lettre
(*) F. Bolyai publiera pourtant deux forts beaux volumes présentant les fondements des mathématiques, en 1832 et 1833 sous le titre *Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseo... introduceudi* (une réedition datée de 1896 existe à la BNS de Strasbourg)

poétique, et j'eus été un homme et un père de famille meilleur".
Son fils Janos prendra heureusement et avec succès le relais dans cette recherche millénaire. Janos Bolyai, fils de Farkas, né le 15 décembre 1802 à Klausenburg, est présenté ainsi à Gauss par son père. (lettre du 20 juin 1831).

W. Bolyai à Gauss (Maros Vásárhely, le 20 juin 1831)

[Mon fils] est déjà lieutenant en premier dans le Corps du Génie et sera bientôt capitaine ; c'est un beau garçon, un virtuose sur le violon ; il est fort en escrime et brave, mais il s'est souvent battu en duel, et c'est encore un militaire un peu trop bouillant, mais aussi un parfait galant homme : de la lumière dans les ténèbres, des ténèbres dans la lumière. Il est passionné pour les mathématiques et possède pour elles de rares aptitudes d'esprit, il est maintenant en garnison à Lemberg ; il a pour toi la plus grande vénération, il est capable de te comprendre et de t'apprécier. C'est à sa demande que je t'envoie ce petit opuscule de lui ; aies la bonté de le juger avec tes yeux si perspicaces, et, dans la réponse que j'attends impatiemment, écris-moi ton arrêt sans ménagement."

Le petit opuscule en question n'est rien moins que le fameux "Appendix" de Janos Bolyai où celui-ci fonde la géométrie hyperbolique (*) avec le sous-titre : "*La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori) ; suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'Axiome XI.*

En réalité, Janos Bolyai avait percé depuis une dizaine d'années déjà la vraie nature du problème, comme l'indique une lettre à son père, datée du 3 novembre 1823 : "*Je suis tout à fait décidé à publier un Ouvrage sur la théorie des parallèles, dès que j'aurai mis les matériaux en ordre et que les circonstances le permettront. Je ne l'ai pas encore fait, mais la voie que j'ai suivie a certainement pour ainsi dire, presque atteint le but; le but même n'est pas atteint, mais j'ai découvert des choses si belles que j'en ai été ébloui ; il serait à jamais regrettable si elles étaient perdues. Lorsque vous les verrez, vous le reconnaîtrez aussi. En attendant je ne puis ici dire autre chose que ceci : J'ai du néant tiré un nouvel univers. Tout ce que je vous ai communiqué jusqu'ici n'est qu'une maison de cartes, comparé à cette tour. Je suis déjà autant persuadé que cela me fera honneur que si cela avait déjà eu lieu.*"

Gauss a donc été sollicité pour donner son avis sur "l'Appendix" avant sa publication en annexe au "Tentamen", l'oeuvre en deux volumes du père Farkas Bolyai. Sa réponse peut paraître étrange et décevante, même si en réalité, Gauss a jugé très positivement le travail de Janos Bolyai (**) La phrase : "*je ne puis louer ce travail (...) car le louer ce serait me louer moi-même*" fut très mal reçu par

---

(*) cf. K. Volkert, "*Et pourtant quelques uns sont quarrables, la quadrature du cercle en géométrie hyperbolique*". L'Ouvert n° 84; septembre 86
(**) Gauss à son élève et ami Gerling : "*je considère ce jeune géomètre von Bolyai comme un génie de première grandeur*".

le fils, qui soupçonnait son père d'avoir divulgué à Gauss les idées exposées dans l'"Appendix", et que ce dernier voulait lui ravir la priorité de ses découvertes. Il n'en est rien comme le prouve la lettre de Gauss, si on la lit jusqu'au bout.

Gauss à W. Bolyai (Göttingen, le 6 mars 1832)

... Parlons maintenant un peu du travail de ton fils. Si je commence en disant que je ne puis louer ce travail, tu pourras bien un instant reculer d'étonnement; mais je ne puis dire autre chose; le louer serait me louer moi-même; en effet, le contenu tout entier de l'Ouvrage, la voie qu'a frayée ton fils, les résultats auxquels il a été conduit coïncident presque entièrement avec mes propres méditations qui ont occupé en partie mon esprit depuis déjà trente à trente-cinq ans. Aussi ai-je été complètement stupéfait. Qaunt à mon travail personnel, dont d'ailleurs j'ai confié peu de chose jusqu'ici au papier, mon intention était de n'en rien laisser publier de mon vivant.

En effet, la plupart des hommes n'ont pas l'esprit juste sur les questions dont il s'agit, et j'ai trouvé seulement bien peu d'entre eux qui prissent un intérêt particulier à ce que je leur ai communiqué à ce sujet. Pour pouvoir prendre cet intérêt, il faut d'abord avoir senti bien vivement ce qui fait essentiellement défaut, et sur ces matières la plupart des hommes sont dans une obscurité complète. C'était, au contraire, mon idée de mettre, avec le temps, tout ceci par écrit afin qu'au moins cela ne périsse pas avec moi.

Aussi est-ce pour moi une agréable surprise de voir que cette peine peut maintenant m'être épargnée, et je suis rempli d'une joie extrême que ce soit précisément le fils de mon vieil ami qui m'ait devancé d'une manière si remarquable.